أولمبياد الخامس عشر

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}$

تمرين 2

ABC مثلث

بين أن $S_{ABC}=\frac{r}{2}p$ (S_{ABC} هي مساحة المثلث ABC و r هو شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث

ABC و p هو محيط المثلث ABC)

تمرين 3

x و y و z أعدادا حقيقية موجبة بحيث : $2\left(z^2-y^2\right)=3x^2$

حدد أ كبر هده الأعداد

تمرين 4

ABC مثلث جميع زواياه حادة و النقطة

P داخله .

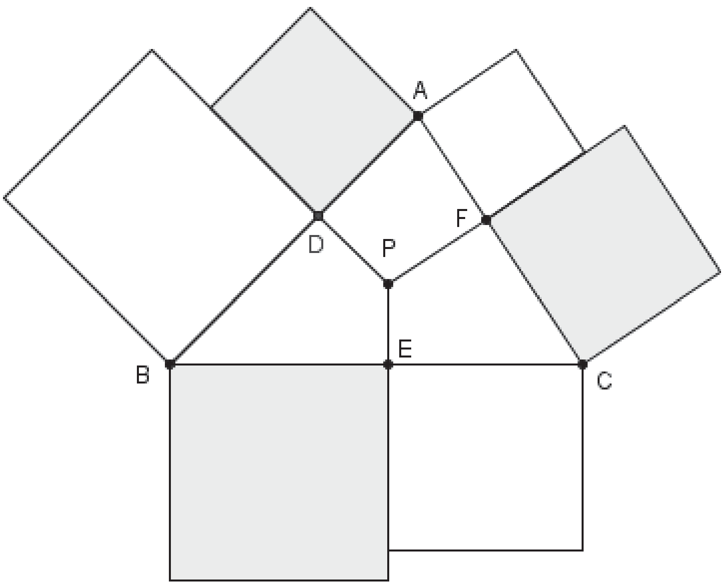
النقط D و E و F هي المساقط

العمودية للنقطة P على $[AB]$ و $[BC]$

و $[CA]$ على التوالي.

ننشئ 6 مربعات خارج المثلث ABC كما

هو مبين في الشكل جانبه



بين أن مجموع مساحات المربعات الرمادية يساوي مجموع مساحات المربعات البيضاء

حل أولمبياد الخامس عشر

تمرين 1

لدينا : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

يعني : $x-2\sqrt{xy}+y \geq 0$

إذن : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ (1)

لدينا : $\left(\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2 \geq 0$

يعني : $\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{1}{xy}}+\frac{1}{y} \geq 0$

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ (2)

نضرب المتفاوتتين 1 و 2 طرف بطرف : $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{\frac{1}{xy}}$

يعني : $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 2\times 2\sqrt{\cancel{xy} \times \frac{1}{\cancel{xy}}}$

يعني : $\frac{1}{\cancel{x+y}} \times \left(\cancel{x+y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4 \times \frac{1}{x+y}$

إذن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (3)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{y+z}$ (4)

و $\frac{1}{x}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+z}$ (5)

نجمع المتفاوتات 3 و 4 و 5 طرف بطرف : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{4}{x+z}$

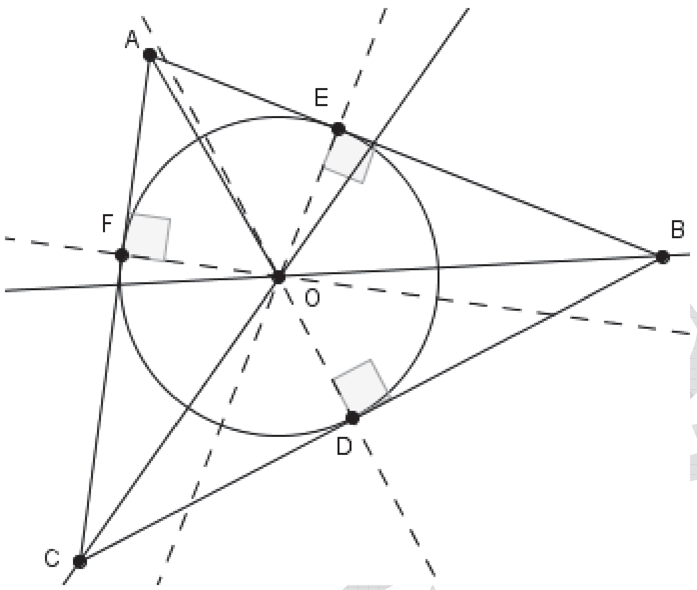
يعني : $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z} \geq \frac{2\times 2}{x+y}+\frac{2\times 2}{y+z}+\frac{2\times 2}{x+z}$

يعني : $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 2\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right)$

يعني : $\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\left(\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}\right)$

وبالتالي : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{x+z}$

تمرين 2



لدينا النقطة O هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و r شعاعها

و النقط D و E و F هي المساقط العمودية للنقطة O على $[BC]$ و $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي

إذن : $OF=OE=OD=r$

لدينا :

$$\begin{aligned}S_{ABC}&=S_{AOC}+S_{ABO}+S_{OBC}\\&=\frac{AC\times OF}{2}+\frac{AB\times OE}{2}+\frac{BC\times OD}{2}\\&=\frac{AC\times r}{2}+\frac{AB\times r}{2}+\frac{BC\times r}{2}\\&=\frac{r}{2}(AC+AB+BC)\end{aligned}$$

نعلم أن محيط المثلث ABC هو : $p=AC+AB+BC$

إذن : $S_{ABC}=\frac{r}{2}(AC+AB+BC)=\frac{r}{2}p$

تمرين 3

لدينا : $2\left(z^2-y^2\right)=3x^2\geq 0$

يعني : $z^2-y^2\geq 0$ يعني : $z^2\geq y^2$

إذن : $z \geq y$ (1) $($ لأن $z \geq 0$ و $y \geq 0$ $)$

لدينا : $2z^2 - 2y^2 = 2x^2 + x^2$

يعني : $2z^2 - 2x^2 = 2(z^2 - x^2) = 2y^2 + x^2 \geq 0$

يعني : $z^2 - x^2 \geq 0$ يعني : $z^2 \geq x^2$

إذن : $z \geq x$ (2) $($ لأن $z \geq 0$ و $x \geq 0$ $)$

من 1 و 2 نستنتج أن z هو أكبر هده الأعداد

تمرين 4

– مساحات المربعات الرمادية هي : $AF^2 + CE^2 + BD^2$

– مساحات المربعات المخدشة هي : $FC^2 + BE^2 + DA^2$

لنبين أن : $AF^2 + CE^2 + BD^2 = FC^2 + BE^2 + DA^2$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات APD و PCF و PBE و PCE و PBD و PAF :

$$\begin{cases} PA^2 = AD^2 + PD^2 \\ PC^2 = CF^2 + PF^2 \\ PB^2 = BE^2 + PE^2 \\ PC^2 = EC^2 + PE^2 \\ PB^2 = DB^2 + PD^2 \\ PA^2 = FA^2 + PF^2 \end{cases}$$

يعني :

$$\begin{cases} AD^2 = PA^2 - PD^2 \\ CF^2 = PC^2 - PF^2 \\ BE^2 = PB^2 - PE^2 \\ EC^2 = PC^2 - PE^2 \\ DB^2 = PB^2 - PD^2 \\ FA^2 = PA^2 - PF^2 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{aligned} FA^2 + EC^2 + DB^2 &= PA^2 - PF^2 + PC^2 - PE^2 + PB^2 - PD^2 \\ &= PA^2 - PD^2 + PC^2 - PF^2 + PB^2 - PE^2 \\ &= AD^2 + CF^2 + BE^2 \end{aligned}$$