

أولمبياد السادس والعشرون

تمرين 1

x و y عدنان حقيقيان موجبان قطعا

$$\text{بين أن : } 3 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

تمرين 2

a و b و x و y أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x \leq y$

$$\text{بين أن : } \frac{x}{y} \leq \frac{ax+by}{ay+bx} \leq \frac{y}{x}$$

تمرين 3

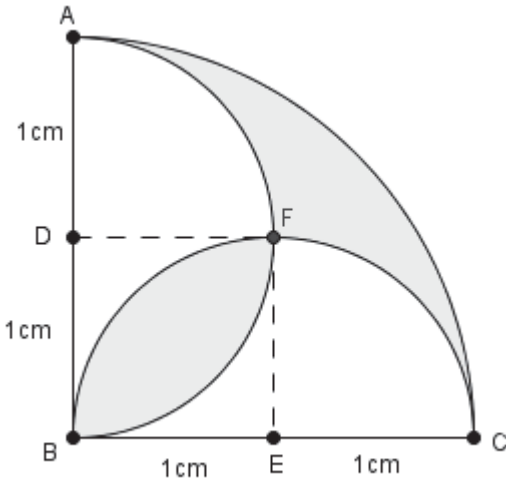
1- x و y عدنان حقيقيان موجبان بحيث : $x - y = 16$ و $xy = 224$

أحسب $x + y$

$$2- \text{احسب : } S = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{130} + \frac{1}{208} + \frac{1}{304} + \frac{1}{418} + \frac{1}{550} + \frac{1}{700}$$

تمرين 4

احسب مساحة المنطقة المظللة



حل أولمبياد السادس والعشرون

تمرين 1

لدينا :

$$\begin{aligned} 3 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) &= \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 1 \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 1 \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

إذن : $3 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$

تمرين 2

لدينا : $x \leq y$

يعني : $x^2 \leq y^2$

يعني : $(bx) \times x^2 \leq (bx) \times y^2$ و $(ay) \times x^2 \leq (ay) \times y^2$ ($bx > 0$ و $ay > 0$)

يعني : $bx^3 \leq bxy^2$ و $ayx^2 \leq ay^3$

يعني : $bx^3 + (ax^2y) \leq bxy^2 + (ax^2y)$ و $ayx^2 + (bxy^2) \leq ay^3 + (bxy^2)$

يعني : $x^2(bx + ay) \leq xy(by + ax)$ و $xy(ax + by) \leq y^2(ay + bx)$

يعني : $\frac{1}{x^2} \times x^2(bx + ay) \leq \frac{1}{x^2} \times xy(by + ax)$ و $\frac{1}{y^2} \times xy(ax + by) \leq \frac{1}{y^2} \times y^2(ay + bx)$

يعني : $bx + ay \leq \frac{y}{x} \times (by + ax)$ و $\frac{x}{y} \times (ax + by) \leq (ay + bx)$

يعني : $\frac{1}{bx + ay} \geq \frac{x}{y} \times \left(\frac{1}{by + ax}\right)$ و $\frac{1}{ay + bx} \geq \frac{y}{x} \times \left(\frac{1}{ax + by}\right)$

يعني : $\frac{ax + by}{bx + ay} \geq \frac{x}{y}$ و $\frac{ax + by}{ay + bx} \geq \frac{y}{x}$

وبالتالي : $\frac{x}{y} \leq \frac{ax + by}{ay + bx} \leq \frac{y}{x}$

تمرين 3

1- لدينا : $x - y = 16\sqrt{2}$

يعني : $(x - y)^2 = (16\sqrt{2})^2$

إذن : $x^2 - 2xy + y^2 = 256 \times 2 = 512$ (1)

لدينا : $xy = 224$

إذن : $4 \times xy = 4 \times 224 = 896$ (2)

نجمع المساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $x^2 - 2xy + y^2 + 4 \times xy = 512 + 896$

أي : $x^2 + 2xy + y^2 = 1408$

أي : $(x + y)^2 = 1408$

وبالتالي : $x + y = \sqrt{1408} = 2\sqrt{352}$

-2

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \frac{1}{10 \times 13} + \frac{1}{13 \times 16} + \frac{1}{16 \times 19} + \frac{1}{19 \times 22} + \frac{1}{22 \times 25} + \frac{1}{25 \times 28} \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{4-1}{1 \times 4} + \frac{1}{3} \times \frac{7-4}{4 \times 7} + \frac{1}{3} \times \frac{10-7}{7 \times 10} + \frac{1}{3} \times \frac{13-10}{10 \times 13} + \frac{1}{3} \times \frac{16-13}{13 \times 16} + \frac{1}{3} \times \frac{19-16}{16 \times 19} + \frac{1}{3} \times \frac{22-19}{19 \times 22} + \frac{1}{3} \times \frac{25-22}{22 \times 25} + \frac{1}{3} \times \frac{28-25}{25 \times 28} \\
 &= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{13}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{19}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{22}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{25}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{28}\right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{22} + \frac{1}{22} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{28}\right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{28}\right) \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{27}{28} \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 3}{28} \\
 &= \frac{9}{28}
 \end{aligned}$$

تمرين 4

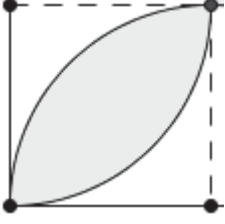
- مساحة الشكل : $\frac{\pi \times 2^2}{4} = \pi$

- مساحة نصف الدائرة التي قطرها يساوي 2 : $\frac{\pi \times 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

- مساحة نصف الدائرتين التي قطرها يساويان 2 : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

- مساحة الشكل البيضاوي :

$$\begin{aligned} 1^2 - 2 \left(1^2 - \frac{\pi \times 1^2}{4} \right) &= 1 - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 1 - \frac{4 - \pi}{2} \\ &= \frac{\pi - 2}{2} \end{aligned}$$



- مساحة المنطقة المضللة :

مساحة المنطقة المضللة = مساحة الشكل - (مساحة نصف الدائرتين - مساحة الشكل البيضاوي)

$$1 - \left(\pi - \frac{\pi - 2}{2} \right) = \frac{2 - \pi}{2} \text{ cm}^2$$

مساحة المنطقة المضللة هي : $\frac{2 - \pi}{2} \text{ cm}^2$