

أولمبياد العاشر

تمرين 1

x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث : $x + y + z = 1$

-1 بين أن : $\sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$

-1 استنتج أن : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq 4$

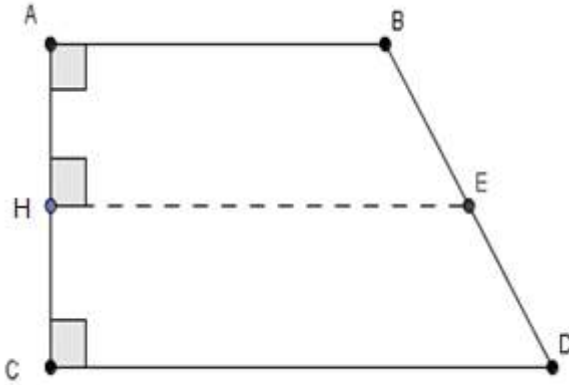
تمرين 2

EFG مثلث قائم الزاوية في E

النقطة M المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (FG)

بين أن : $EF + EG < EM + FG$

تمرين 3



$ABCD$ رباعي بحيث : $(AB) \perp (AC)$

و $(DC) \perp (AC)$ والنقطة E منتصف $[BD]$

النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة

E على (AC)

بين أن $2EH = AB + DC$

تمرين 4

احسب :

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{1000\sqrt{999} + 999\sqrt{1000}}$$

حل أولمبياد العاشر

تمرين 1

1- لدينا : $(\sqrt{t}-1)^2 \geq 0$

يعني : $(\sqrt{t}-1)^2 = t - 2\sqrt{t} + 1 \geq 0$ يعني : $-2\sqrt{t} \geq -t - 1$ يعني : $2\sqrt{t} \leq t + 1$

يعني : $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{t} \leq \frac{1}{2}(t+1)$

إذن : $\sqrt{t} \leq \frac{t+1}{2}$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\sqrt{2x+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2}$

و $\sqrt{2y+1} \leq \frac{(2y+1)+1}{2}$

و $\sqrt{2z+1} \leq \frac{(2z+1)+1}{2}$

نجمع المتفاوتات طرف بطرف : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{(2x+1)+1}{2} + \frac{(2y+1)+1}{2} + \frac{(2z+1)+1}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{2x+2y+2z+6}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{2(x+y+z)+6}{2}$

يعني : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{2 \times 1 + 6}{2}$ يعني : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq \frac{8}{2}$

إذن : $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} + \sqrt{2z+1} \leq 4$

تمرين 2

لدينا :

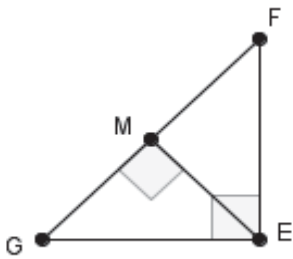
$$(EM + FG)^2 = EM^2 + 2EM \times FG + FG^2$$

$$= EM^2 + 4 \left(\frac{EM \times FG}{2} \right) + FG^2$$

$$S_{EFG} = \frac{EM \times FG}{2} = \frac{EF \times EG}{2} : \text{نعلم أن}$$

$$(S_{EFG} : \text{مساحة المثلث } EFG)$$

$$(1) \quad (EM + FG)^2 = EM^2 + 4S_{EFG} + FG^2$$



لدينا :

$$(EF + EG)^2 = EF^2 + 2EF \times EG + EG^2$$

$$= EF^2 + EG^2 + 4 \left(\frac{EF \times EG}{2} \right)$$

$$(EF + EG)^2 = EF^2 + EG^2 + 4S_{EFG} \quad (\text{لأن المثلث } EFG \text{ قائم الزاوية في } E)$$

$$(2) \quad (EF + EG)^2 = FG^2 + 4S_{EFG}$$

نقوم بطرح المتساويتين 1 و 2 طرف بطرف :

$$(EF + EG)^2 - (EM + FG)^2 = FG^2 + 4S_{ABC} - (EM^2 + 4S_{ABC} + FG^2)$$

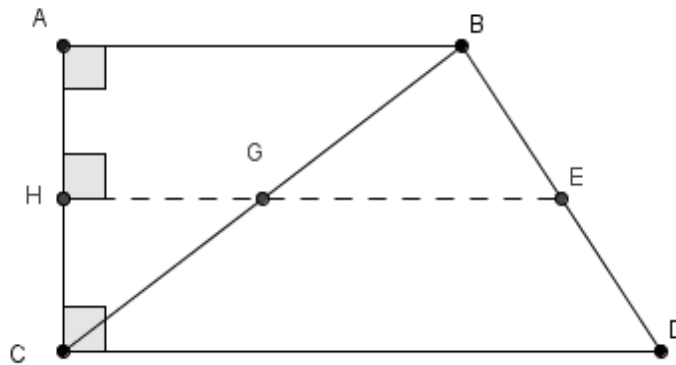
$$= \cancel{FG^2} + \cancel{4S_{ABC}} - EM^2 - \cancel{4S_{ABC}} - \cancel{FG^2}$$

$$= -EM^2 < 0$$

$$(EF + EG)^2 < (EM + FG)^2 \quad \text{إذن :}$$

$$EF + EG < EM + FG \quad \text{وبالتالي :}$$

تمرين 3



بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث BCD : $\frac{BG}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{GE}{CD}$

يعني : $\frac{GE}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{BE}{2BE} = \frac{1}{2}$ (لأن E منتصف [BD])

$$(1) \quad GE = \frac{1}{2} CD \quad \text{إذن}$$

لدينا في المثلث BCD النقطة E منتصف [BD] و $(GE) \parallel (CD)$

إذن G منتصف [BC]

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC : $\frac{CH}{CA} = \frac{CG}{CB} = \frac{HG}{AB}$

ومنه $\frac{HG}{AB} = \frac{CG}{CB} = \frac{1}{2}$ (G منتصف [BC])

إذن : $HG = \frac{1}{2} AB$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $2EH = 2(HG + GE) = 2\left(\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD\right) = AB + CD$

تمرين 4

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} &= \frac{1}{x\sqrt{x-1} + (x-1)\sqrt{x}} \times \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x^2(x-1) - (x-1)^2 \times x} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x^3 - x^2 - x(x^2 - 2x + 1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{\cancel{x^3} - x^2 - \cancel{x^3} + 2x^2 - x} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x^2 - x} \\ &= \frac{x\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x}}{x(x-1)} \\ &= \frac{\cancel{x}\sqrt{x-1}}{\cancel{x}(x-1)} - \frac{(x\cancel{-1})\sqrt{x}}{x(x\cancel{-1})} \\ &= \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{1000\sqrt{999} + 999\sqrt{1000}} \\ &= \frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{999}}{999} - \frac{\sqrt{1000}}{1000} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{1000}}{1000} = 1 - \frac{10\sqrt{10}}{1000} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{100} \end{aligned}$$