

أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

بين أن : $xyz = \frac{1}{3}$ $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^3+y^3+z^3=5 \end{cases}$ بحيث : x و y و z أعداد حقيقية

تمرين 2

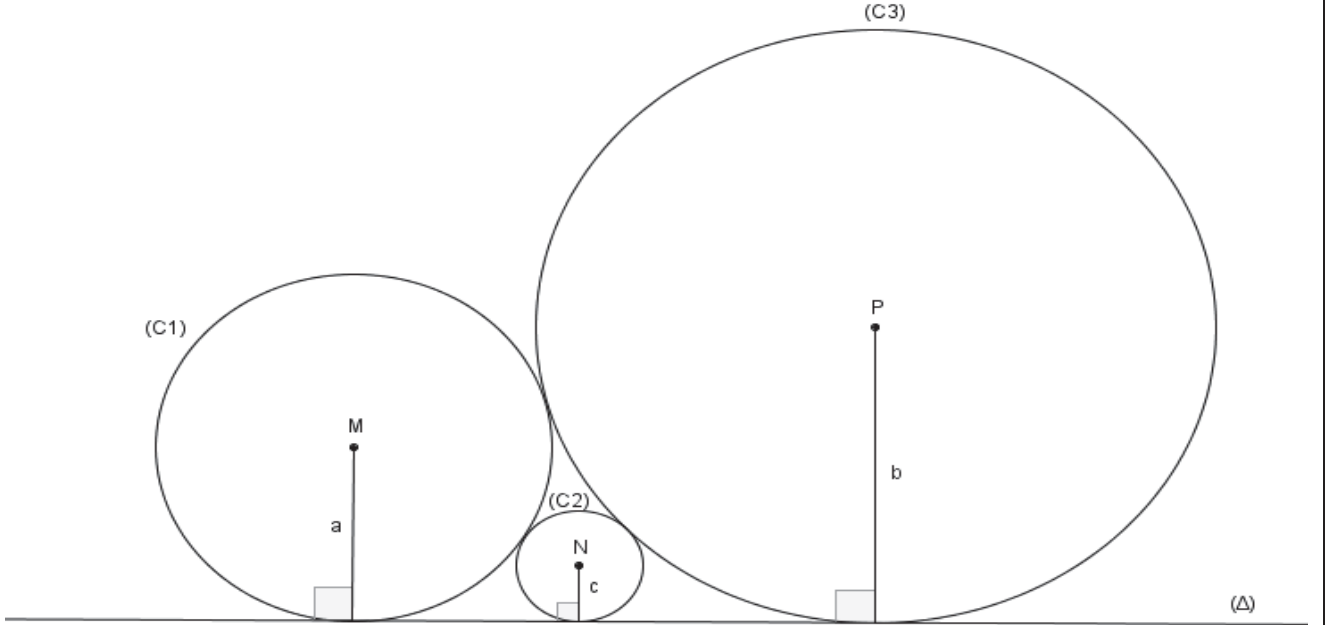
$$X = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$$

$$Y = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$$

بين أن : $X + Y = 0$

تمرين 3

نعتبر الشكل أسفله بحيث : الدوائر $C_1(M,a)$ و $C_2(N,c)$ و $C_3(P,b)$ متماسة فيما بينها والمستقيم (Δ) مماس للدوائر الثلاثة بين أن : $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$



تمرين 4

a و b و c أطوال أضلاع مثلث

بين أن $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$

حل أولمبياد الرابع والعشرون

تمرين 1

لدينا : $x + y + z = 1$

يعني : $(x + y + z)^3 = 1^3$

يعني : $(x + y + z)^2 \times (x + y + z) = 1$

يعني : $(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) \times (x + y + z) = 1$

يعني : $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz = 1$

يعني : $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y + z) + 3y^2(x + z) + 3z^2(x + y) + 6xyz = 1$

بما أن : $x + y + z = 1$ فإن : $x + y = 1 - z$ و $y + z = 1 - x$ و $x + z = 1 - y$

يعني : $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(1 - x) + 3y^2(1 - y) + 3z^2(1 - z) + 6xyz = 1$

يعني : $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3 + 6xyz = 1$

يعني : $x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz = 1$

يعني : $5 + 3 \times 3 - 3 \times 5 + 6xyz = 1$ ($x^3 + y^3 + z^3 = 5$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 3$)

يعني : $-1 + 6xyz = 1$

وبالتالي : $xyz = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

تمرين 2

$$X + Y = (1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2) + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100)$$

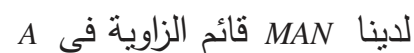
$$= (1 + 1) + (2 - 2^2) + (3 + 3^2) + (4 - 4^2) + \dots + (99 + 99^2) + (100 - 100^2)$$

$$= 2 + (2 \times (1 - 2)) + (3 \times (1 + 3)) + (4 \times (1 - 4)) + \dots + (99 \times (1 + 99)) + (100 \times (1 - 100))$$

$$= 2 + (2 \times (-1)) + (3 \times (4)) + (4 \times (-3)) + \dots + (99 \times (100)) + (100 \times (-99))$$

$$= \cancel{2} - \cancel{2} + \cancel{12} - \cancel{12} + \dots + \cancel{9900} - \cancel{9900}$$

$$= 0$$



حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MN^2 = MA^2 + AN^2$

$$AN^2 = (a+c)^2 - (a-c)^2 : \text{أى} \quad AN^2 = MN^2 - MA^2 : \text{أى}$$

$$AN = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - a^2 + 2ac - c^2} : \text{أى} \quad AN = \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} : \text{أى}$$

(1) $AN = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$: ومنه :

و لدينا NDP قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $NP^2 = ND^2 + DP^2$

$$ND^2 = (c+b)^2 - (b-c)^2 : \text{أى} \quad ND^2 = NP^2 - DP^2 : \text{أى}$$

$$ND = \sqrt{\cancel{c^2} + 2cb + \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + 2cb - \cancel{b^2}} : \text{أبي} \quad ND = \sqrt{(c+b)^2 - (b-c)^2} : \text{أبي}$$

(2) $ND = \sqrt{4cb} = 2\sqrt{cb}$: ومنه

و لدينا MFP قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $MP^2 = MF^2 + PF^2$

$$MF^2 = (a+b)^2 - (b-a)^2 \text{ أي } MF^2 = MP^2 - PF^2$$

$$MF = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2} \text{ أي } MF = \sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2}$$

$$(3) \quad MF = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab} \text{ ومنه}$$

$$(4) \quad MF = AD = AN + ND$$

من 1 و 2 و 3 و 4 نستنتج أن : $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb}$

$$\frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2\sqrt{ab} = \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times (2\sqrt{ac} + 2\sqrt{cb})$$

أي : $\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ وبالتالي

تمرين 4

لدينا a و b و c أطوال أضلاع مثلث

يعني : $a+b > c$ و $c+a > b$ و $b+c > a$

يعني : $a+b-c > 0$ و $c+a-b > 0$ و $b+c-a > 0$

نضع : $x = a+b-c > 0$ و $y = b+c-a > 0$ و $z = c+a-b > 0$

لدينا : $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ يعني : $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$ يعني : $2\sqrt{xy} \leq x + y$

إذن : $(1) \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

بنفس الطريقة نبين أن : $(2) \quad \sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$

و $(3) \quad \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$

نضرب المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف : $\sqrt{xy} \times \sqrt{xz} \times \sqrt{yz} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$

أي : $\sqrt{(xyz)^2} \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$ أي : $xyz \leq \frac{x+y}{2} \times \frac{x+z}{2} \times \frac{y+z}{2}$

أي :

$$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a+b-c}{2}$$

أي : $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq \frac{2b}{2} \times \frac{2a}{2} \times \frac{2c}{2}$

وبالتالي : $(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) \leq abc$