مديرية التربية لولاية سطيف	التصحيح النموذجي للوظيفة المنزلية رقم 01 في مادة الرياضيات	وزارة التربية الوطنية
المستوى: 2ع.ت		ثانوية مولود قاسم نايت بلقاسم مزلوق
تعاد يوم: 2022/10/24		سلمت يوم: 2022/10/17

تمرين 01 (04 نقاط) ☆☆☆ **(60 دقيقة)**

1 عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة مما يلي :

(ا) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{7}$ (ب) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ (ج) $f(x)=\sqrt{-2x-6}$ (د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}}{|x|-3}$

الجواب :

(ا) $D_f=\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{x^2-3}{7}$

(ب) $D_f=\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$

(ج) $D_f=]-\infty;-3]$; $f(x)=\sqrt{-2x-6}$

(د) $D_f=\mathbb{R}-\{-3;3;[-1;0]\}$; $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}}{|x|-3}$

2 اذكر ما إذا كانت الدالتان f و g متساويتين في كل حالة مما يلي :

(ا) $g(x)=2x+1$; $f(x)=\dfrac{(2x+1)(x+1)}{x+1}$

(ب) $g(x)=1+\dfrac{2}{x-3}$; $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$

(ج) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

(د) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$

الجواب :

(ا) $D_g=\mathbb{R}$; $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$; $f(x)=\dfrac{(2x+1)(x+1)}{x+1}=2x+1=g(x)$

بما أن : $D_f\neq D_g$ فإن الدالتين f و g غير متساويتين.

(ب) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)^2}=\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{x-3+2}{x-3}=\dfrac{x-3}{x-3}+\dfrac{2}{x-3}=1+\dfrac{2}{x-3}=g(x)$

بما أن : $D_f=D_g=\mathbb{R}-\{3\}$ و $f(x)=g(x)$ فإن الدالتين f و g متساويتان.

(ج) $D_g=[1;+\infty[$; $D_f=]-\infty;-2[\cup[1;+\infty[$; $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}=g(x)$

بما أن : $D_f\neq D_g$ فإن الدالتين f و g غير متساويتين.

(د) $D_g=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$; $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; $D_f=[-1;0[\cup[1;+\infty[$; $f(x)=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$

بما أن : $D_f\neq D_g$ فإن الدالتين f و g غير متساويتين.

3 f و g دالتان معرفتان كما يلي : $g(x)=x^2+3x+2$; $f(x)=\sqrt{4-x}$

عين مجموعة تعريف ثم حدد عبارة كل من الدوال التالية : f ; g ; $f+2$; $f+g$; $3g$; $-4f$; $f\times g$; $\dfrac{f}{g}$

الجواب : $D_g=\mathbb{R}$; $g(x)=x^2+3x+2$; $D_f=]-\infty;4]$; $f(x)=\sqrt{4-x}$

$D_{3g}=D_g$; $(3g)(x)=3g(x)=3x^2+9x+6$; $D_{f+2}=D_f$; $(f+2)(x)=f(x)+2=\sqrt{4-x}+2$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+x^2+3x+2 \quad ; \quad D_{f+g}=D_f\cap D_g=D_f$$

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(x^2+3x+2)\sqrt{4-x} \quad ; \quad D_{f\times g}=D_f\cap D_g=D_f$$

$$(-4f)(x)=-4f(x)=-4\sqrt{4-x} \quad ; \quad D_{-4f}=D_f \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{x^2+3x+2}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f\cap D_g)\wedge(g(x)\neq 0)\}= \ x \quad \mathbb{R}:(x \quad 4) \ \ x \ / \quad 2;-1\}\}=]-\infty;-2[\cup]-2;-1[\cup]-1;4]$$

تمرين 02 (06 نقطة) ☆☆☆☆ (90 دقيقة)

1 عين مجموعة تعريف ثم عبارة كل من : $f\circ g\ ;\ g\circ f\ ;\ f\circ f\ ;\ g\circ g$ في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) $g(x)=-3x\quad ;\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$

(ب) $g(x)=\sqrt{x+3}\quad ;\quad f(x)=x^2-3$

(ج) $g(x)=\sqrt{x-3}\quad ;\quad f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$

(د) $g(x)=\dfrac{1}{x}\quad ;\quad f(x)=\sqrt{x}$

الجواب :

(أ)

$$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_g)\wedge(g(x)\in D_f)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in\mathbb{R})\wedge(-3x\in\mathbb{R})\}=\mathbb{R}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{2g(x)+1}{(g(x))^2+1}=\frac{2(-3x)+1}{(-3x)^2+1}=\frac{1-6x}{9x^2+1}$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f)\wedge(f(x)\in D_g)\}=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\in\mathbb{R})\wedge\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\in\mathbb{R}\right)\right\}=\mathbb{R}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-3f(x)=-3\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)=\frac{-6x-3}{x^2+1}$$

$$D_{f\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f)\wedge(f(x)\in D_f)\}=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\in\mathbb{R})\wedge\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\in\mathbb{R}\right)\right\}=\mathbb{R}$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2f(x)+1}{(f(x))^2+1}=\frac{2\left(\dfrac{2x+1}{x^2+1}\right)+1}{\left(\dfrac{2x+1}{x^2+1}\right)^2+1}=\frac{x^4+4x^3+4x^2+4x+3}{x^4+6x^2+4x+2}$$

$$D_{g\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_g)\wedge(g(x)\in D_g)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in\mathbb{R})\wedge(-3x\in\mathbb{R})\}=\mathbb{R}$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=-3g(x)=-3(-3x)=9x$$

(ب)

$$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_g)\wedge(g(x)\in D_f)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\geq-3)\wedge(\sqrt{x+3}\in\mathbb{R})\}=[-3;+\infty[$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(g(x))^2-3=\left(\sqrt{x+3}\right)^2-3=x$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f)\wedge(f(x)\in D_g)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in\mathbb{R})\wedge(x^2-3\geq-3)\}=\{x\in\mathbb{R}:x^2\geq0\}=\mathbb{R}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+3}=\sqrt{x^2-3+3}=\sqrt{x^2}=|x|$$

$$D_{f\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f)\wedge(f(x)\in D_f)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in\mathbb{R})\wedge(x^2-3\in\mathbb{R})\}=\mathbb{R}$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=(f(x))^2-3=\left(x^2-3\right)^2-3=x^4-6x^2+6$$

$$D_{g\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_g)\wedge(g(x)\in D_g)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\geq-3)\wedge(\sqrt{x+3}\geq-3)\}=[-3;+\infty[$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=\sqrt{\sqrt{x+3}+3}$$

(ج)

$$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_g)\wedge(g(x)\in D_f)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\geq3)\wedge(\sqrt{x-3}\neq1)\}$$

$$D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\geq3)\wedge(x\neq4)\}=[3;4[\cup]4;+\infty[$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{3g(x)-2}{g(x)-1}=\frac{3\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x-3}-1}$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f)\wedge(f(x)\in D_g)\}=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\neq1)\wedge\left(\frac{3x-2}{x-1}\geq3\right)\right\}=]1;+\infty[$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)-3}=\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}-3}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$D_{f\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f)\wedge(f(x)\in D_f)\}=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\neq1)\wedge\left(\frac{3x-2}{x-1}\neq1\right)\right\}$$

$$D_{f\circ f}=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\neq1)\wedge\left(x\neq\frac{1}{2}\right)\right\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2};1\right\}$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{3f(x)-2}{f(x)-1}=\frac{3\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)-2}{\dfrac{3x-2}{x-1}-1}=\frac{7x-4}{2x-1}$$

$$D_{g\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_g)\wedge(g(x)\in D_g)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\geq3)\wedge(\sqrt{x-3}\geq3)\}=[3;+\infty[$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=\sqrt{g(x)-3}=\sqrt{\sqrt{x-3}-3}$$

(د) $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_g)\wedge(g(x)\in D_f)\}=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\neq0)\wedge\left(\frac{1}{x}\geq0\right)\right\}=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}=]0;+\infty[$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f)\wedge(f(x)\in D_g)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\geq0)\wedge(\sqrt{x}\neq0)\}=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}=]0;+\infty[$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$D_{f\circ f}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_f)\wedge(f(x)\in D_f)\}=\{x\in\mathbb{R}:(x\geq0)\wedge(\sqrt{x}\geq0)\}=[0;+\infty[$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\sqrt{\sqrt{x}}$$

$$D_{g\circ g}=\{x\in\mathbb{R}:(x\in D_g)\wedge(g(x)\in D_g)\}=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\neq0)\wedge\left(\frac{1}{x}\neq0\right)\right\}=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

2 فكك الدالة f المعرفة على المجال I إلى دالتين ثم استنتج اتجاه تغيرها في كل حالة من الحالات التالية :

(ا) $I=]-\infty;-3]$; $f(x)=\sqrt{-2x-6}$

(ب) $I=[-3;+\infty[$; $f(x)=(x+3)^2$

(ج) $I=]2;+\infty[$; $f(x)=\frac{1}{2x-4}$

(د) $I=]-\infty;0[$; $f(x)=\frac{1}{x^2}$

(هـ) $I=[0;+\infty[$; $f(x)=-2\sqrt{x}-6$

(و) $I=]-\infty;0]$; $f(x)=-x^2-3$

(ز) $I=]-\infty;0]$; $f(x)=\frac{2}{x}-4$

(ح) $I=]-\infty;0[$; $f(x)=\frac{5}{x^2+2}-x^2-5$

<u>الجواب :</u>

(ا) $v(x)=\sqrt{x}$; $u(x)=-2x-6$; $f=v\circ u$; $I=]-\infty;-3]$; $f(x)=\sqrt{-2x-6}$

بما أن u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و v متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن f متناقصة تماما على I

(ب) $v(x)=x^2$; $u(x)=x+3$; $f=v\circ u$; $I=[-3;+\infty[$; $f(x)=(x+3)^2$

بما أن u متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و v متزايدة تماما على I فإن f متزايدة تماما على I

(ج) $v(x)=\frac{1}{x}$; $u(x)=2x-4$; $f=v\circ u$; $I=]2;+\infty[$; $f(x)=\frac{1}{2x-4}$

بما أن u متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و v متناقصة تماما على I فإن f متناقصة تماما على I

(د) $v(x)=\frac{1}{x}$; $u(x)=x^2$; $f=v\circ u$; $I=]-\infty;0[$; $f(x)=\frac{1}{x^2}$

بما أن u و v متناقصتان تماما على I فإن f متزايدة تماما على I

(هـ) $v(x)=-2x-6$; $u(x)=\sqrt{x}$; $f=v\circ u$; $I=[0;+\infty[$; $f(x)=-2\sqrt{x}-6$

بما أن u متزايدة تماما على I و v متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإن f متناقصة تماما على I

(و) $v(x)=-x-3$; $u(x)=x^2$; $f=v\circ u$; $I=]-\infty;0]$; $f(x)=-x^2-3$

بما أن u متناقصة تماما على I و v متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ فإن f متزايدة تماما على I

(ز) $v(x)=2x-4$; $u(x)=\frac{1}{x}$; $f=v\circ u$; $I=]-\infty;0]$; $f(x)=\frac{2}{x}-4$

بما أن u متناقصة تماما على I و v متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن f متناقصة تماما على I

(ح) $f=v\circ u$; $I=]-\infty;0[$; $f(x)=\frac{5}{x^2+2}-x^2-5=\frac{5}{x^2+2}-(x^2+2)-3$

حيث : $v(x)=\frac{5}{x}-x-3$; $u(x)=x^2+2$

بما أن u متناقصة تماما على I و v (مجموع دالتين متناقصتين على I) متناقصة تماما على I فإن f متزايدة تماما على I

3 أثبت بثلاث طرق مختلفة في كل حالة من الحالات التالية أن :

– النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f :

ا) $f(x)=\dfrac{2x+5}{2x+1} \quad ; \quad \Omega\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$

ب) $f(x)=(x-1)^3+3 \quad ; \quad \Omega(1;3)$

الجواب :

ا) الطريقة الأولى : $f(x)=\dfrac{2x+5}{2x+1} \quad ; \quad D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \quad ; \quad \Omega\left(-\dfrac{1}{2};1\right)=(x_0;y_0)$

باستعمال دساتير تغيير المعلم نجد : $\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases} x=X-\dfrac{1}{2} \\ y=Y+1 \end{cases}$ و منه :

$y=f(x)=\dfrac{2x+5}{2x+1}$ تكافئ : $Y+1=\dfrac{2\left(X-\dfrac{1}{2}\right)+5}{2\left(X-\dfrac{1}{2}\right)+1}$ تكافئ : $Y=f(X)=\dfrac{2X+4}{2X}-1=\dfrac{2}{X}$

بما أن : $D_f=\mathbb{R}^*$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل $X\in\mathbb{R}^*$: $f(-X)=\dfrac{2}{-X}=-\dfrac{2}{X}=-f(X)$

فإن الدالة f فردية. إذن النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f)

الطريقة الثانية : $f(x)=\dfrac{2x+5}{2x+1} \quad ; \quad D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \quad ; \quad \Omega\left(-\dfrac{1}{2};1\right)=(\alpha;\beta)$

نثبت أنه من أجل $x\in D_f$: $(\alpha-x)\in D_f$ و $(\alpha+x)\in D_f$ و $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$

أي : $-\dfrac{1}{2}-x\neq-\dfrac{1}{2}$ و $-\dfrac{1}{2}+x\neq-\dfrac{1}{2}$ و $f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)=2(1)$

إذن نثبت أنه من أجل $x\neq 0$: $f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)=2$

لدينا : $f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{2\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+5}{2\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+1}+\dfrac{2\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)+5}{2\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)+1}=\dfrac{-2x+4}{-2x}+\dfrac{2x+4}{2x}$

و منه : $f\left(-\dfrac{1}{2}-x\right)+f\left(-\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{2x}{x}=2$

إذن النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f)

الطريقة الثالثة : $f(x)=\dfrac{2x+5}{2x+1} \quad ; \quad D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right) \quad ; \quad \Omega\left(-\dfrac{1}{2};1\right)=(\alpha;\beta)$

نثبت أنه من أجل $x\in D_f$: $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

أي : $2\left(-\dfrac{1}{2}\right)-x\neq-\dfrac{1}{2}$ و $f\left(2\left(-\dfrac{1}{2}\right)-x\right)+f(x)=2(1)$

إذن نثبت أنه من أجل $x\neq-\dfrac{1}{2}$: $f(-1-x)+f(x)=2$

لدينا : $f(-1-x)+f(x)=\dfrac{2(-1-x)+5}{2(-1-x)+1}+\dfrac{2x+5}{2x+1}=\dfrac{-2x+3}{-2x-1}+\dfrac{2x+5}{2x+1}=\dfrac{2x-3}{2x+1}+\dfrac{2x+5}{2x+1}$

و منه : $f(-1-x)+f(x)=\dfrac{4x+2}{2x+1}=\dfrac{2(2x+1)}{2x+1}=2$

إذن النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f)

ب) الطريقة الأولى : $f(x)=(x-1)^3+3 \quad ; \quad \Omega(1;3)=(x_0;y_0)$

باستعمال دساتير تغيير المعلم نجد : $\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+3 \end{cases}$ و منه :

$y=f(x)=(x-1)^3+3$ تكافئ : $Y+3=(X+1-1)^3+3$ تكافئ : $Y=f(X)=X^3$

بما أن : $D_f=\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة للصفر و من أجل $X\in\mathbb{R}$: $f(-X)=(-X)^3=-X^3=-f(X)$

فإن الدالة f فردية. إذن النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f)

الطريقة الثانية : $f(x)=(x-1)^3+3 \quad ; \quad \Omega(1;3)=(\alpha;\beta)$

نثبت أنه من أجل $x\in D_f$: $(\alpha-x)\in D_f$ و $(\alpha+x)\in D_f$ و $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$

أي : $(1-x)\in\mathbb{R}$ و $(1+x)\in\mathbb{R}$ و $f(1-x)+f(1+x)=2(3)$

إذن نثبت أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f(1-x)+f(1+x)=6$

لدينا : $f(1-x)+f(1+x)=(1-x-1)^3+3+(1+x-1)^3+3=-x^3+x^3+6=6$

إذن النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f)

الطريقة الثالثة : $\Omega\left(-\frac{1}{2};1\right)=(\alpha;\beta)$; $f(x)=(x-1)^3+3$

نثبت أنه من أجل $x \in D_f$: $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

أي : $(2-x)\in\mathbb{R}$ و $f(2-x)+f(x)=2(1)$

إذن نثبت أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f(2-x)+f(x)=6$

لدينا : $f(2-x)+f(x)=(2-x-1)^3+3+(x-1)^3+3=(1-x)^3+(1+x)^3+6=-(x-1)^3+(x-1)^3+6=6$

إذن النقطة Ω مركز تناظر لـ (C_f)

– المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f :

(ا) $(\Delta): x=-1$; $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$ (ب) $(\Delta): x=2$; $f(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$

الجواب :

(ا) الطريقة الأولى : $(\Delta): x=-1=x_0$; $D_f=]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$; $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$

باستعمال دساتير تغيير المعلم نجد : $\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y\end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases}x=X-1\\ y=Y\end{cases}$ و منه :

$y=f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$ تكافئ : $Y=\sqrt{|X-1+1|-1}$ تكافئ : $Y=f(X)=\sqrt{|X|-1}$

بما أن : $D_f=]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ متناظر بالنسبة للصفر.

و من أجل $x\in D_f$: $f(-X)=\sqrt{|-X|-1}=\sqrt{|X|-1}=f(X)$

فإن الدالة f زوجية. إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

الطريقة الثانية : $(\Delta): x=-1=\alpha$; $D_f=]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$; $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$

نثبت أنه من أجل $x\in D_f$: $(\alpha-x)\in D_f$ و $(\alpha+x)\in D_f$ و $f(\alpha-x)-f(\alpha+x)=0$

أي : $(-1-x\geq 0)\vee(-1-x\leq -2)$ و $(-1+x\geq 0)\vee(-1+x\leq -2)$ و $f(-1-x)-f(1+x)=0$

إذن نثبت أنه من أجل $x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$: $f(-1-x)-f(-1+x)=0$

لدينا : $f(-1-x)-f(-1+x)=\sqrt{|-1-x+1|-1}-\sqrt{|-1+x+1|-1}=\sqrt{|x|-1}-\sqrt{|x|-1}=0$

إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

الطريقة الثالثة : $(\Delta): x=-1=\alpha$; $D_f=]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$; $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}$

نثبت أنه من أجل $x\in D_f$: $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)-f(x)=0$

أي : $(-2-x\geq 0)\vee(-2-x\leq -2)$ و $f(-2-x)-f(x)=0$

إذن نثبت أنه من أجل $x\in]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$: $f(-2-x)-f(x)=0$

لدينا : $f(-2-x)-f(x)=\sqrt{|-2-x+1|-1}-\sqrt{|x+1|-1}=\sqrt{|x+1|-1}-\sqrt{|x+1|-1}=0$

إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

(ب) الطريقة الأولى : $(\Delta): x=2=x_0$; $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$; $f(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$

باستعمال دساتير تغيير المعلم نجد : $\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y\end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases}x=X+2\\ y=Y\end{cases}$ و منه :

$y=f(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$ تكافئ : $Y=f(X)=\dfrac{(X+2)^2-4(X+2)+2}{(X+2-2)^2}=\dfrac{X^2-2}{X^2}=1-\dfrac{2}{X^2}$

بما أن : $D_f=\mathbb{R}^*$ متناظر بالنسبة للصفر.

و من أجل $X\in D_f$: $f(-X)=1-\dfrac{2}{{}^2}=1-\dfrac{2}{X^2}=f(X)$

فإن الدالة f زوجية، إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

<u>الطريقة الثانية :</u> $(\Delta): x = 2 = \alpha \quad ; \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad ; \quad f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}$

نثبت أنه من أجل $x \in D_f$: $(\alpha - x) \in D_f$ و $(\alpha + x) \in D_f$ و $f(\alpha - x) - f(\alpha + x) = 0$

أي : $2 - x \neq 2$ و $2 + x \neq 2$ و $f(2-x) - f(2+x) = 0$

إذن نثبت أنه من أجل $x \in \mathbb{R}^*$: $f(2-x) - f(2+x) = 0$

لدينا : $$f(2-x) - f(2+x) = \frac{(2-x)^2 - 4(2-x) + 2}{(2-x-2)^2} - \frac{(2+x)^2 - 4(2+x) + 2}{(2+x-2)^2} = \frac{x^2 - 2 - (x^2 - 2)}{x^2} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

<u>الطريقة الثالثة :</u> $(\Delta): x = 2 = \alpha \quad ; \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\} \quad ; \quad f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2}$

نثبت أنه من أجل $x \in D_f$: $(2\alpha - x) \in D_f$ و $f(2\alpha - x) - f(x) = 0$

أي : $(4 - x) \neq 2$ و $f(4-x) - f(x) = 0$

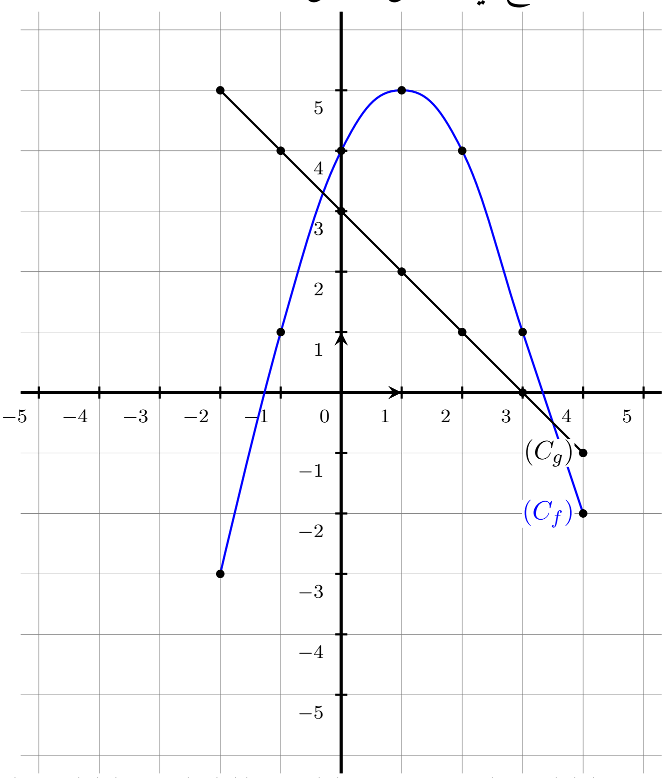
إذن نثبت أنه من أجل $x \neq 2$: $f(4-x) - f(x) = 0$

لدينا : $$f(4-x) - f(x) = \frac{(4-x)^2 - 4(4-x) + 2}{(4-x-2)^2} - \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 2 - (x^2 - 4x + 2)}{(x-2)^2} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) محور تناظر لـ (C_f) التمثيل البياني للدالة f على D_f

تمـريـن 03 (03 نقاط) ☆☆ (20 دقيقة)

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على المجال $[-2;4]$ كما هو موضح في الشكل المقابل. بقراءة بيانية :



1 عين $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$; $f(3)$; $g(0)$; $g(1)$; $g(3)$

<u>الجواب :</u>

$$f(-1) = f(3) = 1 \quad ; \quad f(1) = 5 \quad ; \quad f(0) = 4$$
$$g(3) = 0 \quad ; \quad g(1) = 2 \quad ; \quad g(0) = 3$$

2 احسب الأعداد :

(أ) $(f+g)(3)$; $(f \times g)(0)$; $(-2f+g)(0)$; $(f \circ g)(0)$

$(g \circ g)(1)$; $(g \circ f)(3)$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)(1)$; $(-5g+2f)(1)$

<u>الجواب :</u>

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 1 + 0 = 1$$
$$(f \times g)(0) = f(0) \times g(0) = 4 \times 3 = 12$$
$$(-2f+g)(0) = -2f(0) + g(0) = -2(4) + 3 = -5$$
$$(-5g+2f)(1) = -5g(1) + 2f(1) = 0$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{5}{2}$$

$(g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(2) = 1 \quad ; \quad (f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(3) = 1 \quad ; \quad (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = 2$

(ب) $(f \circ g \circ f)(0)$; $(g \circ f \circ g)(3)$; $(g \circ g \circ f)(-1)$

<u>الجواب :</u>

$$(f \circ g \circ f)(0) = (f \circ g)(f(0)) = (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-1) = 1$$
$$(g \circ f \circ g)(3) = (g \circ f)(g(3)) = (g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(4) = -1$$
$$(g \circ g \circ f)(-1) = (g \circ g)(f(-1)) = (g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(2) = 1$$

تمـريـن 04 (07 نقاط) ☆☆☆☆☆ (70 دقيقة)

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-3\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$

(C_f) تمثيلها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$

(ا) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$: $f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

الجواب : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{x+3-4}{x+3}=\dfrac{x+3}{x+3}+\dfrac{-4}{x+3}=1+\dfrac{-4}{x+3}=a+\dfrac{b}{x+3}$

بالمطابقة نجد : $a=1$ و $b=-4$ و منه : $f(x)=1-\dfrac{4}{x+3}$

(ب) حدد اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty;-3[$ و $]-3;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

الجواب:

على المجال $]-\infty;-3[$ ليكن : x_1 و x_1 من المجال $]-\infty;-3[$ حيث : $x_1<x_2<-3$ يكافئ : $x_1+3<x_2+3<0$

يكافئ : $\dfrac{1}{x_2+3}>\dfrac{1}{x_1+3}$ يكافئ : $-\dfrac{4}{x_2+3}<-\dfrac{4}{x_1+3}$ يكافئ : $1-\dfrac{4}{x_2+3}<1-\dfrac{4}{x_1+3}$ يكافئ : $f(x_1)<f(x_2)$

و منه : f متزايدة تماما.

على المجال $]-3;+\infty[$ ليكن : x_1 و x_1 من المجال $]-3;+\infty[$ حيث : $-3<x_1<x_2$ يكافئ : $0<x_1+3<x_2+3$

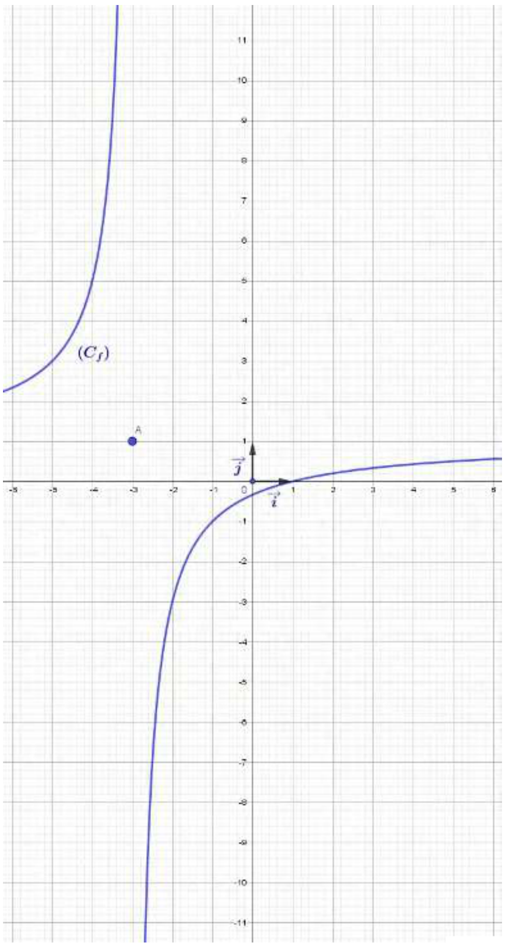
يكافئ : $\dfrac{1}{x_2+3}>\dfrac{1}{x_1+3}$ يكافئ : $-\dfrac{4}{x_2+3}<-\dfrac{4}{x_1+3}$ يكافئ : $1-\dfrac{4}{x_2+3}<1-\dfrac{4}{x_1+3}$ يكافئ : $f(x_1)<f(x_2)$

و منه : f متزايدة تماما.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

(ج) $A(-3;1)$ نقطة من المستوي. اكتب معادلة (C_f) في المعلم $(A;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ ثم أنشئه.

الجواب:



باستعمال دساتير تغيير المعلم نجد :

$\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y+y_0\end{cases}$ يكافئ : $\begin{cases}x=X-3\\ y=Y+1\end{cases}$

و منه : $y=f(x)=1-\dfrac{4}{(x+3)}$

تكافئ : $Y+1=1+\dfrac{-4}{X-3+3}$

تكافئ : $Y=f(X)=-\dfrac{4}{X}$

(د) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$: $\qquad f(-6-x)+f(x)=2 \qquad$ و ماذا تستنتج ؟

الجواب:

$f(-6-x)+f(x)=2$ من الشكل : $\quad f(2\alpha - x)+f(x)=2\beta \quad$ حيث : $(\alpha;\beta)=(-3;1)$

$$f(-6-x)+f(x)=1-\frac{4}{-6-x+3}+1-\frac{4}{x+3}=2-\frac{4}{-x-3}-\frac{4}{x+3}=2+\frac{4}{x+3}-\frac{4}{x+3}=2$$

الاستنتاج : النقطة $A(-3;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

(هـ) حل بطريقتين مختلفتين في $\mathbb{R} - \{-3\}$ المتراجحة : $\quad f(x)>0$

الجواب:

الطريقة الأولى (بيانيا) : $\quad f(x)>0 \quad$ يكافئ $\quad x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

الطريقة الثانية (حسابيا) :

$f(x)>0 \quad$ يكافئ $\quad \dfrac{x-1}{x+3}>0$

و منه : $\quad x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

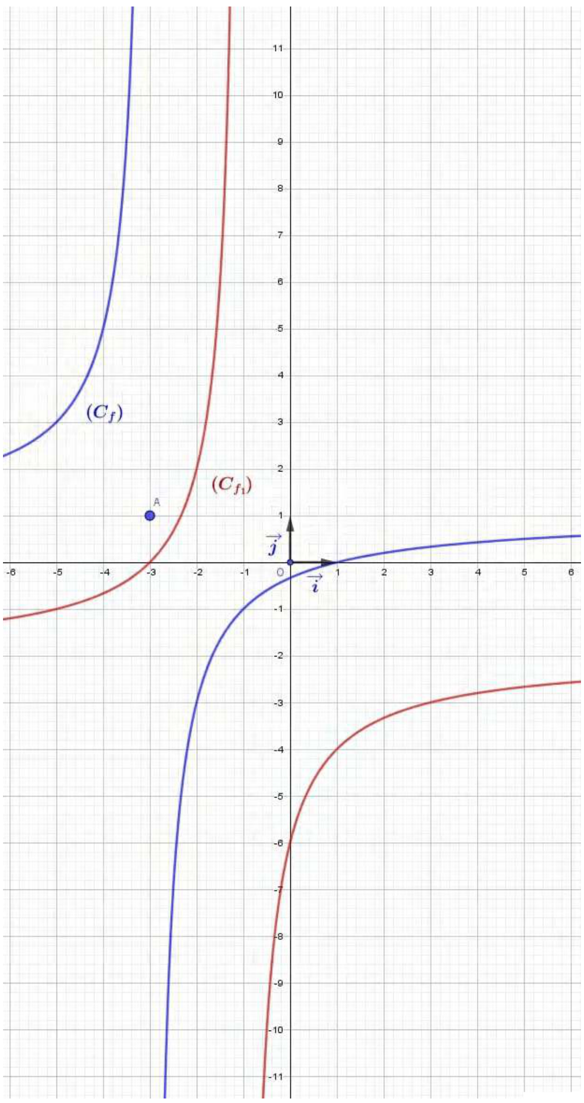
x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
f(x)		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2 نعتبر الدوال f_1 ، f_2 ، f_3 ، f_4 ، f_5 ، f_6 ، f_7 المعرفة كما يلي :

$$f_1(x)=f(x-2)-3 \quad ; \quad f_2(x)=-f(x) \quad ; \quad f_3(x)=f(-x) \quad ; \quad f_4(x)=-f(-x)$$
$$f_5(x)=f(|x|) \quad ; \quad f_6(x)=f(-|x|) \quad ; \quad f_7(x)=|f(x)|$$

(ا) اشرح كيفية إنشاء كل من (C_{f_1}) ; (C_{f_2}) ; (C_{f_3}) ; (C_{f_4}) ; (C_{f_5}) ; (C_{f_6}) ; (C_{f_7}) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئ بشكل منفصل كلا من المنحنيات السابقة.

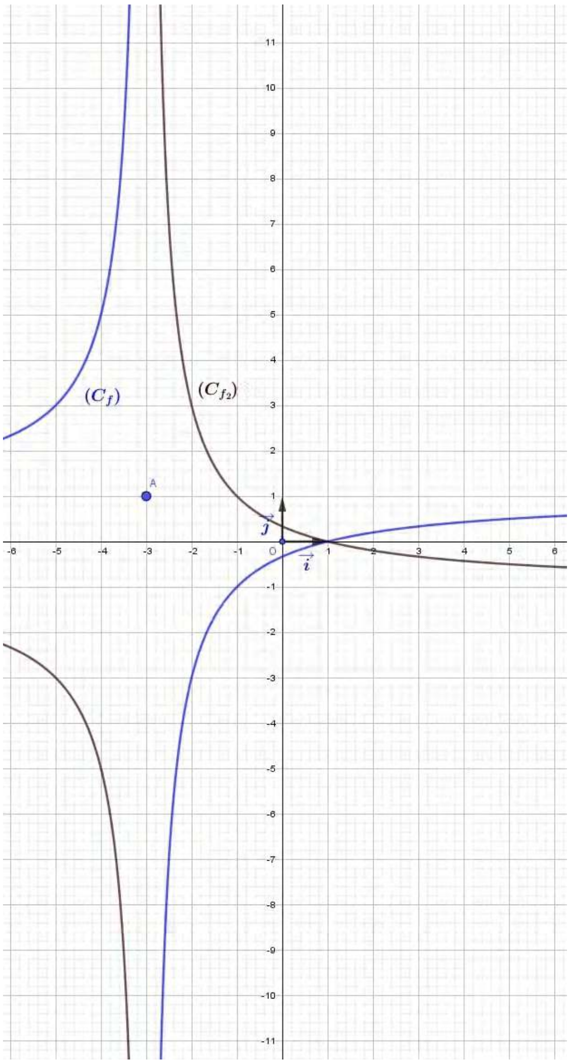
الجواب :



لدينا : $\qquad f_1(x)=f(x-2)-3$

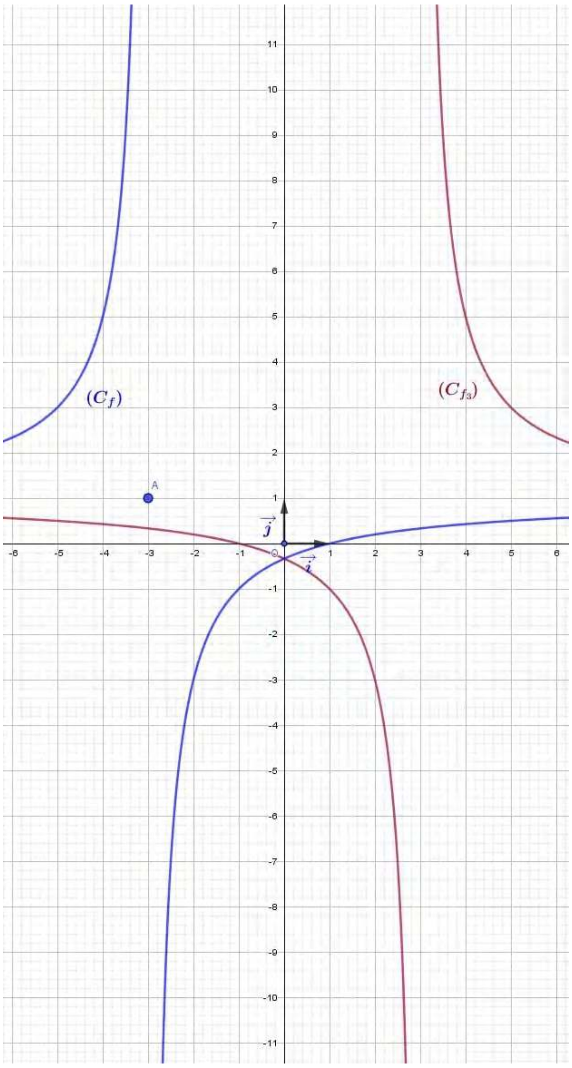
إذن : $\qquad (C_{f_1})$ هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي

شعاعه $\vec{V}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$



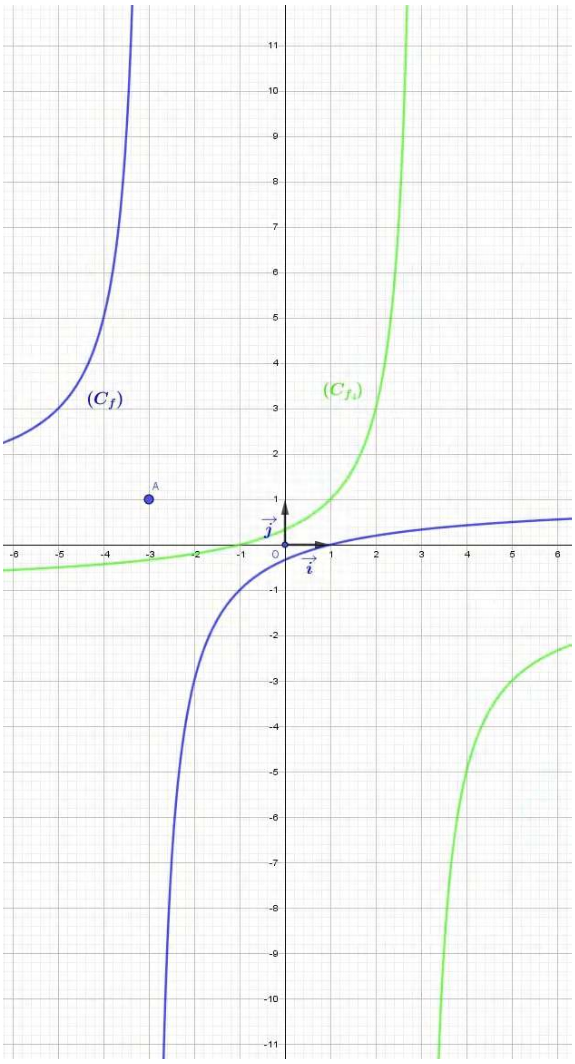
لدينا : $f_2(x) = -f(x)$

إذن : (C_{f_2}) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.



لدينا : $f_3(x) = f(-x)$

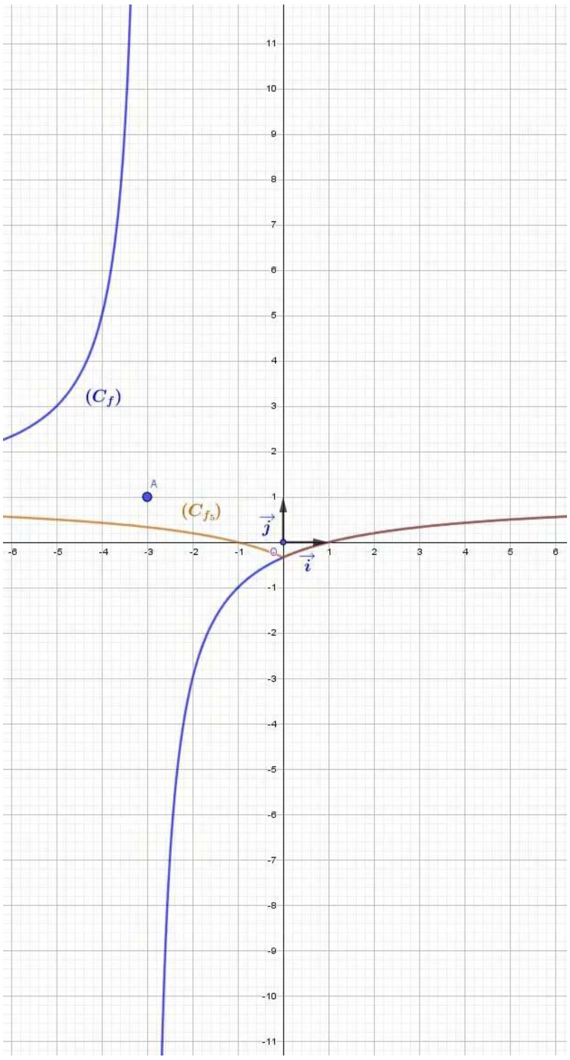
إذن : (C_{f_3}) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.



لدينا : $f_4(x) = -f(-x)$

إذن : (C_{f_4}) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى

مبدأ المعلم $O(0;0)$



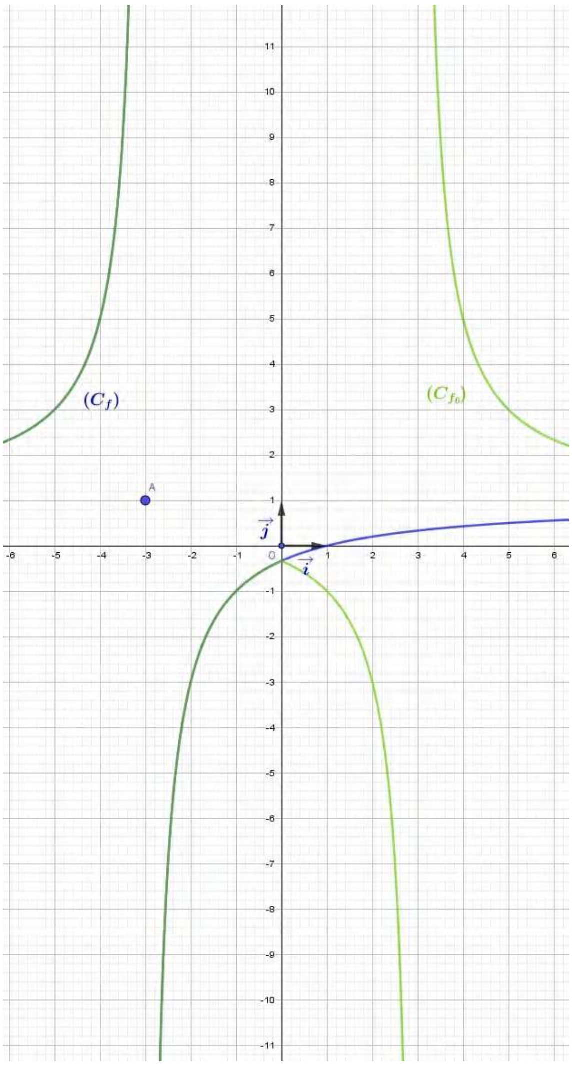
لدينا : $f_5(x) = f(|x|)$

إذن : $f_5(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases}$

<u>من أجل $x \geq 0$:</u> (C_{f_5}) ينطبق على (C_f)

<u>من أجل $x \leq 0$:</u> (C_{f_5}) هو نظير الجزء المنطبق

على (C_f) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.



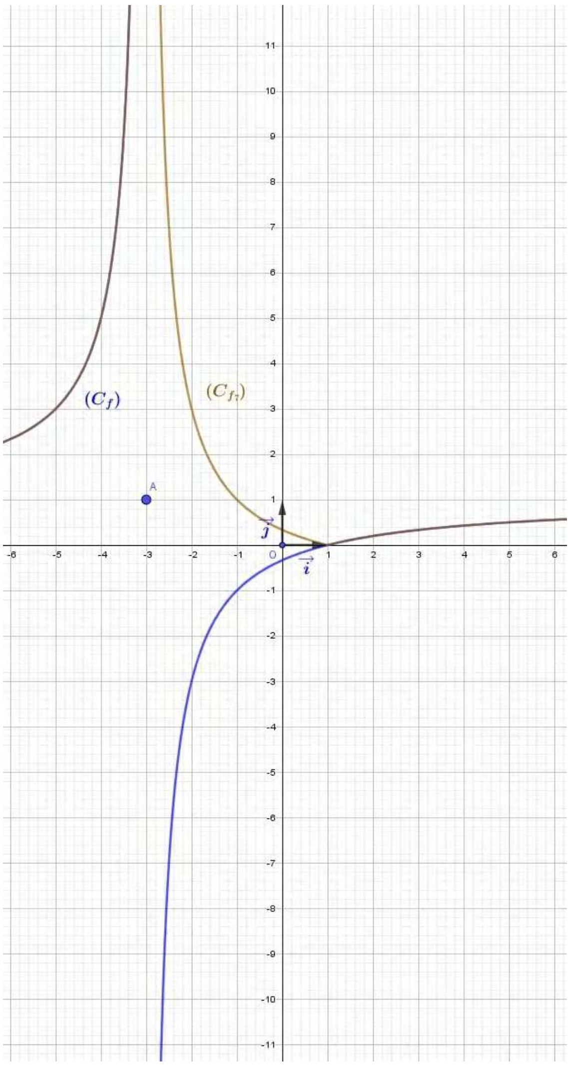
لدينا : $f_6(x) = f(-|x|)$

إذن : $f_6(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \leq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$

<u>من أجل $x \leq 0$:</u> (C_{f_6}) ينطبق على (C_f)

<u>من أجل $x \geq 0$:</u> (C_{f_6}) هو نظير الجزء المنطبق

على (C_f) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.



لدينا : $f_7(x) = |f(x)|$

إذن : $f_7(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad (x < -3) \vee (x \geq 1) \\ -f(x) & ; \quad -3 < x \leq 1 \end{cases}$

<u>من أجل $(x \leq -3) \vee (x \geq 1)$:</u>

(C_{f_7}) ينطبق على (C_f)

<u>من أجل $-3 < x \leq 1$:</u>

(C_{f_7}) هو نظير الجزء المنطبق على (C_f) بالنسبة

إلى حامل محور الفواصل.