تصحيح الواجب المنزلي رقم ①

◄ التمرين 01:

بيّن إن كانت الدالتان f و g متساويتان في كل حالة مما يلي:

① $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \sqrt{(x+2)^2}$

② $f(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$ و $g(x) = x - 1$

◄ التمرين 02:

بين أنّ: $f = g$، حيث f و g دالتين معرفتين كما يلي:

$f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ وَ $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}$

◄ التمرين 03:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[-2;3]$ بـ:

$f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = -x - 2$

وليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① عين اتجاه تغير كل من الدالتين f و g.
ثم أرسم (C_f) و(C_g)

② بقراءة بيانية عيّن نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g)، ثم تحقق من ذلك حسابيا.

③ نعتبر الدوال h_1، h_2، h_3 و h_4 المعرفة على المجال $[-2;3]$ كمايلي:

$$h_1 = f + g$$
$$h_2 = f \times g$$
$$h_3 = -2f$$
$$h_4 = g + 1$$

أ/ عين بدلالة x عبارة كل من:
$h_1(x)$، $h_2(x)$، $h_3(x)$ و$h_4(x)$

ب/ ارسم كل من (C_{h_3}) و (C_{h_4}) التمثيلين البيانيين للدالتين h_3 و h_4 في المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

④ نعتبر الدالة k المعرفة كما يلي:

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

أ/ عيّن D_k مجموعة تعريف الدالة k.

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D_k:

$$k(x) = 1 - \frac{3x+3}{x+2}$$

◄ التمرين 04:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1} + 2$، (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

① انطلاقا من التمثيل البياني (C) للدالة "الجذر التربيعي" "$x \longmapsto \sqrt{x}$" ارسم (C_f)

② حدد طريقتين لرسم المنحنى (C_g) ثم ارسمه.

◄ التمرين 05:

عيّن كلا من $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$ وذلك بعد تعيين: D_f، D_g، $D_{f\circ g}$ و$D_{g\circ f}$ في كل حالة ممايلي:

① $f(x) = x^2$ و $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$

② $f(x) = 2x^2 + 3$ و $g(x) = \sqrt{x}$

◄ التمرين 06:

f، g، h و k دوال معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x$$
$$h(x) = x + 1$$
$$g(x) = x^2$$
$$k(x) = x^2 + 1$$

• أثبت ما يلي:

① $k = h \circ g$
② $f \circ k = 2k$
③ $g \circ k = gk + k$
④ $f + k = g \circ h$
⑤ $k \circ h = g + 2h$
⑥ $k \circ k = g^2 + 2k$

◄ التمرين 07:

f دالة معرفة على على المجال $]-\infty;3]$ بـ:

$$f(x) = \sqrt{3-x}$$

① فكك الدالة f إلى مركب دالتين مرجعيتين يطلب تعيينهما.

② استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;3]$.

◀ حل التمرين 01:

① $f(x)=x+2$ و $g(x)=\sqrt{(x+2)^2}$

لدينا: $D_f=\mathbb{R}$، ولدينا: $D_g=\mathbb{R}$ لأنّ ما داخل الجذر دوما موجب

ولدينا:

$$g(x)=\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|=\begin{cases} f(x) & ;x\ge -2\\ -f(x) & ;x<-2\end{cases}$$

بما أنّ $D_f=D_g$ و $f(x)\neq g(x)$ فإنّ $f\neq g$

② $f(x)=\left(\sqrt{x-1}\right)^2$ و $g(x)=x-1$

لدينا: f معرفة لما $(x-1)\ge 0$ ومنه $x\ge 1$

إذن، $D_f=[1;+\infty[$

ولدينا: $D_g=\mathbb{R}$

ولدينا: $f(x)=\left(\sqrt{x-1}\right)^2=x-1=g(x)$

بما أنّ $D_f\neq D_g$ و $f(x)=g(x)$ فإنّ $f\neq g$

◀ حل التمرين 02:

• تبيين أنّ: $f=g$

لدينا: • f معرفة إذا كان $x+1\ge 0$ أي $x\ge -1$

إذن: $D_f=[-1;+\infty[$

• g معرفة إذا كان $\begin{cases}x+1\ge 0\\ \sqrt{x+1}+1\neq 0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}x\ge -1\\ \sqrt{x+1}\neq -1\end{cases}$ إذن: $D_g=[-1;+\infty[$

ولدينا:

$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\times\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x+1-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-1}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}=\sqrt{x+1}-1=f(x)$$

بما أنّ $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$ فإنّ $f=g$

◀ حل التمرين 03:

① تعيين اتجاه تغير كل من الدالتين f و g:.

- تعيين اتجاه تغير الدالة f:

نفرض x_1 و x_2 من المجال $[-2;3]$ حيث: $x_1>x_2$

ومنه: $2x_1>2x_2$ أي $2x_1+1>2x_2+1$

ومنه: $f(x_1)>f(x_2)$

إذن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2;3]$

- تعيين اتجاه تغير الدالة g:

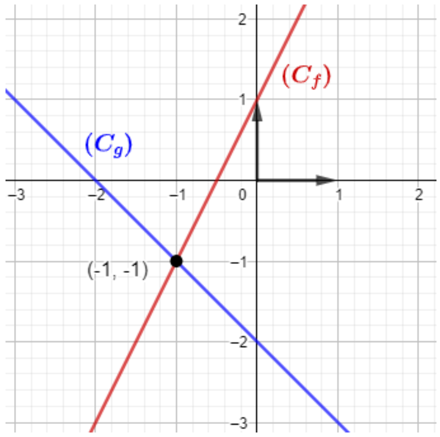
نفرض x_1 و x_2 من المجال $[-2;3]$ حيث: $x_1>x_2$ ومنه:

$-x_1<-x_2$ أي $-x_1-2<-x_2-2$

ومنه: $g(x_1)<g(x_2)$

إذن: الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-2;3]$

- رسم (C_f) و(C_g):



② بقراءة بيانية تعيين نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g):

من البيان نجد أن نقطة تقاطع (C_f) و (C_g) هي النقطة ذات الاحداثيات $(-1;-1)$

- التحقق من ذلك حسابيا:

لدينا: $f(x)=g(x)$ ومنه: $2x+1=-x-2$

أي: $-3x=3$ أي: $x=\frac{3}{-3}$ ومنه $x=-1$

نعوض قيمة x في معادلة f نجد: $y=2(-1)+1$

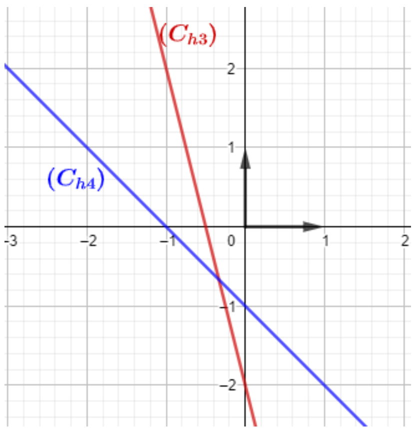
إذن: $y=-1$

③

أ/ تعيين عبارة كل من $h_1(x)$ ، $h_2(x)$ ، $h_3(x)$ و $h_4(x)$:

$$h_1(x)=f+g=2x+1-x-2=\boxed{x-1}$$
$$h_2(x)=f(x)g(x)=(2x+1)(-x-2)$$
$$=-2x^2-4x-x-2=\boxed{-2x^2-5x-2}$$
$$h_3(x)=-2f(x)=-2(2x+1)=\boxed{-4x-2}$$
$$h_4(x)=g(x)+1=-x-2+1=\boxed{-x-1}$$

ب/ رسم كل من (C_{h_3}) و (C_{h_4}) :



④

أ/ تعيين D_k مجموعة تعريف الدالة k:

k معرفة إذا كان $g(x)\neq 0$ أي $-x-2\neq 0$ أي: $-x\neq 2$

أي $x\neq -2$ ، إذن $D_k=\mathbb{R}-\{-2\}$

ب/ التحقق:

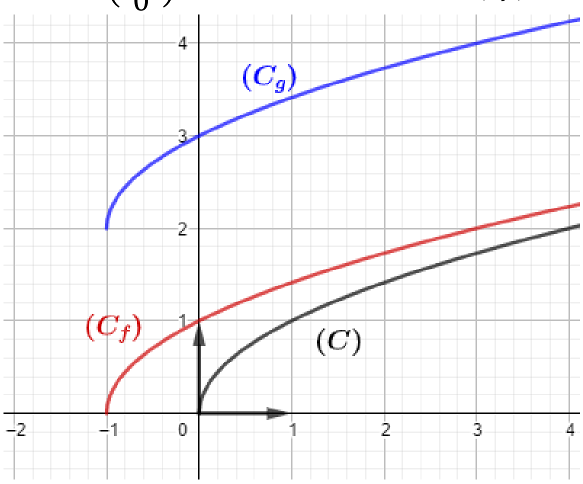
$$k(x)=1-\frac{3x+3}{x+2}=\frac{1(x+2)-(3x+3)}{x+2}$$

$$= \frac{x+2-3x-3}{x+2} = \frac{-2x-1}{x+2} = \frac{2x+1}{-x-2} = \boxed{\frac{f(x)}{g(x)}}$$

◄ حل التمرين 04:

① رسم (C_f):

نلاحظ أنّ (C_f) هو انسحاب لـ (C) بشعاع $\binom{-1}{0}$



① تحديد طريقتين لرسم المنحنى (C_g) ورسمه:

ط1: نلاحظ أنّ (C_g) هو انسحاب لـ (C) بشعاع $\binom{-1}{+2}$

ط2: نلاحظ أنّ (C_g) هو انسحاب لـ (C_f) بشعاع $\binom{0}{2}$

◄ حل التمرين 05:

① $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x-4}$:

لدينا: $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ ، ولدينا: g معرفة لما $x - 4 \neq 0$ أي $x \neq 4$

إذن: $\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{4\}}$

- تعريف $f \circ g$:

$$D_{f\circ g} = \left\{x\,;x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\right\}$$
$$= \left\{x\,;(x \in \mathbb{R} - \{4\}) \text{ و } \left(\left(\frac{1}{x-4}\right) \in \mathbb{R}\right)\right\}$$
$$= \left\{x\,;(x \in x \in \mathbb{R} - \{4\}) \text{ و } (x - 4 \neq 0)\right\}$$
$$= \left\{x\,;(x \in \mathbb{R} - \{4\}) \text{ و } (x \in \mathbb{R} - \{4\})\right\} = \boxed{\mathbb{R} - \{4\}}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x-4}\right) = \left(\frac{1}{x-4}\right)^2$$
$$= \boxed{\frac{1}{(x-4)^2}}$$

- تعريف $g \circ f$:

$$D_{g\circ f} = \left\{x\,;x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\right\}$$
$$= \left\{x\,;x \in \mathbb{R} \text{ و } x^2 \in \mathbb{R} - \{4\}\right\}$$
$$= \left\{x\,;x \in \mathbb{R} \text{ و } \left(x^2 > 4 \text{ أو } x^2 < 4\right)\right\}$$
$$= \left\{x\,;x \in \mathbb{R} \text{ و } \left(|x| > 2 \text{ أو } |x| < 2\right)\right\}$$
$$= \left\{x\,;x \in \mathbb{R} \text{ و } \left((x > 2 \text{ أو } x < -2) \text{ أو } (-2 < x < 2)\right)\right\}$$
$$= \left\{x\,;x \in \mathbb{R} \text{ و } \left(x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[\text{ أو } x \in]-2;2[\right)\right\}$$

$$= \boxed{]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \boxed{\frac{1}{x^2-4}}$$

② $f(x) = 2x^2 + 3$ و $g(x) = \sqrt{x}$

لدينا: $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ ، ولدينا: g معرفة لما $x \geq 0$ إذن: $\boxed{D_g = \mathbb{R}_+}$

- تعريف $f \circ g$:

$$D_{f\circ g} = \left\{x\,;x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\right\} = \left\{x\,;x \in \mathbb{R}_+ \text{ و } \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \left\{x\,;x \in \mathbb{R}_+ \text{ و } x \in \mathbb{R}_+\right\} = \boxed{\mathbb{R}_+}$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = 2(\sqrt{x})^2 + 3$$
$$= 2|x| + 3 = \boxed{2x + 3}$$

- تعريف $g \circ f$:

$$D_{g\circ f} = \left\{x\,;x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\right\}$$
$$= \left\{x\,;x \in \mathbb{R} \text{ و } (2x^2 + 3) \in \mathbb{R}_+\right\}$$
$$= \left\{x\,;x \in \mathbb{R} \text{ و } (2x^2 + 3) \in \mathbb{R}\right\} = \boxed{\mathbb{R}}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x^2 + 3) = \boxed{\sqrt{2x^2 + 3}}$$

◄ حل التمرين 06:

①

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = x^2 + 1 = k(x)$$

②

$$(g \circ h)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$
$$= 2x + x^2 + 1 = (f + k)(x)$$

③

$$(f \circ k)(x) = 2(x^2 + 1) = 2k(x)$$

④

$$(k \circ h)(x) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 + 1$$
$$= x^2 + 2(x+1) = (g + 2h)(x)$$

⑤

$$(g \circ k)(x) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 1 + 2x^2$$
$$= x^2(x^2 + 1) + x^2 + 1$$
$$= (gk)(x) + k(x)$$

⑥

$$g^2(x) + 2k(x) = x^4 + 2x^2 + 2$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1$$
$$= (k \circ k)(x)$$

◄ حل التمرين 07:

① تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين:

$f(x) = (u \circ v)(x)$ حيث: $\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} \\ v(x) = 3 - x \end{cases}$

② استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;3]$:

لدينا الدالة u متزايدة تماما على مجال تعريفها

ولدينا الدالة v متناقصة تماما على $]-\infty;0[$