الواجب المنزلي رقم ④
[محور الاحتمالات]

التمرين الأول

الجدول الآتي يعرف قانون احتمال متغير عشوائي X:

x_i	-1	α	1	2
$P(X=x_i)$	0.25	0.4	β	0.24

- عيّن قيمة α و β حتى يكون التباين لـ X مساويا لـ1.2044

التمرين الثاني:

يحتوي كيس على 6 كريات لا نفرق بينهما عند اللمس مرقمة من 1 إلى 6، نسحب كريتان من هذا الكيس في آن واحد، ونعتبر اللعبة التالية: يدفع اللاعب 10 دينار ويحصل على ربح m لكل رقم فردي ويخسر 5 دينار لكل رقم زوجي.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق لكل سحب مجموع المبلغ المتحصل عليه.

I)

❶ مثّل هاته التجربة في جدول

❷ عين بدلالة m قيم المتغير X ثم عيّن قانون احتماله

❸ احسب الامل الرياضياتي بدلالة m

❹ ما هي مجموعة قيم m حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب؟

II) نفرض أنّ $m=20$:

❶ احسب الانحراف المعياري للمتغير X

❷ احسب احتمال الحادثة $X>10$

التمرين الثالث

يحتوي كيس على n كرة، منها 5 كرات حمراء (Red) و3 كرات خضراء $(Green)$ و الباقي بيضاء $(White)$، حيث $n>8$، نسحب منه عشوائيا كريتين على التوالي وبدون ارجاع.

❶ ما احتمال الحصول على كريتين بيضاوين

❷ نرمز لـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون، اثبت أنّ:

$$P(n)=\frac{n^2-17n+98}{n^2-n}$$

ثانوية: المجاهد صديقي نوري
المستوى: 2 ثانوي – شعبة رياضيات
سلم يوم: 6 جانفي 2022

تصحيح مقترح للواجب المنزلي رقم ④ [محور الاحتمالات]

الموسم الدراسي: 2021 / 2022
الأستاذ: قويسم براهيم الخليل
أعيد يوم: 13 جانفي 2022

التمرين الأول

• تعيين قيمة α و β حتى يكون التباين لـ X مساويا لـ1.2044:

لدينا:
$$\sum_{i=1}^{4} P_i = 1 \Longrightarrow 0.25 + 0.4 + \beta + 0.24 = 1 \Longrightarrow \boxed{\beta = 0.11}$$

ولدينا:
$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = -1 \times 0.25 + \alpha \times 0.4 + 1 \times \underbrace{0.11}_{\beta} + 2 \times 0.24 = \boxed{0.34 + 0.4\alpha}$$

$$V(X) = 1.2044 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P_i - \left(E(X)\right)^2 = 1.2044$$
$$\Longrightarrow (-1)^2 0.25 + \alpha^2 0.4 + (1)^2 0.11 + (2)^2 0.24 - (0.34 + 0.4\alpha)^2 = 1.2044$$
$$\Longrightarrow \alpha^2 0.4 + 1.32 - (0.1156 + 0.16 \times \alpha^2 + 0.272\alpha) = 1.2044$$
$$\Longrightarrow 0.24 \times \alpha^2 - 0.272 \times \alpha + 1.2044 = 1.2044$$
$$\Longrightarrow 0.24 \times \alpha^2 - 0.272 \times \alpha = 0$$
$$\Longrightarrow \alpha(0.24\alpha - 0.272) = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{أو} \\ 0.24\alpha - 0.272 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{أو} \\ \alpha = \dfrac{17}{15} \end{cases}$$

إذن: $\alpha = \left\{0; \frac{17}{15}\right\}$

التمرين الثاني:

I)

❶ تمثيل هاته التجربة في جدول:

	1	2	3	4	5	6
1	/	$(2;1)$	$(3;1)$	$(4;1)$	$(5;1)$	$(6;1)$
2	/	/	$(3;2)$	$(4;2)$	$(5;2)$	$(6;2)$
3	/	/	/	$(4;3)$	$(5;3)$	$(6;3)$
4	/	/	/	/	$(5;4)$	$(6;4)$
5	/	/	/	/	/	$(6;5)$
6	/	/	/	/	/	/

❷ تعيين بدلالة m قيم المتغير X وتعييّن قانون احتماله:

$$X(\Omega) = \{2m - 10; -20; m - 15\}$$

x_i	$2m - 10$	-20	$m - 15$
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{9}{15}$

❸ حساب الامل الرياضياتي بدلالة m:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = \frac{(2m - 10)3}{15} + \frac{(-20)3}{15} + \frac{(m - 15)9}{15} = \frac{6m - 30 - 60 + 9m - 135}{15} = \boxed{m - 15}$$

❹ تعيين مجموعة قيم m حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب:

تكون اللعبة في صالح اللاعب لما $E(X) > 0$، وعليه:

$$E(X) > 0 \Longrightarrow m - 15 > 0 \Longrightarrow \boxed{m > 15}$$

II) نفرض أنّ $m = 20$:

❶ حساب الانحراف المعياري للمتغير X:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} (x_i)^2 P_i - \left(E(X)\right)^2$$
$$= \frac{(30)^2 \times 3}{15} + \frac{(-20)^2 \times 3}{15} + \frac{(5)^2 \times 9}{15} - (5)^2 = \boxed{250}$$

ومنه:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10} \approx \boxed{15.81}$$

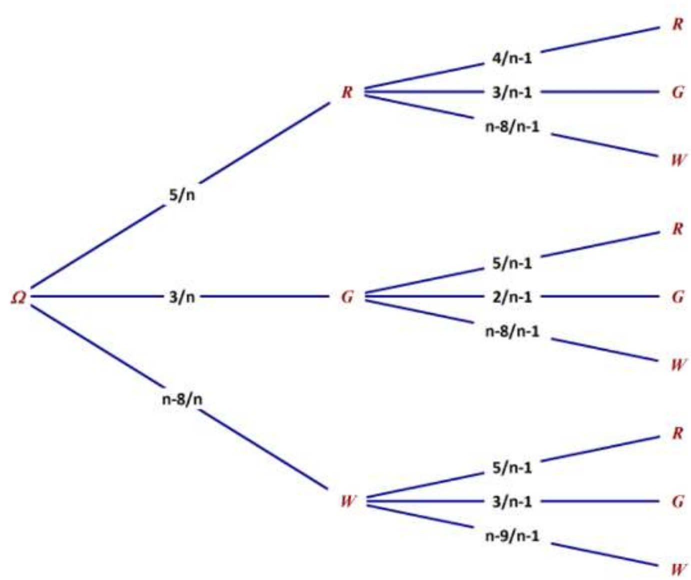
❷ حساب احتمال الحادثة $X > 10$:

$$P(X > 10) = P(X = 30) = \boxed{\frac{3}{15}}$$

التمرين الثالث

❶ حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين:

نستعين بالشجرة أو بجدول:



$$P(WW) = \frac{n-8}{n}\frac{n-9}{n-1} = \boxed{\frac{(n-8)(n-9)}{n^2-n}}$$

❷ اثبات أنّ: $P(n) = \frac{n^2-17n+98}{n^2-n}$:

$$P(n) = P(RR) + P(GG) + P(WW) = \frac{5}{n}\frac{4}{n-1} + \frac{3}{n}\frac{2}{n-1} + \frac{n-8}{n}\frac{n-9}{n-1} = \frac{20+6+n^2+17n+72}{n^2-n}$$
$$= \boxed{\frac{n^2+17n+98}{n^2-n}}$$

#الخليل_للرياضيات