الواجب المنزلي رقم ②

التمرين 01:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 2x$، و(C_f) منحناها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $[1;+\infty[$ و $]-\infty;1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بالاستعانة بمنحنى الدالة مربع، ارسم (C_f).
3. أنشئ في نفس المعلم السابق منحنى الدالة g حيث:
$$g(x) = |f(x)|$$
4. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي حلول المعادلتين (E) و(F) حيث:
$$f(x) = m \dots (E) \quad \text{و} \quad g(x) = m \dots (F)$$

التمرين 02:

ليكن P كثير الحدود حيث: $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18$

1. بيّن أنّ $\frac{3}{2}$ جذر لـ P
2. أوجد الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل $x \in \mathbb{R}$
$$P(x) = (2x-3)(ax^2 + bx + c)$$
3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.
4. ادرس إشارة $P(x)$، ثم استنتج إشارة: $P\left(\frac{2022}{2021}\right)$
5. عيّن حلول المتراجحة:
$$2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$$

التمرين 03:

نعتبر كثير الحدود P_m حيث:
$$f_m(x) = (2m-1)x^3 + (5m-5)x^2 + (4m-8)x + m - 4$$

1. بيّن أنّ P_m يقبل القسمة على $x+1$ مهما كانت قيمة m.
2. أوجد كثير الحدود Q_m الذي يحقق: $P_m(x) = (x+1)Q_m$
3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة:
$$\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$$
4. عين قيم m في كل حالة مما يلي:

أ/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول متمايزة.

ب/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.

ج/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول سالبة.

◄ حل التمرين 01: [7 نقطة]

❶ دراسة اتجاه تغير الدالة f:

$$f(x)=x^2-2x=\left(x+\frac{-2}{2}\right)^2-\frac{2^2}{4(1)}=(x-1)^2-1$$

• لما $x\in[1;+\infty[$: نفرض أن $x_1>x_2$

ومنه: $x_1-1<x_2-1$

ومنه: $(x_1-1)^2<(x_2-1)^2$

ومنه: $(x_1-1)^2-1<(x_2-1)^2-1$

ومنه: $f(x_1)<f(x_1)$

إذن الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$

• لما $x\in]-\infty;1]$: نفرض أن $x_1>x_2$

ومنه: $x_1-1<x_2-1$

ومنه: $(x_1-1)^2>(x_2-1)^2$

ومنه: $(x_1-1)^2-1>(x_2-1)^2-1$

ومنه: $f(x_1)>f(x_1)$

إذن الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$

وعليه:

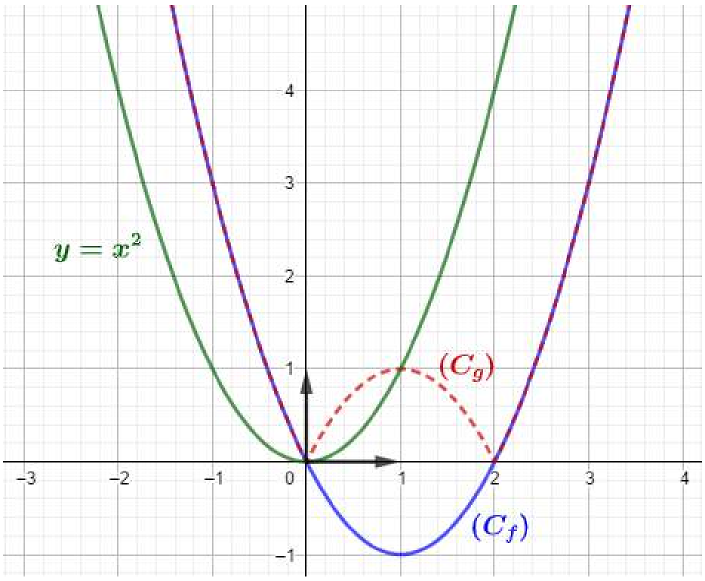
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

❷ رسم (C_f)، بالاستعانة بمنحنى الدالة مربع:

لدينا: $f(x)=(x-1)^2-1$

(C_f) هو صورة منحنى الدالة مربع بشعاع إنسحاب $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

❸ إنشاء منحنى الدالة g حيث: $g(x)=|f(x)|$:



❹ المناقشة البيانية:

◆ المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة (E):

• لما $m<-1$ المعادلة لا تقبل حلول

• لما $m=-1$ المعادلة تقبل حل مضاعف

• لما $m>-1$ المعادلة تقبل حلين

◆ المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة (F):

• لما $m<0$ المعادلة لا تقبل حلول

• لما $m=0$ المعادلة تقبل حلين

• لما $0<m<1$ المعادلة تقبل أربع حلول

• لما $m=1$ المعادلة تقبل حلين وحل مضاعف

• لما $m>1$ المعادلة تقبل حلين

◄ حل التمرين 02: [6.5 نقطة]

❶ تبيين أنّ $\frac{3}{2}$ جذر لـ P:

$$P\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-13\left(\frac{3}{2}\right)^2+27\left(\frac{3}{2}\right)-18=0$$

❷ ايجاد الأعداد الحقيقية a، b و c :

$$P(x)=(2x-3)(ax^2+bx+c)$$
$$\Rightarrow P(x)=2ax^3+2bx^2+2cx-3ax^2-3bx-3c$$
$$\Rightarrow P(x)=2ax^3+(2b-3a)x^2+(2c-3b)x-3c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}2a=2\\2b-3a=-13\\2c-3b=27\\-3c=-18\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=-5\\c=6\end{cases}$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$:

$$P(x)=0\Rightarrow\begin{cases}2x-3=0\\x^2-5x+6=0\end{cases}$$

• لدينا: $2x-3=0$ معناه $x=\frac{3}{2}$

• نحل المعادلة $x^2-5x+6=0$:

لدينا: $\Delta=1$ ومنه: $x=2$ أو $x=3$ إذن: $s=\left\{\frac{3}{2};2;3\right\}$

❹ دراسة إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		3		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- استنتاج إشارة $P\left(\frac{2022}{2021}\right)$:

لدينا: $\frac{3}{2}<\frac{2022}{2021}<2$ إذن $P\left(\frac{2022}{2021}\right)<0$

❺ تعيين حلول المتراجحة: $2x-13<-\frac{27}{x}+\frac{18}{x^2}$:

$$2x-13<-\frac{27}{x}+\frac{18}{x^2}$$
$$\Rightarrow 2x^3-13x^2<-27x+18\Rightarrow P(x)<0$$

إذن: $s=\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[\cup]2;3[$

◄ حل التمرين 03: [6.5 نقطة]

❶ تبيين أنّ P_m يقبل القسمة على $x+1$ مهما كان m:

P_m يقبل القسمة على $x+1$ معناه -1 جذر له:

$P_m(-1) =$

$= -(2m-1)+(5m-5)-(4m-8)+m-4$

$= -2m+1+5m-5-4m+8+m-4$

$= 0$

إذن P_m يقبل القسمة على $x+1$ مهما كانت قيمة m

❷ ايجاد كثير الحدود Q_m :

من القسمة الاقليدية وجدنا أنّ:

$$Q_m(x) = (2m-1)x^2+(3m-4)x+(m-4)$$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

لدينا: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

تكافئ: $\frac{7x^3+15x^2+8x}{x^3-4x-3} \geq 0$

ومنه: $\frac{x(7x^2+15x+8)}{x^3-4x-3} \geq 0$

• نحلل $(7x^2+15x+8)$

لدينا: $\Delta = 1$

ومنه: $x=-1$ أو $x=-\frac{8}{7}$

ومنه: $7x^2+15x+8 = 7(x+1)\left(x+\frac{8}{7}\right)$

إذن: $7x^2+15x+8 = (x+1)(7x+8)$

• نلاحظ أنّ -1 جذر لـ x^3-4x-3

إذن: $x^3-4x-3 = (x+1)(ax^2+bx+c)$

بعد النشر والمطابقة

نجد أنّ: $x^3-4x-3 = (x+1)(x^2-x-3)$

نحلل: (x^2-x-3)

لدينا: $\Delta = 13$ ومنه: $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ أو $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

إذن: $x^3-4x-3 = (x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$

إذن: $\frac{x(7x^2+15x+8)}{x^3-4x-3} \geq 0$

تكافئ:

$$\frac{x(x+1)(7x+8)}{(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)} \geq 0$$

أي: $\frac{x(7x+8)}{\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)} \geq 0$

ومنه جدول الإشارة:

نضع:

$$x(7x+8) \dots (*)$$

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \dots (**)$$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-8}{7}$		0		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$*$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$**$		$+$	‖	$-$		$-$		$-$	‖	$+$	
$\frac{P_4(x)}{P_1(x)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

إذن:

$$s = \left]-\infty;\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left[-\frac{8}{7};0\right] \cup \left]\frac{1+\sqrt{13}}{2};+\infty\right[$$

❹ تعيين قيم m في كل حالة مما يلي:

أ/ المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل 3 حلول متمايزة:

المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل 3 حلول متمايزة

معناه المعادلة $Q(x)=0$ تقبل حلين

أي: $\Delta > 0$

أي: $(3m-4)^2-4(2m-1)(m-4) > 0$

أي: $m^2+12m > 0$ أي: $m(m+12) > 0$

x	$-\infty$		-12		0		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: $s =]-\infty;-12[\cup]0;+\infty[$

ب/ المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا:

المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

معناه المعادلة $Q(x)=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

أي: $\Delta < 0$ إذن: $s =]-12;0[$

ج/ المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل 3 حلول سالبة تماما:

المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل 3 حلول سالبة تماما

معناه المعادلة $Q(x)=0$ تقبل حلين سالبين تماما

أي: $\Delta > 0$ و $\frac{m-4}{2m-1} > 0$ و $\frac{-(3m-4)}{2m-1} < 0$

لدينا: $\Delta > 0$ لما: $m \in]-\infty;-12[\cup]0;+\infty[\dots (1)$

ولدينا: $\frac{m-4}{2m-1} > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$m-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$2m-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{m-4}{2m-1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

لما: $m \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup]4;+\infty[\dots (2)$

ولدينا: $\frac{-(3m-4)}{2m-1} < 0$ أي $\frac{3m-4}{2m-1} > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3m-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$2m-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3m-4}{2m-1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

لما: $m \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{4}{3};+\infty\right[\dots (3)$

تقاطع المجالات (1) و (2) و (3) هو:

$$m \in]-\infty;-12[\cup]4;+\infty[$$