2

الإشتقاقية

الشعب :
- تقني رياضي
- رياضي
- علوم تجريبية

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية 2020 – 2021

✍ للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات   profmerouani   merouaninardjiss@gmail.com

0770349020

مذكرة رقم : 01

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : أحمد رضا حوحو
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 تر/ع
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : الإشتقاقية
المحتوى المعرفي : العدد المشتق

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : حساب العدد المشتق عند عدد حقيقي.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت

الإنطلاق

نشاط مقترح :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2$.

❶ أحسب $f(-1)$.

❷ أحسب $f(-1+h)$ حيث h عدد حقيقي غير معدوم.

❸ أحسب النسبة : $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

20د

* لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(h) = \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$، حدد قيم $g(h)$ حسب قيم h في الجدول التالي :

h	0.4	0.0.3	0.2	0.1	0.01
$g(h)$					

ماذا تلاحظ؟.

البناء و الترسيخ

العدد المشتق :

❶ نهاية حقيقية لدالة عند الصفر :

تعريف

لتكن D جزء من $\mathbb{R}$ و f دالة معرفة على D، الجملة "يؤول $f(x)$ إلى العدد الحقيقي ℓ عندما يؤول x إلى 0 " تعنى أنه يمكن جعل $f(x)$ اصغر من اي عدد حقيقي موجب عندما يكون x قريباً من 0 بقدر كافٍ ونكتب : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \ell}$

10د

❷ دالة قابلة للاشتقاق عند عدد :

تعريف

القول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند x_0 معناه أن الدالة : $g : h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تقبل نهاية حقيقية ℓ عندما يقترب h من 0 و نكتب : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell}$، يسمى ℓ العدد المشتق للدالة f عند العدد x_0 ونرمز له بـ : $f'(x_0)$ و نكتب : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

30د

تطبيق

1 أحسب العدد المشتق للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x^2 + 2$ عند $x_0 = 2$.

2 أحسب العدد المشتق للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 + 2x - 1$ عند $x_0 = -2$

⚠ ملاحظة هـامّة

تسمى النسبة : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ بنسبة التزايد بين العددين x_0 و x_0+h

تطبيق

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 4x - 6$ ، وليكن h عدد حقيقي غير معدوم .

1 عين نسبة تزايد الدالة f بين العددين -1 و $-1+h$.

2 استنتج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند -1 ثم عين $f'(-1)$.

مذكرة رقم : 02

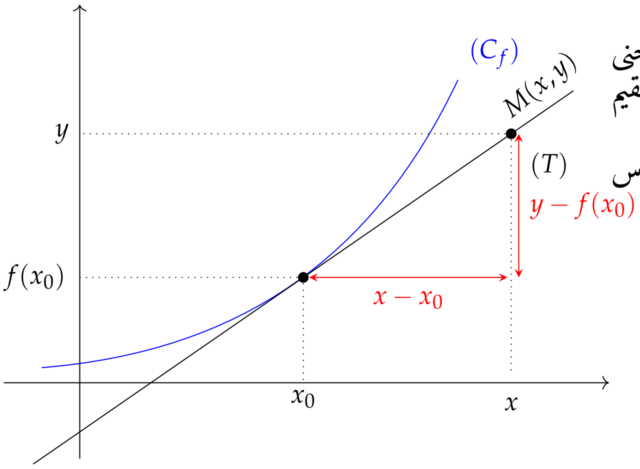
الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم **السنة الدراسية :** 2020 – 2021 **يوم :** **المدة :** 02 ساعة	**المستوى :** 02 تر/ع **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** الإشتقاقية **المحتوى المعرفي:** التفسير الهندسي العدد المشتق.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : تعيين معادلة المماس.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**نشاط مفترح :** f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ ❶ أنشيء (C_f) على المجال $[0;4]$. ❷ (A) نقطة من (C_f) فاصلتها 1 * أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل (A) ومعامل توجيهه هو $f'(1)$. * أنشيء (Δ) ماذا تلاحظ؟ ❸ لتكن الدالة التآلفية g الممثلة بالمستقيم (Δ). * أعط عبارة $g(x)$. * باستعمال آلة حاسبة أعط قيمة تقريبية للعدد $f(1,001)$ إلى 10^{-4} . * أحسب $g(1,001)$ ماذا تستنتج ؟.	20د
البناء و الترسيخ	**التفسير الهندسي العدد المشتق :** ❶ **مماس لمنحنى عند نقطة :**  f قابلة للاشتقاق عند x_0 معناه أن منحنى الدالة f يقبل عند النقطة $(x_0,f(x_0))$ مستقيم يمس منحنى الدالة * العدد المشتق للدالة f عند x_0 هو ميل مماس منحنى الدالة عند x_0. إذن: $\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ و منه : $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ و هي معادلة المماس عند النقطة x_0.	10د

البناء و الترسيخ

تعريف

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$، x_0 عدد من D_f حيث f قابلة للإشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)$ العدد المشتق عند x_0، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ هو المستقيم الذي يشمل A ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلته هي : $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$

تطبيق

1 عين معادلة المماس (T) للدالة f المعرفة بـ: $f(x)=x^2$ عند $x_0=-1$.

2 عين معادلة المماس (T) للدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ عند $x_0=2$.

30د

❷ التقريب التآلفي:

تعريف

$(\mathcal{C}_f)$ هو التمثيل البياني للدالة f القابلة للإشتقاق عند العدد x_0 و $(\mathcal{T})$ مماس $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة $A\left(x_0\,;\,f\left(x_0\right)\right)$، نستبدل محليا عند x_0 الدالة f بالدالة التآلفية g الممثلة بالمستقيم $(\mathcal{T})$ أي نعوض العدد الحقيقي $f(x_0+h)$ بالعدد $f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h$ من أجل h قريب من 0 أي: ($f\left(x_0+h\right)\simeq f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h$ لما h قريب من 0).

العدد الحقيقي $f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h$ يسمى تقريبا تآلفيا للعدد $f(x_0+h)$.

بوضع $x=x_0+h$ ومن أجل x قريب من x_0 فإن : $f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$ يسمى تقريبا تآلفيا لـ: $f(x)$ بجوار x_0.

نقول أن الدالة $x\mapsto f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+f\left(x_0\right)$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة f.

التقويم

تطبيق

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+2x+1$، ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(0;\vec{i};\vec{j})$.

1 عين معادلة $(\mathcal{T})$ مماس المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة A التي فاصلتها 0.

2 عيّن تقريبًا تآلفيًا للدالة f بجوار 0 .

3 عيّن قيمة مقربة للعدد $(1.0004)^2$.

30د

مذكرة رقم : 03

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 ت ر/ع
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : الإشتقاقية
المحتوى المعرفي : مشتقات الدوال المألوفة.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : تعيين مشتقات الدوال المألوفة.
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**نشاط مقترح :** أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f من أجل كل x_0 من D_f في كل حالة من الحالات الآتية: ❶ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax + b$. ❷ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \sqrt{x}$. ❸ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3$. ❹ f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \frac{1}{x}$.	د20
البناء و الترسيخ	**مشتقات الدوال المألوفة:** ❶ **مشتقة دالة تآلفية:** **مبرهنة** كل دالة تآلفية معرفة بـ : $f : x \mapsto ax + b$ حيث a و b عددان حقيقيان، قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $\boxed{f' : x \mapsto a}$ **ملاحظات** ① إذا كان $a = 1$ و $b = 0$ فإن $f : x \mapsto x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f' : x \mapsto 1$ ② إذا كان $a = 0$ و $b = 1$ فإن $f : x \mapsto b$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $f' : x \mapsto 0$ **مثال** ⋆ f دالة معرفة بـ: $f(x) = 3x + 2$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x) = 3$. ⋆ f دالة معرفة بـ: $f(x) = -\frac{3}{2}x$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x) = -\frac{3}{2}$. ❷ **مشتقة دالة قوة:** **مبرهنة** كل دالة معرفة بـ: $f : x \mapsto x^n$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم ، قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f' : x \mapsto nx^{n-1}}$	د20

البناء و الترسيخ

مثال

⋆ f دالة معرفة بـ: $f(x)=x^4$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=4x^3$.

❸ مشتقة دالة مقلوب :

مبرهنة

الدالة : $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f':x\mapsto-\frac{1}{x^2}}$

20 د

❹ مشتقة دالة جذر تربيعي :

مبرهنة

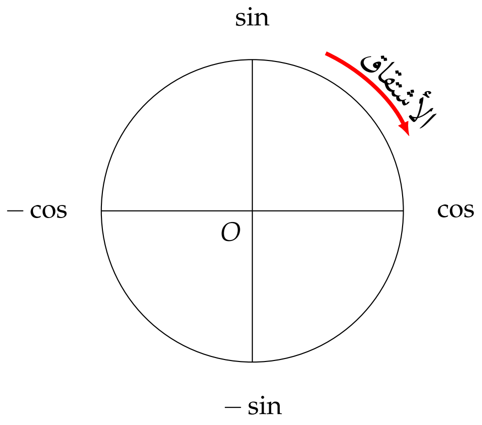
الدالة : $f:x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f':x\mapsto-\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

❺ مشتقة الدالة sin و الدالة cos :

مبرهنة

◁ الدالة : $f:x\mapsto\sin(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :
$\boxed{f:x\mapsto\cos(x)}$

◁ الدالة : $f:x\mapsto\cos(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :
$\boxed{f:x\mapsto-\sin(x)}$



⚠ ملاحظة هــامّة

نلاحظ أن مجموعة اشتقاق كل دالة مرجعية من الدوال التي رأيناها مطابقة لمجموعة تعريفها ما عدا الدالة الجذر تربيعي.

التقويم

تطبيق

f دالة عددية معرفة على المجال $[-\frac{4}{3};+\infty]$ بـ : $f(x)\sqrt{3x+'}\sqrt{4}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 من أجل كل x من D_f و $h\neq0$، بين أن : $\frac{3}{\sqrt{16+3h}+4}=\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$.

2 عين العدد المشتق للدالة f عند $x_0=4$

30د

3 عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=4$

4 عين تقريبا تآلفيا للعدد $f(4+h)$

5 استنتج قيم تقريبية لكل من $f(4,1)$ ، $f(3,9)$ ، $\sqrt{16,3}$

مذكرة رقم : 04

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم **السنة الدراسية :** 2020 – 2021 **يوم :** **المدة :** 02 ساعة	**المستوى :** 02 ت ر/ع **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** الإشتقاقية **المحتوى المعرفي :** العمليات على الدوال المشتقة.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : حساب مشتقات الدوال $f+g$، $f\times g$، $\frac{f}{g}$، $\frac{1}{g}$، $x\mapsto f(ax+b)$.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**تذكير**	5د
البناء و الترسيخ	**العمليات على الدوال المشتقة :** **❶ مشتقة مجموع دالتين :** **مبرهنة** f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$، الدالة $f+g$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\boxed{(f+g)'=f'+g'}$ **مثال** * لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+x$ إذن f ق.إ على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $f'(x)=(x^2)'+(x)'$ أي $f'(x)=2x+1$ **❷ مشتقة جداء دالتين:** **مبرهنة** f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ (D مجال أو اتحاد مجالات من $\mathbb{R}$). الدالة $f\times g$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\boxed{(f\times g)'=fg'+gf'}$ **مثال** ⋆ f دالة معرفة بـ: $f(x)=(x+1)(x^3-x^2)$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي: $f'(x)=(x+1)'(x^3-x^2)+(x^3-x^2)'(x+1)$ $f'(x)=1(x^3-x^2)+(3x^2-2x^1)(x+1)$ $f'(x)=4x^3-6x^2+2x$ **ملاحظة :** ◁ إذا كانت f ق.إ على D و λ عدد حقيقي فإن : $\boxed{(\lambda f)'=\lambda f'}$	20د

البناء
و
الترسيخ

30د

❸ مشتقة نسبة دالتين :

مبرهنة

f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ (D مجال أو اتحاد مجالات من $\mathbb{R}$) و $g \neq 0$ الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}}$

مثال

⋆ f دالة معرفة بـ: $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x+1}$، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ و دالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x+1)'(2x+1) - (2x+1)'(x^2+x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(2x+1) - 2(x^2+2x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(2x+1) - 2(x+1)^2}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)x}{(2x+1)^2}$$

❹ مشتقة مقلوب دالة :

مبرهنة

f دالة قابلة للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ و لا تنعدم عليه الدالة $\frac{1}{f}$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$

❺ مشتقة الدالة الدالة $f : \longmapsto u(ax+b)$:

مبرهنة

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ وَ E مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $(ax+b)$ ينتمي إلى D مع a و b عدان حقيقيان فان الدالة $f : x \to u\,(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f' : x \to au'\,(ax+b)}$ حيث u' مشتقة الدالة u على E.

ملاحظة :

الدالة f هي دالة مركبة من الدالة $k\,(x) = ax+b$ متبوعة بالدالة u بمعنى : $f = u \circ k$

مثال

◁ الدالة $f(x) = \cos(-4x+3)$ هي عبارة عن مركب دالتين g و h بفرض $f(x) = g \circ h$ فإن $g(x) = \cos x$ و $h(x) = -4x+3$ حيث $g'(x) = -\sin x$ و $h'(x) = -4$ و عليه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي: $f'(x) = 4\sin(-4x+3)$

◁ الدالة $f(x) = \sqrt{2x-6}$ هي عبارة عن مركب دالتين g و h بفرض $f(x) = g \circ h$ فإن $g(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = 2x-6$ حيث $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ و $h'(x) = 2$ و عليه f قابلة للاشتقاق على $]3,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-6}} = \frac{1}{\sqrt{2x-6}}$

التقويم

ملاحظة :

⊲ مشتقة الدالة $x \longmapsto \sqrt{f}$ هي $\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

⊲ مشتقة الدالة $x \longmapsto f^n$ هي $n \times f' \times f^{n-1}$

تطبيق

عين الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة

$f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{2}x + \pi\right)$ ، $f(x) = (x^2 + x + 3)^2$ ، $f(x) = 3x \sin\left(-x + \dfrac{\pi}{5}\right)$ ، $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x}$

20د

الأستاذة : نرجس مرواني

مذكرة رقم : 05

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم	**المستوى :** 02 تر/ع
السنة الدراسية : 2020 – 2021	**ميدان التعلم :** تحليل
يوم :	**الوحدة :** الإشتقاقية
المدة : 02 ساعة	**المحتوى المعرفي:** إتجاه تغير دالة على مجال.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : تعيين اتجاه تغير دالة.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الإنطلاق	**نشاط 01 ص 92**	20د
البناء و الترسيخ	**إتجاه تغير دالة :** **مبرهنة** f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة: ⋆ اذا كانت f' موجبة تماما(يمكن ان تكون معدومة من اجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فان الدالة f متزايدة تماما على المجال D_f ⋆ اذا كانت f' سالبة تماما(يمكن ان تكون معدومة من اجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فان الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f ⋆ اذا كانت f' معدومة على المجال D_f فان الدالة f ثابتة على المجال D_f **ملاحظة:** ◁ إذا كانت f متزايدة تماما أو متناقصة تماما على المجال D_f نقول أن f رتيبة تماما على المجال D_f. **مثال** أدرس إتجاه تغير الدالة f حيث $f(x) = x^2 - 2x$. حساب الدالة المشتقة: f ق.إ على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x) = 2x - 2$ دراسة إشارة المشتقة : $f'(x) = 0$ أي $2x - 2 = 0$ أي $x = 1$ $f'(x) : \begin{array}{ccc} - & \bullet & + \\ & 1 & \end{array}$ و عليه الدالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$	20د
التقويم	**تطبيق** أدرس إتجاه تغير كل من الدوال الأتية و شكل جدول تغيراتها : 1 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ 2 $g(x) = \sqrt{2x - 6}$ 3 $h(x) = \frac{x^2 + 4x - 3}{x - 1}$	20د

مذكرة رقم : 06

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم **السنة الدراسية :** 2020 – 2021 **يوم :** **المدة :** 01 ساعة	**المستوى :** 02 تر/ع **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** الإشتقاقية **المحتوى المعرفي :** القيم الحدية المحلية لدالة.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : استعمال العدد المشتق لتعيين القيمة الحدية.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت

الإنطلاق — 20د

نشاط مفترح :

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 + 2x + 3$، و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

❶ أوجد قيمة العدد a التي من أجلها تنعدم الدالة f'، ثم أدرس إشارتها

❷ هل غيرت الدالة f' إشارتها عند القيمةa.

❸ شكل جدول تغيرات الدالة f.

❹ ماذا تمثل النقطة $M(a; f(a))$ بالنسبة للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$، ماذا تستنتج؟

❺ أوجد معامل توجيه المماس عند النقطة M، ماذا تستنتج؟

البناء و الترسيخ — 20د

القيم الحدية المحلية لدالة:

مبرهنة

دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة.
إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فانه يوجد مجال I' محتوى في I يشمل c تقبل فيه f قيمة حدية $f(c)$. تسمى $f(c)$ قيمة حدية محلية.

ملاحظات

① نسمي النقطة ذات الإحداثيتين $(c, f(c))$ نقطة حدية محلية لمنحنى f، (ذروة للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$)

② يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I.

③ إذا إنعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I فإن التمثيل البياني يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها c.

مثال

⋆ الدالة $f : x \mapsto x^2 - 4x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = 2x - 4$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

⋆ نلاحظ أن $f'(x)$ تنعدم عند 2 و تغير إشارتها إذن $f(2)$ أي -4 قيمة حدية محلية للدالة f على المجال $[-1; 1]$ مثلا.

البناء و الترسيخ

تنبيه : انعدام f' عند القيمة x_0 غير كاف للقول بأن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f.

مثال

⋆ الدالة $x \mapsto x^3+2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x) = 3x^2$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	

⋆ نلاحظ أن $f'(x)$ تنعدم عند 0 و لا تغير إشارتها إذن $f(0)$ اي 2 ليست قيمة حدية محلية للدالة f.

⚠ ملاحظة هـامّة

إذا كانت الدالة المشتقة الأولى f' تنعدم من أجل x_0 و لاتغير الإشارة عندها فإن النقطة $I(x_0;f(x_0))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

التقويم

تطبيق

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3-6x^2-15x$

1 أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f، ثم أدرس إشارتها

2 عين القيم الحدية المحلية للدالة f

20د

مذكرة رقم : 07

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 01 ساعة

المستوى : 02 ت ر/ع
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : الإشتقاقية
المحتوى المعرفي: حصر دالة.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
البناء و الترسيخ		30د

حصر دالة :

نتائج

لتكن f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال $[a,b]$ و f' دالتها المشتقة.

* اذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$: $\boxed{f(a)\preceq f(x)\preceq f(b)}$

* اذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$: $\boxed{f(b)\preceq f(x)\preceq f(a)}$

مثال

الدالة $f:x\longmapsto x^2$ متزايدة تماماً على المجال $[2,5]$ و منه من أجل كل $x\in[2,5]$: $f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(5)$
أي: $4\leqslant x^2\leqslant 25$
والدالة f متناقصة تماماً على المجال $[-1,0]$ إذن من أجل كل x بحيث: $-1\leqslant x\leqslant 0$ يكون :
$f(-1)\geqslant f(x)\geqslant f(0)$ أي : $1\geqslant x^2\geqslant 0$

العنصر الحاد من الاعلى - من الاسفل :

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f .

✍ نقول عن عدد حقيقي k انه عنصرا حادا من الاعلى (Majorant) للدالة f اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f : $\boxed{f(x)\preceq k}$

✍ نقول عن عدد حقيقي k انه عنصرا حادا من الاسفل (Minorant) للدالة f اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد حقيقي x من المجال D_f : $\boxed{f(x)\succeq k}$

ملاحظات

① القيمة الحدية الكبرى للدالة f على D_f ان وجدت هي العنصر الحاد من الاعلى و هو اصغر العناصر الحادة من الاعلى .

② القيمة الحدية الصغرى للدالة f على D_f ان وجدت هي العنصر الحاد من الاسفل و هو اكبر العناصر الحادة من الاسفل.

التقويم	**تطبيق** f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^3 - 6x + 3$ 1 أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها. 2 بين أنه من أجل كل x من المجال $[-1,1]$: $-1 \leqslant f(x) \leqslant 7$	20د