6

النهايات

مذكرة رقم 01 : نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي / مالانهاية

مذكرة رقم 02 : نهاية منتهية عند مالانهاية

مذكرة رقم 03 : النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

مذكرة رقم 04 : عمليات على النهايات

مذكرة رقم 05 : المستقيم المقارب المائل

مذكرة رقم 06 : إزالة حالة عدم التعيين

الشعب :
- تقني رياضي
- رياضي
- علوم تجريبية

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية 2020 – 2021

للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات
profmerouani
merouaninardjiss@gmail.com

0770349020

مذكرة رقم : 01

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم	**المستوى :** 02 تقني رياضي
السنة الدراسية : 2020 – 2021	**ميدان التعلم :** تحليل
يوم :	**الوحدة :** النهايات و السلوك التقاربي لدالة
المدة : 02 ساعة	**موضوع الحصة :** نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي/مالانهاية

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلى x_0 أو إلى $+\infty$ أو $-\infty$.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

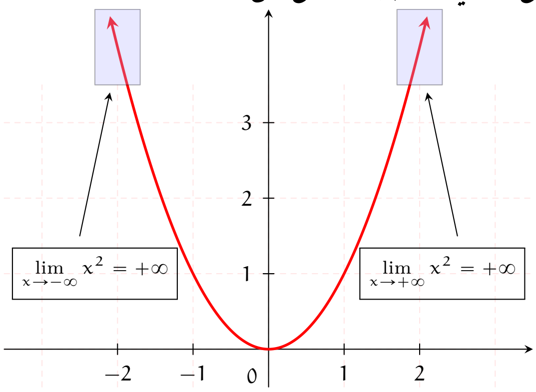
المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	نشاط 01 صفحة 110	5د
البناء و الترسيخ	**❶ نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي:** **تعريف** القول أن نهاية دالة f عند عدد حقيقي x_0 هي $+\infty$ تعني جعل قيم $f(x)$ كبيرة جدا بالقدرالذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي ونكتب : $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty}$ **مثال** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ نلاحظ انه كلما اقترب x من 2 بالقدر الكافي إلا و أخذ $f(x)$ قيما كبيرة جدا، نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f لما يؤول x إلى 2 هي $+\infty$ ونكتب: $\boxed{\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty}$. **مبرهنة** نقبل دون برهان النتيجة التالية $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2} = +\infty}$ **مثال** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^2} = +\infty$. **❷ نهاية غير منتهية عند مالانهاية:** **تعريف** القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني انه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A يوجد عدد حقيقي B بحيث : إذا كان $x>B$ $(x<-B)$ يكون $f(x)>A$ ونكتب : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$	30د

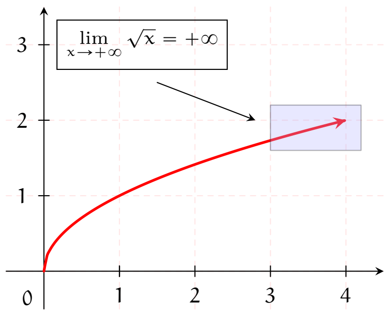
30د

البناء و الترسيخ

مثال

التمثيل البياني و النهايات لكل من الدالتين $x \longmapsto x^2$ و $x \longmapsto \sqrt{x}$





خواص:

1. النهاية عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الاعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)
2. النهاية عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحد لأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)

مثال

1. $\lim_{x\to+\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
2. $\lim_{x\to-\infty} x^3 + 2x^2 - 1 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
3. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 + 2x}{x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

مذكرة رقم : 02

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم	المستوى : 02 تقني رياضي
السنة الدراسية : 2020 – 2021	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
المدة : 02 ساعة	موضوع الحصة : نهاية منتهية عند مالانهاية

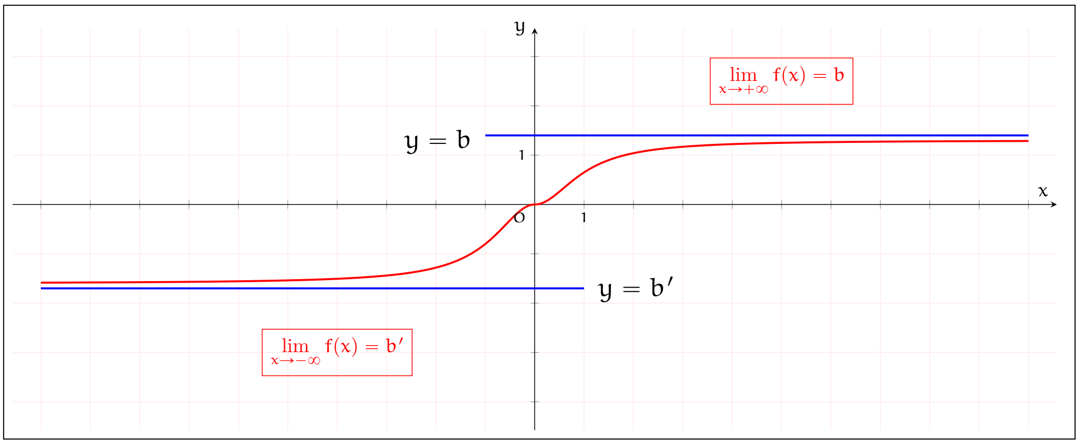
المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلي $+\infty$ أو $-\infty$.

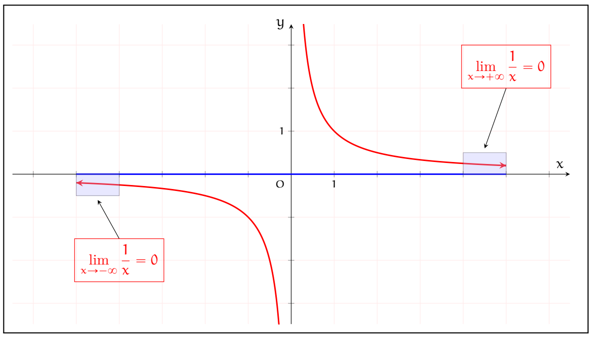
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	نشاط 04 صفحة 110	5د
البناء و الترسيخ	**❶ نهاية منتهية عند مالانهاية :** **تعريف** القول أن نهاية دالة f عند $+\infty$ هي b تعني جعل قيم $f(x)$ قريبة جدا من b بالقدر االذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة كبيرة جدا و نكتب : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b}$ **مثال** لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$ * نلاحظ أن $f(x)$ تأخذ قيما قريبة من العدد 3 بالقدر الذي نريد شريطة ان يأخذ x قيما موجبة جد كبيرة نقول في هذه الحالة ان نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي 3 ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ * و نلاحظ كذلك أن $f(x)$ تاخذ قيما قريبة من العدد 3 بالقدر الذي نريد شريطة ان يكون x سالبا ويأخذ $\|x\|$ قيما كبيرة جدا ، نقول في هذه الحالة ان نهاية الدالة f عند $-\infty$ هي 3 ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$. **مبرهنة** a عدد حقيقي. نقبل دون برهان النتائج التالية : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x+a} = 0}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+a} = 0}$ **❷ التفسير البياني لنهاية منتهية عند مالانهاية :** **المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل :** **تعريف** (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في معلم و b عدد حقيقي، القول أن مستقيم الموازي لحامل محور الفواصل ذو المعادلة $y = b$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $(+\infty)$ (على الترتيب عند $(-\infty)$) يعني أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (على الترتيب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$) .	30د

البناء و الترسيخ



مثال



ليكن التمثيل البياني للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

و منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ (محور الفواصل) مقارب لمنحنى الدالة عند $+\infty$ و عند $-\infty$

الأستاذة : نرجس مرواني

مذكرة رقم : 03

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم	المستوى : 02 تقني رياضي
السنة الدراسية : 2020 – 2021	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
المدة : 02 ساعة	موضوع الحصة : النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : حساب نهاية دالة عندما يؤول x إلي x_0

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	نشاط 02 صفحة 110	د5
البناء و الترسيخ	**❶ النهاية من اليمين و النهاية من اليسار عند عدد حقيقي :** **تعريف** القول أن نهاية دالة f عند x_0 بقيم كبرى (النهاية من اليمين) هي $+\infty$ يعني انه يمكن جعل قيم $f(x)$ كبيرة جدا بالقدر الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي حيث $x > a$ ونكتب : $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = +\infty}$ **تعريف** القول أن نهاية دالة f عند x_0 بقيم صغرى (النهاية من اليسار) هي $-\infty$ يعني انه يمكن جعل قيم $f(x)$ صغيرة جدا بالقدر الذي نريد شريطة أن ياخذ x قيما قريبة من x_0 بالقدر الكافي حيث $x < a$ ونكتب : $\boxed{\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = -\infty}$ **ملاحظة** يمكن الحصول على تعاريف لنهايات مماثلة بنفس الطريقة كـ : $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = +\infty$. **مثال** f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ نلاحظ أنه إذا أخذ x قيما قريبة من العدد 2 من جهة اليمين بالقدر الذي نريد فإن $f(x)$ تأخذ قيم قريبة من $+\infty$ بالقدر الكافي و نكتب $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 2} f(x) = +\infty$ نلاحظ أنه إذا أخذ x قيما قريبة من العدد 2 من جهة اليسار بالقدر الذي نريد فإن $f(x)$ تأخذ قيم قريبة من $-\infty$ بالقدر الكافي و نكتب $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 2} f(x) = -\infty$	د30

البناء
و
الترسيخ

مبرهنة

a حد لمجموعة التعريف نقبل دون برهان النتيجة التالية : $\boxed{\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} \dfrac{1}{(x-a)} = -\infty}$ و $\boxed{\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} \dfrac{1}{(x-a)} = +\infty}$

❷ التفسير البياني لنهاية غير منتهية عند عدد حقيقي:

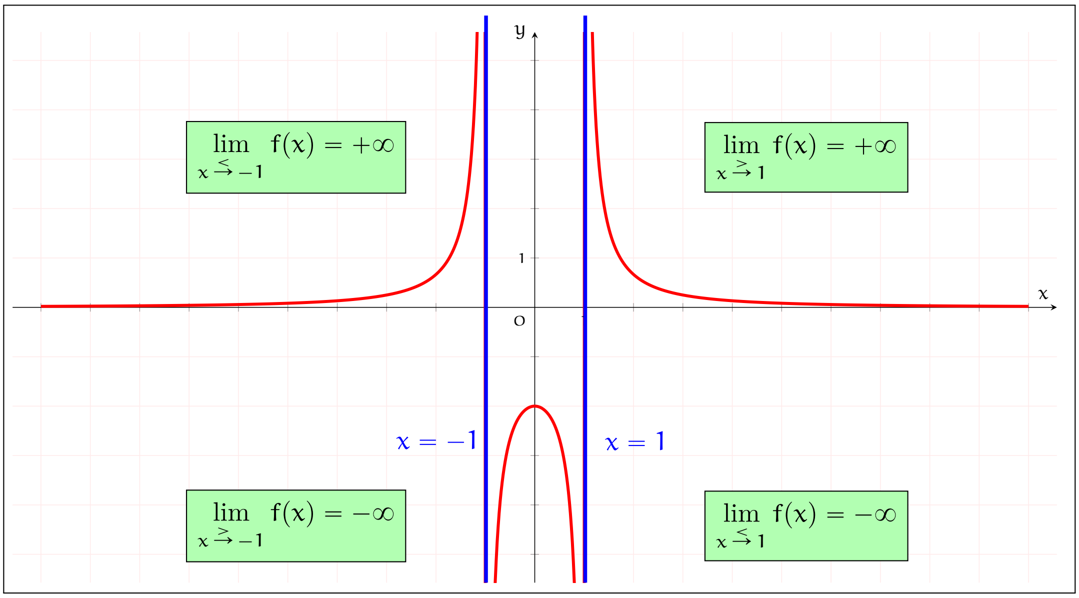
المستقيم المقارب الموازي لحامل محور التراتيب:

تعريف

(C_f) هو التمثيل البياني لدالة f في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، و a عدد حقيقي، إذا كانت النهاية (النهاية من اليمين أو من اليسار) للدالة f عند العدد a هي $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ نقول أن المستقيم الموازي لمحور التراتيب ذو المعادلة $x = a$ هو مستقيم مقارب عمودي (موازي لمحر التراتيب) للمنحنى (C_f).

مثال

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$



مذكرة رقم : 04

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 تقني رياضي
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
موضوع الحصة : عمليات على النهايات.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : إستعمال المبرهنات الأولية للنهايات , حساب نهاية دالة بإزالة حالة عدم تعيين .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت

الانطلاق — 5د

تذكير

ملاحظات

1. يتم حساب نهاية دالة عند الحدود المفتوحة لمجموعة التعريف.
2. إذا كانت دالة قابلة للإشتقاق عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
3. إذا قبلت دالة f عند عدد حقيقي a فإن هذه النهاية وحيدة.
4. يمكن لدالة لا تقبل نهاية عند حد من حدود من مجموعة تعريفها، فمثلا الدالة $x \mapsto \sin x$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$

البناء و الترسيخ — 30د

مبرهنات أولية على النهايات :

f و g دالتان و α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و L ، L' أعداد حقيقية.

نهاية مجموع دالتين :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)+g(x)]$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} [f(x)\times g(x)]$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L'\neq 0$	$\pm\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

البناء
و
الترسيخ

نهاية مقلوب دالة :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	0^-	0^+	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

ملاحظة هامة

◁ تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات : " عدم التعيين (ح ع ت)

◁ توجد أربع حالات عدم التعيين وهي من الشكل : $\dfrac{\infty}{\infty}$ ، $\dfrac{0}{0}$ ، $0\times\infty$ ، $+\infty-\infty$

مثال

إذا اعتبرنا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

* حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$ (حالة عدم تعيين من الشكل $-\infty+\infty$)

إزالة حالة عدم التعيين

لدينا $f(x) = 2x^3 + 3x^2 = x^3(2 + \dfrac{3}{x})$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} (2 + \dfrac{3}{x}) = 2$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

مذكرة رقم : 05

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم	المستوى : 02 تقني رياضي
السنة الدراسية : 2021 – 2020	ميدان التعلم : تحليل
يوم :	الوحدة : النهايات و السلوك التقاربي لدالة
المدة : 02 ساعة	موضوع الحصة : المستقيم المقارب المائل.

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : تبرير ان مستقيما معلوما هو مستقيم مقارب .

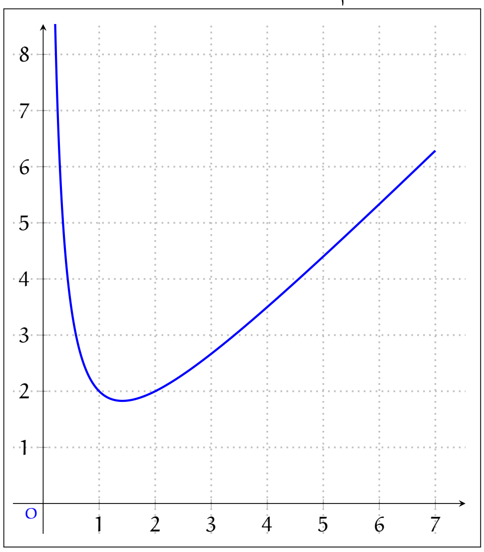
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت

المراحل: الانطلاق — **الوقت:** 5د

نشاط مقترح

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$، (C_f) المنحنى البياني الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل و ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$



* لتكن $M(x, f(x))$ نقطة من (C_f) و $P(x, y)$ نقطة من (Δ) .

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ فإن : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x}$.
2. أحسب بدلالة x المسافة MP .
3. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} MP$ ، ماذا يمكنك القول عن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - y]$ ؟.
4. في نفس المعلم أرسم المستقيم (Δ) ، ماذا تلاحظ؟.

المراحل: البناء و الترسيخ — **الوقت:** 30د

المستقيم المقارب المائل:

تعريف

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ حيث $(a \neq 0)$.
القول ان المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$) يعني :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (ax + b)\right] = 0}$

على الترتيب.

⚠ ملاحظة هـامّة

إذا كانت f و g دالتين بحيث : $f(x) = (ax + b) + g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ يكون مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
نفس الملاحظة لما x يؤول $(-\infty)$.

البناء
و
الترسيخ

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\{-2\}$ بـ : $f(x) = x + 1\dfrac{2}{x+2}$

بما أن :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+2} = 0$$

إذن نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب لمحنى الدالة f بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2[$ بـ : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 2}{x - 2}$, (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1. أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
2. عين الأعداد الحقيقية a , b و c بحيث من أجل كل x من المجال $]-\infty;2[$: $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$
3. إستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

مذكرة رقم : 06

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم السنة الدراسية : 2020 – 2021 يوم : المدة : 02 ساعة	المستوى : 02 تقني رياضي ميدان التعلم : تحليل الوحدة : النهايات موضوع الحصة : إزالة حالة عدم التعيين

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : عمليات على النهايات و طرق إزالة حالة عدم التعيين .

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	تذكير **❸ نهايات بعض الدوال المألوفة:** **نهاية دالة كثير حدود** **مبرهنة** نهاية دالة كثير حدود عند المالانهاية $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) هي نهاية حدها الاعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) **نهاية دالة ناطقة** **مبرهنة** نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) **نهاية دالة الجذر تربيعي** **مبرهنة** f دالة موجبة و l عدد حقيقي موجب إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$ إذا كان $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$ فإن $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$ **مثال** 1 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2x^2-1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3+2x^2-1=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ 2 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ 3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x}=2$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-2}{2x}=+\infty$ و منه نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x-2}{2x}}=\sqrt{2}$	15د

البناء و الترسيخ

❹ إزالة حالات عدم التعيين:

دراسة مثال 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2}$

* أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x^2}=+\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

و منه نجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

دراسة مثال 02 :

30د

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{4x^2-3}+2x-2$

* أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

الحل :

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}2x-2=-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}+2x-2\right)\left(\sqrt{4x^2-3}-2x-2\right)\big)}{\left(\sqrt{4x^2-3}-2x-2\right)}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x-7}{\left(\sqrt{4x^2-3}-2x-2\right)}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{-2x\left(\sqrt{1}+1\right)}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(8+\frac{1}{x})}{-2\cancel{x}\left(\sqrt{1}+1\right)}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$ و كانت الدالة f تتضمن جدرا :

✍ إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ حيث $(a=\alpha)$

✍ إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$ حيث $(\sqrt{a}=|\alpha|)$

نزيل حالة عدم تعيين بالضرب في المرافق.

دراسة مثال 03 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{2x-3}-3x+2$

* أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-3x+2=-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

إزالتها

نستخرج x عامل مشترك :

إذن

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}-3x+2$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}\right)}-3x+2$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-3x+2$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}-3+\frac{2}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

دراسة مثال 04 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;1]$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{4x^2-3}+x-2$

* أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}x-2=-\infty$ حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$

إزالتها

نستخرج x عامل مشترك :

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}+x-2$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\sqrt{\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}+x-2$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{\left(4-\frac{3}{x^2}\right)}+1-\frac{2}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$ و كانت الدالة f تتضمن جدرا :

✍ إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x)=\sqrt{ax+b}-\alpha x+\beta$

✍ إذا كانت الدالة f من الشكل $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta$ حيث $(\sqrt{a}\neq|\alpha|)$

نزيل حالة عدم تعيين باستخراج x كعامل مشترك.

دراسة مثال 05 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\{1\}$ كما يلي : $\frac{x^2-1}{x-1}$

* أحسب $\lim_{x\to1}f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x\to1}x^2-1=0$ و $\lim_{x\to1}x-1=0$ حالة عدم تعيين من الشكل $(\frac{0}{0})$

إزالتها

التحليل :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x + 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

طريقة: في حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

✍ إذا كانت الدالة f تتضمن كثيرات حدود نقوم بتحليل البسط و المقام على الشكل $f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}$ ثم نختزل العوامل المشتركة

✍ إذا كانت الدالة f تتضمن جدرا نقوم بالضرب في المرافق $f(x) \times \frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$ ثم نختزل العوامل المشتركة

دراسة مثال 06 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

* أحسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$

الحل :

لدينا $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \sqrt{x+3} - 2 = 0$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} x - 1 = 0$ حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

إزالتها

الضرب في المرافق :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{\left(\sqrt{x+3} - 2\right)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x+3} + 2\right)}$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \frac{1}{4}$$