الأستاذ: فراحتية المحفوظ

مذكرة رقم 20

ثانوية : طوبري محمد – محمد بوضياف –
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يـوم :
المدة : ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : محاكات تجربة عشوائية.

✍ **المكتسبات القبلية:** مفاهيم أولية حول مفهوم التواترات. المجموعات والعمليات عليها.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** محاكات تجربة عشوائية ،إبراز مفهوم ميل تواترات نحو الإستقرار.
✍ **الأدوات المستعملة:** الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

نشــــاط مقتــرح :

❶ ارم قطعة نقدية 25 مرة، وسجل 0 عن ظهور الوجه (F) و 1 عند ظهور الظهر (P) ثم دون النتائج في جدولين التالين:

جدول النتائج

جدول التواترات

	0	1
التكرار		
التواتر		

التشخيص والاكتشاف

❷ ضم نتائجك إلى نتائج 4 تلاميذ آخرين ثم أحسب التواتر لكل من الوجه والظهر في العينة ذات المقاس 100 المحصل عليها • قارن النتيجتين مع نتائجك؟ هل الفروق كبيرة؟

❸ كرر التجربة بزيادة مقاس العينة لـ 200 ثم 500 وأحسب تواترات كل تجربة ماالذي يمكنك قوله عن علاقة التواترات بمقاس العينة ؟

مصطلحات و تعاريف :

التجربة العشوائية :

بنــاء معـــارف

تعريف

✍ نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.
✍ نسمي عينة لتجربة عشوائية مجموعة النتائج المتحصل عليها عند تكرار هذه التجربة.

محاكاة تجربة عشوائية :

✍ عند البحث عن عينة لتجربة عشوائية، يتعسرالحصول على عدد كبير من التجارب، لذا نلجأ إلى محاكاة.

✍ لمحاكاة تجربة عشوائية، نصف هذه التجربة ثم ننمذجها، أي نختار نموذج لسحب أعداد بصفة عشوائية حيث يكون لهذا النموذج نفس خواص الظاهرة المدروسة ثم نلاحظ تواترات ظهور مختلف النتائج الممكنة.

مـــثال (1)

✔ التّجربة العشوائية: ميلاد بنت أو ولد في 10 عائلات.
✔ نموذج لهذه التّجربة: حظوظ ميلاد بنت تساوي حظوظ ميلاد ولد.
✔ تنفيذ محاكاة توزيع الجنس في 10 عائلات : يمكن محاكاة هذه التّجربة بعدة طرق، نقترح هنا طريقتين مألوفتين هما:

❖ طريقة1: برمي قطعة نقديّة غير مزيّفة 10 مرّات حيث نرفق الوجه بالنتيجة "بنت" و الظهر بالنتيجة "ولد" .
مثلا : العيّنة وجه - ظهر - وجه - وجه - ظهر - وجه - ظهر - وجه – وجه – ظهر . تعبّر عن 6 بنات و 4 أولاد في العائلات العشرة. (يمكن ان نرمز F لـ : وجه و P لـ : ظهر).

❖ طريقة2: برمي زهر نرد غير مزيّف 10 مرّات. نرفق الوجوه 2 ، 4 ، 6 بالنتيجة "بنت" و الوجوه 1 ، 3 ، 5 بالنتيجة "ولد" . مثلا: العيّنة 1-3-2-6-5-1-3-1-4-2 تعبّر عن 4 بنات و 6 أولاد في العائلات العشرة.

التـــواتـــــــرات :

بنـــاء المعـــارف

تعريف

هو حاصل قسمة تكرار الطبع (القيمة) على مجموع التكرارات للقيم ونرمز له بالرمز f_i أي: $\boxed{f_i = \frac{n_i}{N}}$.

حيث: n_i : تكرار الطبع و N التكرار الكلي مع $N = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$

مــبرهــنة

✍ نعتبر تجربة عشوائية ما حيث f_i تمثل تواترات ظهور نتائجها حيث $0 \leq f_i \leq 1$ وبالتالي : $\sum_{i=1}^{i=k} f_i = 1$

برهان.
لدينا $f_i = \frac{n_i}{N}$ ومنه $\sum_{i=1}^{i=k} f_i = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=k} n_i = \frac{N}{N} = 1$ □

ملاحظــــــــــــــــــة :

✍ في تجربة إلقاء قطعة نقدية عددا كبيرا من المرات، نلاحظ أن تواتر ظهور أحد الوجهين يقترب من تواتر ظهور الوجه الآخر، مما يسمح لنا بالقول أن تواتر ظهور كل منهما يؤول نحو الاستقرار حول القيمة $\frac{1}{2}$.

✍ وبهذا نكون قد نمذجنا هذه التجربة (رمي قطعة نقدية مرة واحدة)، ثم أن القيمة $\frac{1}{2}$ هي التي نسميها فيما بعد احتمال ظهور أحد الوجهين.

التقويم

تطبـــــــــــــيق

التجربة العشوائية نجاح أو رسوب 20 تلميذ يمكن محاكاة هذه التجربة بعدة طرق منها:

❶ زهرة نرد غير مزيفة

❷ قطعة نقدية متجانسة

✍ أنجز هذه التجربة بطريقتين

حــل

طريقة 1 نرمي زهرة النرد الغير المزيفة 15 مرة ، نرفق بالوجوه 2،4،6 بنتيجة نجاح و الوجوه 1،3،5 بالنتيجة رسوب
مثلا العينة $\{3, 1, 5, 2, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 6, 4, 2, 1\}$ تعبر عن 6 تلاميذ نجيجين و 9 تلاميذ راسيبين

طريقة 2 نرمي قطعة نقدية غير مزيفة 15 مرة نرفق للوجه (F) بالنتيجة النجاح و للظهر (p) بالنتيجة الرسوب
مثلا العينة $\{p, p, p, f, f, f, p, p, f, f, p, f, p; f, f, f\}$ تعبر عن 7 تلاميذ راسبين و 8 ناجحين

ملاحظة حول سير الحصة

....

....

....

الأستاذ: فراحتية المحفوظ

مذكرة رقم 21

ثانوية : طوبري محمد – محمد بوضياف –
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يـــوم :
المدة : ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : الحوادث والعمليات عليها.

✍ **المكتسبات القبلية:** المجموعات والعمليات عليها.
✍ **الكفاءات المستهدفة:** مدخل إلى الإحتمالات، معرفة مصطلحات مختلفة (الحوادث وأنواعها، العمليات على الحودث،...).
✍ **الأدوات المستعملة:** الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**نشـــــــــــــاط :** نضع في علبة 10 كرات مرقمة من 21 إلى 30. نسحب كرة واحدة بصفة عشوائية ونسجل رقمها ❶ عين مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة العشوائية ❷ نعتبر الحادثتين • A "رقم الكرة المسحوبة هومضاعف للعدد 3" • B "رقم الكرة المسحوبة هومضاعف للعدد 4" عين مجموعة إمكانيات كل من هاتين الحادثتين ❸ عين مجموعة إمكانيات كل من الحادثتين التاليتين: • " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 ومضاعف للعدد 4 في آن واحد" • رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 أو مضاعف للعدد 4"	
التشخيص والاكتشاف	**مناقشة النشـــــــاط :** ① مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة: $\Omega = \{21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29; 30\}$ ② • نعتبر الحادثة A " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 " مجموعة إمكانيات الحادثة A هي: $A = \{21; 24; 27; 30\}$ • نعتبر الحادثة B " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 4 " مجموعة إمكانيات الحادثة B هي: $B = \{24; 28\}$ ③ • نعتبر الحادثة C " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 ومضاعف للعدد 4 في آن واحد " مجموعة إمكانيات الحادثة C هي: $C = A \cap B = \{24\}$ • نعتبر الحادثة D " رقم الكرة المسحوبة هو مضاعف للعدد 3 أو مضاعف للعدد 4 في آن واحد " مجموعة إمكانيات الحادثة D هي: $D = A \cup B = \{21; 24; 27; 28; 30\}$	
بنـاء المعـارف	**مجموعة الإمكانيات :** **تعريف** ✍ إمكانية تجربة عشوائية هي أية نتيجة ممكنة لهذه التجربة. ✍ مجموعة الإمكانيات هي مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة و نرمز إليها عادة بالحرف Ω. **مـــثـال (2)** ✔ رمي قطعة نقد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الوجه أو الظهر. أي: $\Omega = \{F; P\}$ ✔ رمي زهر النرد هي تجربة عشوائية نتائجها الممكنة هي ظهور الأوجه الستة أي: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ **الحـــادثة :** **تعريف** نسمي حادثة كل جزء من مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية أي مجموعة النتائج التي تتميز بنفس الخاصية.	

مـــــثـــال (3)

✍ صندوق يحتوي على 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب قريصة واحدة عشوائيا.
✔ مجموعة الإمكانيات هي: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$
✔ A هي الحادثة " سحب قريصة تحمل رقم زوجي " أي: $A = \{2;4;6;8;10\}$

الحـــوادث الخـــاصة :

✍ **الحادثة الأكيدة:** هي Ω أي مجموعة كل النتائج الممكنة.
✍ **الحادثة المستحيلة:** هي $\varnothing$ المجموعة الخالية (لا تحتوي على أي إمكانية).
✍ **الحادثة البسيطة:** هي حادثة متكونة من نتيجة واحدة (عنصر وحيدا)، فهي مجموعة أحادية. تدعى حادثة أولية.

مـــــثـــال (4)

✔ الحوادث البسيطة في رمي قطعة نقدية هي: $\{F\}$ ، $\{P\}$.
✔ الحوادث البسيطة في رمي زهر النرد هي: $\{1\}$ ، $\{2\}$ ، $\{3\}$ ، $\{4\}$ ، $\{5\}$ ، $\{6\}$

العمليـــــات على الحـــوادث :

تقـــاطع حــــادثتين :

تعريف

نسمي تقاطع الحادثتين A و B ونرمز إليه بـ $A \cap B$ الحادثة التي تحوي العناصر المشتركة بين الحادثتين A و B.

مـــــثـــال (5)

✍ رمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه.
✔ مجموعة الإمكانيات هي: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
✔ A هي الحادثة " الحصول على وجه رقمه أكبر من 4 " ،أي: $A = \{4;5;6\}$
✔ B هي الحادثة " الحصول على وجه رقم زوجي " ،أي: $A = \{2;4;6\}$
✔ الحادثة $A \cap B$ هي: " الحصول على وجه رقمه أكبر من 4 وزوجي" ،أي: $A \cap B = \{4;6\}$

الحادثتان المنفصلتان (غير المتلائمتين) :

تعريف

نسمي حادثتين منفصلتين (أو غير متلائمتين) A و B الحادثتين اللتين لا تشتركان في أي عنصر (أي نتيجة).
أي $A \cap B = \varnothing$

مـــــثـــال (6)

✍ رمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه.
✔ A هي الحادثة " الحصول على وجه رقمه فردي " ،أي: $A = \{1;3;5\}$
✔ B هي الحادثة " الحصول على وجه رقمه زوجي " ،أي: $A = \{2;4;6\}$
✔ الحادثة $A \cap B$ هي: " الحصول على وجه رقمه فردي و زوجي " ،أي: $A \cap B = \varnothing$
✍ **ومنه A و B منفصلتان.**

اتحـــاد حــــادثتين :

تعريف

نسمي اتحاد حادثتين A و B ونرمز إليه بـ $A \cup B$ الحادثة المتكونة من عناصر الحادثة A أو الحادثة B.

مـــثــال (7)

✍ رمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه.

✔ A هي الحادثة " الحصول على وجه رقمه فردي " ،أي: $A = \{1;3;5\}$

✔ B هي الحادثة " الحصول على وجه رقمه مضاعف للعدد 3 " ،أي: $A = \{3;6\}$

✔ الحادثة $A \bigcup B$ هي: " الحصول على وجه رقمه فردي أو مضاعف للعدد 3 "

ومنه: $A \bigcap B = \{1;3;5;6\}$

الحادثة المعاكسة :

تعريف

نسمي الحادثة المعاكسة للحادثة (متممة أو مكملة الحادثة) A ونرمز لها بـ $\overline{A}$ أو A^c (نقرأ " لا A ") مجموعة العناصر التي تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A.

مـــثــال (8)

✍ في تجربة رمي زهر نرد غير مزيف ذو ستة أوجه.

✔ A هي الحادثة " الحصول على وجه رقمه فردي " ،أي: $A = \{1;3;5\}$

✔ $\overline{A}$ هي الحادثة " الحصول على وجه رقمه زوجي " ،أي: $\overline{A} = \{2;4;6\}$

مـــبرهنة

A و B حادثتان من تجربة عشوائية وبالتالي :

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

برهان.

ليكن $x \in \overline{A \cup B}$ معناه $x \in \Omega - (A \cup B)$

يكافئ $x \notin A$ و $x \notin B$

يكافئ $x \in \overline{A}$ و $x \in \overline{B}$

يكافئ $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

$x \in \overline{A \cap B}$ معناه $x \in \Omega - (A \cap B)$

يكافئ $x \in (\Omega - A)$ أو $x \in (\Omega - B)$

يكافئ $x \in \overline{A}$ أو $x \in \overline{B}$

يكافئ $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

□

تطبيـــــــيق

نرمي زهرة نرد متوازنة، ولتكن الحوادث التالية:

A "ظهور رقم أكبر تماما من 3"

B "ظهور رقم أصغر تماما من 6"

C "ظهور رقم زوجي"

① عين عناصر المجموعة Ω

② عين عناصر الحوادث A ، B و C

③ عين مجموعة الحوادث التالية $A \cap B$ ، $A \cap C$ ، $A \cap B \cap C$ ، $A \cup C$ ، $A \cup B \cup C$

④ عين مجموعة الحوادث التالية $\overline{A} \cap \overline{B}$ ، $\overline{A \cup B}$ ، $\overline{A}$ ، $\overline{B}$

بـنـاء معـــارف

التقـويم

ملاحظة حول سير الحصة

....

....

....

ثانوية : طوبري محمد – محمد بوضياف –
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يــوم :
المدة : ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : قانون احتمال.

الأستاذ: فراحتية المحفوظ

المكتسبات القبلية: التجربة العشوائية. مجموعة الامكانيات. الحوادث والعمليات عليها.
الكفاءات المستهدفة: وصف تجربة عشوائية بسيطة، عدد النتائج الممكنة فيها منته حساب قانون إحتمال تجربة عشوائية.
الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق	**نشاط :**	

نشاط :

يحتوي كيس على 5 كر يات متماثلة (لا نفرق بينها عند اللمس) مرقمة من 2 إلى 6. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد ونسجل مجموع رقميهما.

❶ هل يمكن الحصول على 4؟ على 6؟
❷ ماهي كل النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها؟
❸ ماهو عدد الطرائق الممكنة للحصلة على 8؟
❹ أُحسب عدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب كرتين في آن واحد.
❺ علما أن احتمال الحصول على 8 هو نسبة عدد طرائق الحصول على 8 إلى عدد الطرائق الكلية.
- أُحسب احتمال الحصول على 8.

❻ لحساب احتمال كل النتائج الممكنة أُنقل ثم اكمل الجدل أدناه
حيث: x_i نتيجة المجموع الممكن الحصول عليها و P_i احتمال النتيجة P_i الموافقة.

x_i				8			
P_i							

التشخيص والاكتشاف

مناقشة النشاط :

عندما نسحب كرتين في آن واحد فإن النتيجة تكون على شكل ثنائية مؤلفة من عددين دون ترتيب وبلا تكرار مثل $(2;3)$ والمجموع في هذا المثال هو 5 ، وعليه:

① لايمكن الحصول على 4 لأن: العدد 4 لايكتب كمجموع رقمين من الأرقام التي تحملها الكرات التي داخل الكيس. ونحصل على أصغر مجموع بسحب الكرتين التين تحملان الرقمين 2 و 3 هو 5 .
يمكن الحصول على 6 بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 2 و 4 .
② النتائج المختلفة التي يمكن الحصول عليها: $\Omega = \{5;6;7;8;9;10;11\}$
③ بما أن 8=2+6=3+5 فإنه يمكن الحصول على 8 بطريقتين إحداهما بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 2 و 6 ، والأخرى بسحب الكرتين اللتين تحملان الرقمين 3 و 5 .
④ لحساب عدد الطرائق الكلية الممكنة لسحب كرتين في آن واحد من الكيس يمكن إتباع طرائق العد البسيطة مثل إستعمال الشجرة أو الجدول والحصول على:

+	2	3	4	5	6
2	✖	5	6	7	8
3	✖	✖	7	8	9
4	✖	✖	✖	9	10
5	✖	✖	✖	✖	11
6	✖	✖	✖	✖	✖

ومنه عدد الطرائق الكلية يساوي 10.
⑤ بما أن عدد الطرائق الكلية هو 10، وعدد الطرائق الحصول على 8 هو 2 فإن إحتمال الحصول على 8 هو: $\frac{1}{5}$.
⑥ حساب احتمال كل النتائج الممكنة.

x_i	5	6	7	8	9	10	11
P_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

بنـــاء معـــــارف

قـــانون احتمـــال:

تعريف

✍ لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة العشوائية: $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_n\}$، نعرف قانون احتمال على المجموعة Ω بإرفاق كل قيمة x_i من Ω بعدد موجب p_i بحيث : $\boxed{p_1+p_2+\cdots+p_n=1}$

مع : $\boxed{0\leq p_i\leq 1}$ ونمثل قانون الإحتمال بالجدول المرفق

x_n	x_i	...	x_2	x_1
p_n	p_i	...	p_2	p_1

✍ نمذجة تجربة عشوائية يعني إرفاقها بمجموعة إمكانيات Ω و قانون احتمال P على Ω

مـــثــال (9)

✍ في تجربة رمي زهرة نرد لدينا: $p(1)=p(3)=p(4)$ و $2p(3)=p(2)$ و $3p(4)=p(5)=p(6)$

✔ عرف قانون الاحتمال لهذه التجربة

تساوي الإحتمال:

تعريف

لتكن $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ مجموعة امكانيات تجربة عشوائية. إذا كان لكل الإمكانيات نفس الإحتمال (متساوية الإحتمال) نقول إن قانون الإحتمال متساوي الإحتمال أو متساوي التوزيع.

بمعنى: إذا كان n عدد عناصر Ω فإن إحتمال وقوع كل عنصر x_i من Ω هو: $P_i=\frac{1}{n}$.

حيث: $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ مع $0\leq p_i\leq 1$ و $p_1=p_2=\cdots=p_n$

ملاحظـــــــــــــــة :

✍ بعض التعابير التي تدل على وضعية تساوي احتمال :

- ❖ نختار بصفة عشوائية.
- ❖ رمي قطعة نقدية متوازنة.
- ❖ رمي زهرة نرد غير مزيفة.
- ❖ سحب كريات أو قريصات داخل كيس لانفرق بينهما عند اللمس.

مـــثــال (10)

✔ عند رمي قطعة نقدية، نقبل أن احتمال ظهور الوجه أو الظهر يساوي $\frac{1}{2}$

✔ عند رمي زهر النرد ذي 6 أوجه، فإن احتمال الحصول على أحد الأوجه هو $\frac{1}{6}$

التقويم

عمـــــل منـــــزلي

☛ تمـاريـن 13 - 18 - 19 - 30 الصفحـة 389 - 390

ملاحظة حول سير الحصة

....

....

....

مذكرة رقم 23

ثانوية : طوبري محمد – محمد بوضياف –
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يـــوم :
المدة : ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : خواص الاحتمالات.

الأستاذ: فراحتية المحفوظ

المكتسبات القبلية: التجربة العشوائية. مجموعة الامكانيات. الحوادث والعمليات عليها.
الكفاءات المستهدفة: حساب احتمال حادثة بسيطة. استعمال خواص الاحتمالات في حساب احتمالات بعض الحوادث المركبة. التعرف شجرة الاحتمالات.
الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

نشـــــاط :

يحتوي صندوق على 20 كرية متماثلة (لا نفرق بينها عند اللمس). حيث 10 منها بيضاء (B) و 6 سوداء (N) و 4 حمراء (R). نسحب من الصندوق كرية واحدة.

❶ عين مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة العشوائية.

❷ عين مجموعة امكانيات الحوادث التالية وحدد عدد عناصر كل منها :

- الحادثة A الكرية المسحوبة بيضاء .
- الحادثة B الكرية المسحوبة سوداء .
- الحادثة C الكرية المسحوبة بيضاء أو سوداء.
- الحادثة D الكرية المسحوبة ليست بيضاء.
- الحادثة E الكرية المسحوبة صفراء.

❸ أحسب نسبة عدد عناصر كل حادثة إلى عدد عناصر مجموعة الإمكانيات.

التشخيص والاكتشاف

مناقشة النشـــاط :

① مجموعة النتائج التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة:
$\Omega=\{B_1;B_2;B_3;B_4;B_5;B_6;B_7;B_8;B_9;B_{10};N_1;N_2;N_3;N_4;N_5;N_6;R_1;R_2;R_3;R_4\}$

② • مجموعة إمكانيات الحادثة A هي: $A=\{B_1;B_2;B_3;B_4;B_5;B_6;B_7;B_8;B_9;B_{10}\}$. وعددها: 10
- مجموعة إمكانيات الحادثة B هي: $B=\{N_1;N_2;N_3;N_4;N_5;N_6\}$. وعددها: 6
- مجموعة إمكانيات الحادثة C هي:
$C=A\cup B=\{B_1;B_2;B_3;B_4;B_5;B_6;B_7;B_8;B_9;B_{10};N_1;N_2;N_3;N_4;N_5;N_6\}$. وعددها: 16
- مجموعة إمكانيات الحادثة D هي: $D=\overline{A}=\{N_1;N_2;N_3;N_4;N_5;N_6;R_1;R_2;R_3;R_4\}$. وعددها: 10
- مجموعة إمكانيات الحادثة E هي: $E=\varnothing$. وعددها: 0

③ حساب نسبة عدد عناصر كل حادثة إلى عدد عناصر مجموعة الإمكانيات. هو ما يعرف بإحتمال حادثة ومنه:
$P(A)=\frac{1}{2}$. $P(B)=\frac{3}{10}$. $P(C)==\frac{4}{5}$. $P(D)=\frac{1}{2}$. $P(E)=\frac{0}{20}=0$.

بنـــاء المعـــارف

احتمـــال حـــادثة :

تعريف

✍ Ω مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية مرفقة بقانون احتمال و A حادثة.
احتمال الحادثة A يرمز له بـ $P(A)$ ويساوي مجموع إحتمالات الحوادث الأولية للحادثة A

مـــثـــال (11)

النتائج المحصل عليها بعد رمي زهر نرد مزيف العديد من المرات، سمحت باقتراح قانون الاحتمال المعرف بالجدول كما يلي:

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

✔ احتمال الحصول على رقم فردي هو:
$$P(\{1;3;4\})=P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{4\})=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

نتيجة

في حالة تساوي الإحتمال ، كل مخرج (إمكانية) x_i له إحتمال P_i حيث $P_i = \frac{1}{n}$

إذا كانت الحادثة A تحوي على m عنصر يكون احتمالها $P(A)$ هو $P(A) = m \times \frac{1}{n}$ أي أن

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}}$$

ملاحظة :

✍ نسمي عناصر الحادثة A الحالات المواتية (أو الملائمة) لهذه الحادثة وعناصر Ω الحالات الممكنة.

✍ تسمى النظرية السابقة أيظا قانون لبلاس (Laplace)

مثال (12)

✍ صندوق يحتوي على 8 قريصات مرقمة من 5 إلى 12. نسحب قريصة واحدة عشوائيا.

ونعتبر الحادثة " سحب قريصة تحمل رقم زوجي " والحادثة " سحب قريصة تحمل رقم مضاعف لـ 3 "

✔ لدينا: $\Omega = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ ، $A = \{6; 8; 10; 12\}$ ، $B = \{6; 9; 12\}$

✔ ومنه: $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ و $p(B) = \frac{3}{8}$

خواص الإحتمالات :

خواص

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ، نزود Ω بقانون الإحتمال P

❶ من أجل كل حادثة A فإن : $0 \le P(A) \le 1$

❷ $P(\Omega) = 1$ و $P(\varnothing) = 0$

❸ إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

❹ إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين ($A \cap B = \varnothing$) فإن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

❺ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ حيث $\overline{A}$ هي الحادثة المعاكسة للحادثة A

❻ إذا كانت الحادثة A جزء من الحادثة B ($A \subset B$) فإن : $P(A) \le P(B)$

الحادثتان المستقلتان :

تعريف

نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتين إذا وفقط إذا كان : $\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$

نشاط 02 :

نلخص إحتمال نجاح كل من أحمد و صالح في البكالوريا في الجدولين التاليين :

رسوب أحمد	نجاح أحمد	x_i
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$p(x_i)$

رسوب صالح	نجاح صالح	y_i
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$p(y_i)$

❶ لخص الجدولين السابقين في مخطط واحد مناسب

❷ ما إحتمال نجاح أحمد و صلاح معا ؟

❸ ما إحتمال أن ينجح واحد منهما فقط ؟

شجرة الإحتمالات :

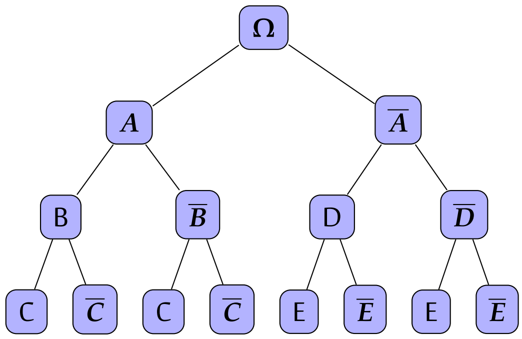
تعريف

شجرة الاحتمالات هي مخطط موجه ومتوازن يمكن تلخيص وضعية في مييدان الاحتمالات البسيطة

وصف ومفردات

يمكن وصف شجرة الإحتمالات على النحو التالي:

- الغصن الإبتدائي الأول يمثل الحادثة A و إحتمالها $p(A)$ والغصن الإبتدائي الثاني الحادثة العكسية $\overline{A}$ وإحتمالها $p(\overline{A})$
- الغصن المنطلق من العقدة A نحو B أو $\overline{B}$ يسمى غصن ثانوي.
- المسار يتكون من عدة أغصان متتابعة مثلا $A \to B \to C$ هو مسار حادثة



بناء معارف

قواعد الحساب بشجرة الإحتمالات :

طريقة

لحساب الإحتمالات مستعملا الشجرة يجب معرفة القواعد الآتية :

- ❖ مجموع إحتمالات الغصون الإبتدائية يساوي **1**
- ❖ مجموع كل إحتمالات الغصون الثانو ية المنطلقة من نفس العقدة يساوي **1**
- ❖ إحتمال مسار ما هو جداء إحتمالات الأغصان المؤدية إليه .
- ❖ لحساب إحتمال حادثة ما نتبع المسارات المؤدية إليها عبر غصن الشجرة ويكون إحتمال هذه الحادثة يساوي مجموع إحتمالات هذه المسارات .

مـــثــال (13)

نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات متتابعة و نسجل النتيجة " وجه = F " ، " ظهر = P " ولتكن الحادثة " الحصول على ظهرين ووجه "

✔ أنشئ مخطط يوضح كل الحالات. ثم استنتج احتمال الحادثة A

التقويم

تطبـــــــــــيق

نفرض أن احتمال ميلاد ذكر واحتمال ميلاد أنثى في عائلة ما متساويين .

ما احتمل أن يكون في عائلة ذات **4** أفراد.

① البكر هو الذكر (المولود الأول) .

② عدد الإناث يساوي عدد الذكور. ③ يوجد إناث فقط.

عمــــل منــــزلي

تمارين 11 ← 17 الصفحة 390 تمارين 22 ← 30 الصفحة 391

ملاحظة حول سير الحصة

....

....

مذكرة رقم 24

ثانوية : طوبري محمد – محمد بوضياف –
السنة الدراسية : 2019 – 2020
يــوم :
المدة : ساعة.

المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية.
ميدان التعلم : الإحتمالات.
المحور : الإحتمالات.
الموضوع : الأمل الرياضياتي، التباين والانحراف المعياري لقانون الاحتمال

الأستاذ: فراحتية المحفوظ

✍ المكتسبات القبلية: نمذجة تجربة عشوائية، مجموعة الإمكانيات، الحوادث والعمليات عليها، تعيين قانون إحتمال.
✍ الكفاءات المستهدفة: حساب الأمل الرياضياتي، التباين والانحراف المعياري لقانون احتمال.
✍ الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الـدرس	المدة
مرحلة الإنطلاق التشخيص و الإكتشاف بـناء معـارف	(انظر أدناه)	

نشـــــــــــــاط :

لتكن التجربة العشوائية التالية: رمي زهرة نرد غير مزيفة 50 مرة.

❶ إملأ الجدول التالي حيث f_i تمثل التواترات التجريبية و p_i تمثل التواترات النظرية (الاحتمالات).

e_i	1	2	3	3	4	5	6
f_i							
p_i							

❷ احسب الوسط الحسابي للسلسلةالمحصلة. ثم احسب العدد $E = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. ماذا تستنتج؟

❸ احسب التباين للسلسلة المحصلة ،ثم أحسب العدد $v = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E)^2$

❹ احسب الجذر التربيعي لـ V.

الأمل الرياضياتي، التباين والانحراف المعياري لقانون احتمال :

لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ وليكن p احتمال على Ω
نرمز بالرمز p_i للاحتمال $p_i = p(x_i)$

الأمل الرياضياتي :

تعريف 01

✍ الأمل الرياضي لقانون الاحتمال p هو العدد E المعرف بـ: $E = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

ملاحظـــــــة :

❖ الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا قيم الطبع هي عناصر Ω والتواترات النظرية هي القيم p_i

التبايـــــن :

تعريف 02

✍تباين قانون الإحتمال p هو العدد v حيث : $v = p_1(x_1 - E)^2 + p_2(x_2 - E)^2 + ... + p_n(x_n - E)^2$

أي : $v = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E)^2$.

ملاحظـــــــة :

❖ يمكن حساب التباين بالعلاقة $V = (\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2 - E^2)$.

الإنحراف المعياري :

تعريف 03

✍ الإنحراف المعياري لقانون الإحتمال p هو الجذر التربيعي لتباينه $\sigma = \sqrt{V}$.

مثال (14)

ليكن قانون إحتمال الآتي:

x_i	-6	-5	-4	4	5	8
P_i	0.1	0.2	0.05	0.4	0.05	0.2

✔ الأمل الرياضياتي هو:

$$E = \sum_{i=1}^{6} p_i x_i = -6(0.1) - 5(0.2) - 4(0.05) + 4(0.4) + 5(0.05) + 8(0.2) = 1.65$$

✔ التباين هو:

$$v = \sum_{i=1}^{6} (x_i - E)^2 p_i = (-6 - 1.65)^2(0.1) + \cdots\cdots + (8 - 1.65)^2(0.2) = 34.4$$

✔ الانحراف المعياري هو: $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{34.4}$

بنــاء معــارف

التقويم

تطبيـــق

نرمي زهرة نرد غير مزيفة تحمل أوجهه الأرقام التالية 1،2،2،3،3،3 و نسجل الرقم الظاهر .

✍ أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري لقانون الاحتمال الناتج.

عمـل منـزلي

تمـاريـن 42 - 43 الصفحـة 393

ملاحظة حول سير الحصة

....

....

....

الأستاذ: فراحتية المحفوظ	المستوى : السنة الثانية علوم تجريبية. ميدان التعلم : الإحتمالات. المحور : الإحتمالات. الموضوع : المتغير العشوائي.	مذكرة رقم 25 ثانوية : طوبري محمد – محمد بوضياف – السنة الدراسية : 2019 – 2020 يوم : المدة : ساعة.

✍ المكتسبات القبلية: نمذجة تجربة عشوائية، مجموعة الإمكانيات، الحوادث والعمليات عليها، تعيين قانون إحتمال.

✍ الكفاءات المستهدفة: تعيين قانون الاحتمال لمتغير عشوائي، وحساب الأمل الرياضياتي، الانحراف المعياري والتباين له.

✍ الأدوات المستعملة: الكتاب المدرسي ، مراجع، الأنترنت.

المراحل	عناصر الدرس	المدة

مرحلة الإنطلاق

نشاط :

يحتوي كيس على 4 كريات حمراء و 3 بيضاء و 5 خضراء ، نسحب كرة واحدة عشوائيا ونسجل رقمها ، يربح الشخص 3 دنانير إذا كانت الكرة خضراء و5 دنانير إذا كانت الكرة بيضاء ويخسر دينارين إذا كانت الكرة حمراء. نعتبر الدالة X والتي تعرف مقدار الربح أو الخسارة

❶ ماهي مجموعة الامكانيات التي يمكن الحصول عليها؟

❷ عين القيم المكنة للدالة X ، ثم عرف قانون احتمال الدالة X

❸ أحسب كلا من $E(X)$ ، $V(X)$ و $\sigma(X)$ حيث :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_iP_i \quad , \quad V=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2P_i \quad , \quad \sigma(X)=\sqrt{V}$$

❹ هل اللعبة في صالح اللاعب؟

التشخيص والاكتشاف

مناقشة النشاط :

① مجموعة النتائج الممكنة في هذه التجربة: $\Omega=\{R_1;R_2;R_3;R_4;B_1;B_2;B_3;V_1;V_2;V_3;V_4;V_5\}$

② • القيم الممكنة لـ X هي: $X=\{-2;3;5\}$. **(الدالة العددية X المعرفة على Ω تسمى متغيرا عشوائيا)**

• قانون إحتمال الدالة X:

الحادثة "$X=-2$" هي "سحب كرية حمراء" عدد الكريات الحمراء 4 و عدد كل الكريات 12 (حالة تساوي الاحتمال)

ومنه: $p(X=-2)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

بنفس الطريقة نجد: $p(X=3)=\frac{5}{12}$ و $p(X=5)=\frac{1}{4}$

ونمثل قانون الإحتمال بالجدول المرفق :

x_i	-2	3	5
$p(X=X_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$

③ حساب كلا من $E(X)$ ، $V(X)$ و $\sigma(X)$

• $E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_iP_i=-2(\frac{1}{3})+3(\frac{5}{12})+5(\frac{1}{4})\simeq 1.83$

• $V=\sum_{i=1}^{3}(x_i-E(X))^2P_i\simeq 7.97$ • $\sigma(X)=\sqrt{7.97}\simeq 2.82$

④ بما أن $E(X)>0$ فإن اللعبة في مضلحة اللاعب.

بناء المعارف

المتغير العشوائي :

تعريف

✍ $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ مجموعة النتائج الممكنة لتجربة العشوائية، نسمي المتغير العشوائي كل دالة عددية معرفة من Ω نحو $\mathbb{R}$.

قانون الإحتمال لمتغير عشوائي :

تعريف

$I=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ مجموعة قيم المتغير العشوائي X، ، الدالة المعرفة على I والتي ترفق بكل قيمة x_i العدد الحقيقي الموجب $p(X=x_i)$ تسمى قانون احتمال المتغير العشوائي ونعرفها بالجدول التالي

x	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x)$	p_1	p_2	...	p_n

مـــثـــال (15)

نرمي زهرة نرد سليمةاوجهها مرقم من1الى 6 بحيث :
نربح $10DA$اذا ظهر الرقم1و$50D$ اذاظهرالرقم6ونخسر$20DA$ اذ ظهررقم من الارقام الباقيةالاخرى

حل

نضعX متغير عشوائي الذي يرفق بكل امكانية قيمة الربح او الخسارة الموافقة لها

ومنه مجموعة المخارج هي: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ومنه $E' = X(E) = \{-20, 10, 50\}$

ومنه $p_2 = p(X = 10) = p(\{1\}) = \frac{1}{6}$ ، $p_1 = p(X = 50) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$ ،

$p_3 = p(X = -20) = p(\{2, 3, 4, 5\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ومنه قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

x_i	-20	10	50
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

الأمل الرياضياتي لمتغير عشوائي :

تـــعريف

X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية و $p(X_i)$ إحتمال متغير كل حادثة، نسمي العدد المعرف بـ

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

بالأمل الرياضياتي للمتغير X ونرمز له بالرمز E

التباين لمتغير عشوائي :

تـــعريف

X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية و $p(X_i)$ إحتمال متغير كل حادثة، نسمي العدد المعرف بـ

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i$$

بالتباين للمتغير X ونرمز له بالرمز V

مـــبرهنة

X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية و $p(X_i)$ إحتمال متغير كل حادثة، يمكن أن نعرف التباين بالعبارة التالية

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2$$

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي :

تـــعريف

X المتغير العشوائي لتجربة عشوائية و $p(X_i)$ إحتمال متغير كل حادثة، نسمي العدد المعرف بـ

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

بالإنحراف المعياري للمتغير X ونرمز له بالرمز σ

بـــنـاء معـــارف

التقـويم

تطبيـــــــــــق

X متغير عشوائي قانون إحتماله موزع كالآتي

X	-1	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	α	α	$\frac{1}{3}$

❶ عين قيمة العدد α

❷ أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي لـ X

❸ أحسب $V(X)$ تباين X ثم الإنحراف المعياري $\sigma(X)$

عمــــل منــــزلي

- تمـاريـن 45 ← 47 الصفحـة 393
- مسـائل الصفحـة 394 - 395 - 396

ملاحظة حول سير الحصة

....

....

....