2

الدوال كثيرات حدود

مذكرة رقم 01 : التعرف على الدالة كثير حدود

مذكرة رقم 02 : جذر كثير حدود

مذكرة رقم 03 : المعادلات والمتراجحات مضاعفة التربيع

مذكرة رقم 04 : مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

مذكرة رقم 05 : مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

الشعب :
- تقني رياضي
- رياضي
- علوم تجريبية

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية 2020 – 2021

✍ للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات

profmerouani

merouaninardjiss@gmail.com

0770349020

مذكرة رقم : 01

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم **السنة الدراسية :** 2020 – 2021 **يوم :** **المدة :** 02 ساعة	**المستوى :** 02 ت ر/ع **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** الدوال كثيرات الحدود **المحتوى المعرفي :** التعرف على الدالة كثير حدود

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : القدرة على التعرف على الدوال كثيرات الحدود،وتعيين درجتها وخواصها.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	**نشاط مقترح :** بسط ثم رتب العبارة $f(x)$ حيث : $f(x) = 3x + 2x^3 - 3(2x + x^2 + 1)$. • ما هو الحد الأعلى درجة في العبارة $f(x)$، حدد معامل هذا الحد.	10د
البناء و الترسيخ	**❶ الدالة كثير حدود :** **تعريف** سمي دالة كثير حدود كل دالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ حيث n عدد طبيعي و a_0 ، a_1 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ثابتة. • يسمى العدد الطبيعي n درجة كثير حدود f، و تسمى الأعداد a_0 ، a_1 ، ... ، a_n معاملاته، ويسمى $a_p x^p$ الحد الذي درجته p.	
	مثال • كل دالة ثابتة $x \mapsto a_0$ هي كثير حدود درجته 0. • كل دالة تالفية $x \mapsto ax + b$ حيث $(a \neq 0)$: هي كثير حدود درجته 1. • كل دالة $x \mapsto ax^2 + bx + c$ حيث $(a \neq 0)$: هي كثير حدود درجته 2 (تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية). **❷ تساوي كثيري حدود :** **مبرهنة** يكون كثيرا حدود، غير معدومين متساويين إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية. **مثال** إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 3$ فإن $a = 2$ ، $b = 0$ ، $c = -1$ ، $d = 3$.	20د

مذكرة رقم : 02

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم **السنة الدراسية :** 2020 – 2021 **يوم :** **المدة :** 02 ساعة	**المستوى :** 02 ت ر/ع **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** الدوال كثيرات الحدود **المحتوى المعرفي :** جذر كثير حدود

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.

الكفاءات المستهدفة : القدرة على التعرف على الدوال كثيرات الحدود،وتعيين درجتها.

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	**نشاط مقترح :** نعتبر الدالتين كثير الحدود f و g المعرفتين بـ : $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x^3 + x$ ❶ عين كثيرات الحدود التالية : $f + g$ ، $3f - g$ ، $f \circ g$. ❷ عين الكثير الحدود $f \times g$ محددا درجته . ❸ بسط العبارة $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ ، هل يمكن إعتبار $h(x)$ كثير حدود ؟	20د
البناء و الترسيخ	**❶ عمليات على كثيرات الحدود:** - مجموع، فرق و جداء و مركب كثير حدود هي كثيرات حدود. - جداء كثيري حدود غير معدومين درجتهما nو p على الترتيب هو كثير حدود درجته $(n + p)$ - حاصل قسمة كثير حدود f على كثير حدود g ليس كثير حدود و تسمى الدالة $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ دالة ناطقة. **نشاط مقترح :** ❶ نعتبر كثير حدود من الدرجة الثالثة $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ ❷ أحسب $f(1)$ ،ماذا تستنتج؟ ❸ اوجد الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث : $f(c) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$	
	❷ جذر كثير حدود: **تعريف** ليكن f كثير حدود درجته أكبر من أوتساوي 1 و α عدد حقيقي، العدد α جذر لكثير الحدود f يعني $f(\alpha) = 0$ **❸ تحليل كثير حدود:**	30د

مبرهنة

يكن f كثير حدود درجته أكبر من أوتساوي 1 و α عدد حقيقي،إذا كان $f(\alpha) = 0$ فإنه يوجد كثير حدود g بحيث من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f(x) = (x - \alpha)g(x)$$

حيث g كثير حدود درجته أقل بدرجة واحدة من درجة f.

تمريت تطبيقي

- ليكن f كثير الحدود المعرف بـ $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
أحسب $f(2) = 0$ ، ماذا تستنتج؟ عين تحليلا لكثير الحدود f.

30د

الحل

حساب $f(2)$

$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^3 - (2)^2 - 4(2) + 4 \\ &= 8 - 4 - 8 + 4 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}$$

و منه 2 جذر لكثير الحدود f

تحليل $f(x)$

توجد عدة طرق لتحليل كثير حدود

طريقة المطابقة:

بما أن 2 جذر لـ $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود g حيث $g(x) = ax^2 + bx + c$ و عليه $f(x) = (x - 2)g(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 2)g(x) \\ &(x - 2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ f(x) &= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c \end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -1 \\ c - 2b = -4 \\ -2c = 4 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} \text{a=1} \\ b - 2a = -1 \cdots (*) \\ c - 2b = -4 \cdots (**) \\ \text{c=-2} \end{cases}$

بتعويض قيمة a في $(\times)$ نجد b=1 ، و بتعويض قيمة c في $(\times\times)$ نجد b=4

و منه $g(x) = x^2 + 4x + 1$ أي $f(x) = (x - 2)(x^2 + x - 2)$

طريقة القسمة الأقليدية:

بما أن 2 جذر لـ f فإن $f(x) = (x - 2)g(x)$ و منه

$$g(x) = \frac{f(x)}{x - 2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad - x^2 - 4x + 4 & x - 2 \\ \cline{2-2} - x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & x^2 + x - 2 \\ \cline{1-1} x^2 - 4x \quad\; & \\ - x^2 + 2x \quad\; & \\ \cline{1-1} - 2x + 4 & \\ 2x - 4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

و منه $g(x) = x^2 + 4x + 1$

مذكرة رقم : 03

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 ت ر/ع
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : الدوال كثيرات الحدود
المحتوى المعرفي: المعادلات والمترجحات من الدرجة الثانية

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : القدرة على حل المعادلات والمترجحات من الدرجة الثانية.
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
الانطلاق	**تذكير :**	20د

البناء و الترسيخ

❶ المعادلات من الدرجة الثانية :

تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول x، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: ax^2+bx+c حيث a، b، و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$.

❷ الشكل النموذجي لثلاثي حدود من الدرجة الثانية :

30د

$$A = ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

نضع $\Delta = b^2-4ac$ ومنه فإن الشكل النموذجي لثلاثي الحدود هو

$$A = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

يسمى العدد $\Delta = b^2-4ac$ مميز ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

❸ حل معادلة من الدرجة الثانية :

مبرهنة

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول x التالية: ax^2+bx+c $(a \neq 0\ )$

إذا كان	حلول ax^2+bx+c هي	تحليل ax^2+bx+c
$\Delta > 0$	$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$a(x-x_1)^2$
$\Delta < 0$	لا توجد حلول	لا يمكن التحليل

❸ المتراجحات من الدرجة الثانية :

تعريف

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية ذات المجهول x كل متراجحة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:
$ax^2+bx+c \geqslant 0\,,\ ax^2+bx+c>0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$

❹ إشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية:

الحالة الأولى $\Delta > 0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ بفرض $x_1<x_2$
نحصل على الجدول التالي :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
إشارة $x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
إشارة $x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
إشارة ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	عكس إشارة a	0	عكس إشارة a	

الحالة الثانية $\Delta = 0$

لدينا $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ حيث $x_0=\dfrac{-b}{2a}$، ومنه إشارة ax^2+bx+c من إشارة a ويمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	نفس إشارة a	

الحالة الثالثة $\Delta < 0$

إشارة ax^2+bx+c يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$+\infty$
إشارة ax^2+bx+c		نفس إشارة a	

تطبيق

✍ حل المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج تحليلا لـ $f(x)$ في كل حالة مما يأتي

1 $f(x)=x^2-3x+2$

2 $f(x)=3x^2-5x+2$

3 $f(x)=-5x^2+8x-3$

✍ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1 $f(x)=2x^2+4x-6\geqslant 0$

2 $f(x)=-x^2+10x-25\leqslant 0$

التقويم

30د

مذكرة رقم : 04

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم
السنة الدراسية : 2020 – 2021
يوم :
المدة : 02 ساعة

المستوى : 02 تر/ع
ميدان التعلم : تحليل
الوحدة : الدوال كثيرات الحدود
المحتوى المعرفي : المعادلات والمتراجحات مضاعفة التربيع

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول الدوال العددية.
الكفاءات المستهدفة : حل مسائل تستعمل فيها المعادلات والمتراجحات مضاعفة التربيع .
الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
البناء و الترسيخ	**أعمال موجهة صفحة 47:** **❶ المعادلات مضاعفة التربيع:** **تعريف** نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4+bx^2+c=0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$. حل هذه المعادلة يؤول إلى حل الجملة $\begin{cases} X=x^2 \\ aX^2+bX+c \end{cases}$ يسمى X مجهولا مساعدا بعد حل المعادلة aX^2+bX+c نستنتج حلول المعادلة ax^4+bx^2+c **مثال** حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $2x^4-5x^2+2=0 \quad (1)$ نضع $X=x^2$ ، $X>0$ و منه المعادلة (1) تكافئ : $2X^2-5X+2=0 \quad (2)$ حل المعادلة (2) حساب Δ : $\Delta=9$ ومنه $\Delta>0$ أي المعادلة تقبل حلين $X_1=\frac{1}{2}$ ، $X_2=2$ و منه حلول المعادلة (1) هي $S=\left\{\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{\frac{1}{2}},-\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$ **❷ المتراجحات مضاعفة التربيع:** **تعريف** نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول x ، كل متراجحة يمكن كتابتها على الشكل: $ax^4+bx^2+c>0$ أو $ax^4+bx^2+c \geqslant 0$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية ثابتة مع $a \neq 0$. يؤول إلى حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة ax^4+bx^2+c **مثال** حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^4-7x^2+12 \leqslant 0$	30د

① نضع : $f(x)=x^4-7x^2+12$ بوضع $x=X$ العبارة تصبح $X^2-7X+12=0$ و بعد حساب المميز نجد أن للمعادلة $f(x)=0$ حلان متمايزان هما 3 و 4 و عليه

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4-7x^2+12 \\ &= X^2-7X+12 \\ &= (X-3)(X-4) \\ f(x) &= (x^2-3)(x^2-4) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
x^2-3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول نستنتج أن حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي : $S=]-2;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};2[$

تطبيق

✍ حل المعادلة $f(x)=0$ ، ثم استنتج تحليلا لـ $f(x)$ في كل حالة مما يأتي

1 $f(x)=x^2-3x+2$

2 $f(x)=3x^2-5x+2$

3 $f(x)=-5x^2+8x-3$

✍ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1 $f(x)=2x^2+4x-6\geqslant 0$

2 $f(x)=-x^2+10x-25\leqslant 0$

التقويم

30د

مذكرة رقم : 05

الأستاذة : نرجس مرواني

ثانوية : الشهيد عبد الله شاوش سليم **السنة الدراسية :** 2020 – 2021 **يوم :** **المدة :** 02 ساعة	**المستوى :** 02 تر/ع **ميدان التعلم :** تحليل **الوحدة :** الدوال كثيرات الحدود **المحتوى المعرفي:** مجموع و جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

المكتسبات القبلية : مفاهيم أولية حول المعادلات و المتراجحات.

الكفاءات المستهدفة : حل مسائل تستعمل فيها المعادلات والمتراجحات من الدلاجة الثانية .

الأدوات المستعملة : الكتاب المدرسي، مراجع، انترنت.

المراحل	سير الحصة	الوقت
البناء و الترسيخ		30د

أعمال موجهة صفحة 46:

مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية:

✍ لتكن المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: (1) ax^2+bx+c مع $(a \neq 0)$

❖ نعلم أنه إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين هما x_1 وx_2 حيث

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad و \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

❖ إذا وضعنا $S = x_1 + x_2$ و $P = x_1x_2$ حيث S هو مجموع الحلين وPجداؤهما نجد

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

إذن $\boxed{P = \frac{c}{a}}$ و $\boxed{S = -\frac{b}{a}}$

حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر:

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخروذلك باستعمال المجموع S والجداء P

حل تمرين رقم 1 صفحة 46

تعيين عددين علم مجموعهما و جداؤهما:

مبرهنة

يكون مجموع عددين هوS وجداؤهما هو P إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلة ذات المجهول x والتي تكتب بالشكل التالي $x^2 - Sx + p$

إثبات

بفرض $S = a + b$ و $P = ab$ يكون لدينا : $b = S - a$ و $P = a(S-a)$ أي : $a^2 - Sa + P = 0$

و بالتالي فإن a حل للمعادلة $x^2 - Sx + P = 0$.

بنفس الطريقة نجد أن b حل للمعادلة $x^2 - Sx + P = 0$

عكسيا

إذا كان a و b حلين للمعادلة $x^2 - Sx + P = 0$ فإن $a + b = S$ و $ab = P$ ■

حل تمرين رقم 2 صفحة 46

تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية:

مبرهنة

نعتبر المعادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي x التالية: (1) $\quad ax^2+bx+c$ مع $(a \neq 0)$

- ❖ إذا كان $\frac{c}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين إشارتاهما مختلفتان.
- ❖ إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين تماما.
- ❖ إذا كان $\frac{c}{a} > 0$ و $\Delta > 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين تماما.

تطبيق

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x

$$(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$$

الحل

لدينا : $p=\frac{m}{m-1}$ و $S=\frac{-2(m+1)}{m+1}$

❖ إذا كــــان $m=1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الأولى $4x+1=0$ و منه $x=-\frac{1}{4}$.

❖ إذا كــــان $m \neq 1$ فإن المعادلة تصبح من الدرجة الثانية حيث: $\Delta_m = 4(3m+1)$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$	‖	$+$	

دراسة إشارة p و s

m	$-\infty$		0		1		$+\infty$
m		$-$	0	$+$		$+$	
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$+$		$-$	‖	$+$	

m	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-2m-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
S		$-$		$+$	‖	$-$	

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
Δ_m		$-$		$-$	0	$+$		$+$	‖	$+$	
S_m		$-$	0	$+$		$+$		$+$	‖	$-$	
P_m		$+$		$+$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
النتائج		المعادلة لا تقبل حلول			0	المعادلة تقبل حلين موجبين تماما	0	المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة	‖	المعادلة تقبل حلين سالبين تماما	