



سنة ثانية ثانوي
الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني: رياضيات

سلسلة تمارين حول:

الإحتمالات



[مع حلول مقترحة]

+ ملخص حول الاحتمالات

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[03 جانفي 2022]

1.

ملخص حول الالتزامات

مصطلحات وتعريف

- ◆ التجربة العشوائية: هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة
- ◆ مجموعة الإمكانات Ω : هي مجموعة الإمكانات في تجربة عشوائية ولها تسميات أخرى مثل (الحادثة الأكيدة، المجموعة الشاملة، مجموعة المخارج)

◆ الحادثة:

هي جزء من المجموعة Ω

• الحادثة الأولية (البسيطة): تحتوي على عنصر وحيد.

• الحادثة الأكيدة: هي الحادثة التي تحتوي على جميع عناصر Ω

• الحادثة المستحيلة \emptyset : هي المجموعة الخالية

• الحادثة العكسية \bar{A} : هي الحادثة التي تحوي جميع عناصر Ω ما عدا عناصر المجموعة A

قانون الاحتمال

◆ احتمال حادثة: $P(A)$ هو احتمال الحصول الحادثة A حيث: $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$
 $0 \leq P(A) \leq 1$

$Card(A)$ هو عدد عناصر المجموعة A ، $Card(\Omega)$ هو عدد عناصر المجموعة Ω

• $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$ أي: $\sum_{i=1}^n P_i = 1$

• احتمال الحادثة الأكيدة هو 1 أي $P(\Omega) = 1$ • احتمال الحادثة المستحيلة هو 0 أي $P(\emptyset) = 0$

خواص الاحتمال

◆ لتكن A و B حادثتان من Ω :

• $A \cup B$: هي العناصر المشتركة وغير المشتركة بين A و B • $A \cap B$: هي العناصر المشتركة بين A و B (بدون تكرار)

• A و B غير متلائمتين معناه $A \cap B = \emptyset$ • A و B حادثتان مستقلتان معناه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

• إذا كان $A \cap \bar{A} = \emptyset$ و $A \cup \bar{A} = \Omega$ فإن $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

• إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

• إذا كان $A \subset B$ فإن $P(A) \leq P(B)$

تساوي الاحتمال

◆ تجربة متساوية الإحتمال: هي تجربة عشوائية حيث كل الحوادث لها نفس الاحتمال

◆ مصطلحات تساوي الإحتمال: "زهرة نرد غير مزيفة" ، "قطعة نقود غير مزيفة" ، "كريات لا نفرق بينها عند اللمس"

◆ ملاحظة مهمة: لا تكفي هذه المصطلحات لاعتبار تساوي الاحتمال بل يتعلق بالسؤال المطروح أيضا.

المتغير العشوائي X

◆ المتغير العشوائي X : هو دالة معرفة على I حيث $I = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ والتي ترفق بكل قيمة x_i العدد الحقيقي الموجب

، ونعرفه بالجدول التالي:

| | | | | |
|--------------|-------|-------|-----|-------|
| x_i | x_1 | x_2 | ... | x_n |
| $P(X = x_i)$ | P_1 | P_2 | ... | P_n |

◆ الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$$

◆ التباين:

$$V(X)$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 P_i - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(X))^2$$

◆ الأمل الرياضي:

$$E(X)$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$$

2.

التمارين

انقر على كلمة الحل في كل تمرين للانتقال إليه

$$P(A \cap C) = 0.2$$

$$P(B \cup C) = 0.7$$

• احسب $P(A \cup C)$ و $P(B \cap C)$

التمرين 05 الحل

لتكن A و B حادثتين حيث: $P(A) = 0.45$ و $P(B) = 0.37$

$$P(A \cup B) = 0.82$$

• اثبت أن A و B غير متلائمتين

التمرين 06 الحل

زهرة نرد وجوها مرقمة من 1 إلى 6، احتمال ظهور الأوجه الستة يحقق العلاقة:

$$P(1) = P(2) = 2P(3) = 3P(4) = P(5) = P(6)$$

• احسب احتمال ظهور كل وجه.

التمرين 07 الحل

نظم خمس لاعبين A, B, C, D, E منافسة في لعبة الشطرنج، نفرض أن اللاعبين A, B و C لهم نفس الاحتمال للربح واللعبين D و E لهما نفس الاحتمال للربح، وأن اللاعب A له مرتين حظوظ الربح بالنسبة للاعب D

1 احسب احتمال الربح لكل لاعب

2 احسب احتمال الربح لـ D أو E

3 ما احتمال ربح A أو B أو C

4 ما احتمال ألا يربح B

التمرين 08 الحل

تكتب التلميذة "عهد" الحروف A, D, H في قصصات ورقية صغيرة ثم تضعها في كيس، تسحب عشوائياً بدون ارجاع حرف وتضعه في الجدول الآتي

| | | |
|-------|--------|--------|
| | | |
| الأول | الثاني | الثالث |

• حساب احتمال أن تكتب اكرام اسمها هكذا AHD

التمرين 09 الحل

نرمي زهرة نرد حيث وجه واحد يحمل الرقم 1، وجهان يحملان الرقم 2، ثلاثة أوجه تحمل الرقم 3

1 هل هناك تساوي احتمال؟

2 عين مجموعة الإمكانات التي من أجلها تساوي احتمال

التمرين 01 الحل

عين التجارب متساوية الاحتمال من بين التجارب العشوائية التالية:

1 رمي زهرة نرد حقيقية مرتين.

2 رمي قطعة نقدية غير متوازنة ثلاث مرات متتالية

3 سحب في آن واحد كرتين من كيس يحوي 4 كرويات لا يميز بينها باللمس (كرتان لونهما أبيض وكرية سوداء وكرية زرقاء)

4 رمي قطعة نقدية متوازنة ونسجل النتيجة:

P : ظهر، F : وجه

5 رمي قطعة نقدية مزيفة

التمرين 02 الحل

نرمي زهرة نرد متوازنة، أوجهها مرقمة من 1 إلى 6

1 عين مجموعة الإمكانات Ω

2 عين الحوادث التالية واحسب احتمالها:

A : "الحصول على رقم فردي"

B : "الحصول على رقم أولي"

C : "الحصول على رقم أكبر تماماً من 3"

D : "الحصول على رقم أكبر تماماً من 7"

E : "الحصول على رقم أصغر من أو يساوي 6"

3 كيف نسمي الحادثين D و E ؟

4 احسب $P(B \cup C)$ ، $P(A \cap C)$ و $P(\bar{A})$

التمرين 03 الحل

يحتوي كيس 15 كرية مرقمة من 1 إلى 15، نسحب عشوائياً كرية احدة ونسجل رقمها.

1 عين المجموعة الشاملة

2 عين الحادثة A : "الحصول على رقم مضاعف للعدد 5"

3 عين الحادثة B : "الحصول على رقم مضاعف للعدد 3"

4 عين الحوادث التالية: $A \cap B$ ، \bar{A} و \bar{B} ، ثم استنتج

الحادثتين $\bar{A} \cap \bar{B}$ و $\overline{A \cap B}$

التمرين 04 الحل

لتكن A, B و C ثلاث حوادث من المجموعة Ω حيث:

$$P(A) = 0.3 \quad P(B) = 0.4 \quad P(C) = 0.7$$

$$P(A \cap B) = 0.2 \quad P(A \cup B) = 0.7$$

التمرين 10

الحل

الجدول الآتي يعرف قانون احتمال متغير عشوائي X :

| | | | | |
|--------------|------|-----|----------|-----|
| x_i | -2 | -1 | α | 3 |
| $P(X = x_i)$ | 0.12 | 0.5 | β | 0.3 |

• عيّن قيمة α و β حتى يكون الأمل الرياضي مساويا لـ 0.44.

التمرين 11

الحل

الجدول التالي يمثل نتائج امتحان لتلاميذ مؤسسة ما حسب صفتهم داخلي أو خارجي

| | | |
|------|-------|-------|
| | خارجي | داخلي |
| ناجح | 195 | 212 |
| راسب | 43 | 80 |

1 نختار عشوائيا تلميذا من هاته المؤسسة، ما احتمال أن يكون:

أ/ داخلي وناجح؟

ب/ خارجي؟

ج/ راسب؟

2 نختار عشوائيا تلميذا داخليا، ما احتمال أن يكون ناجحا؟

3 نختار عشوائيا تلميذا راسبا، ما احتمال أن يكون خارجيا؟

التمرين 12

الحل

يحتوي كيس كيس على 3 قريصات بيضاء و 5 قريصات سوداء، نسحب قريصتين من الكيس على التوالي بحيث نعيد إلى الكيس القريصة المسحوبة قبل سحب القريصة الثانية.

1 مثل النتائج بمخطط (شجرة)

2 ما احتمال الحصول على نفس اللون؟

3 أعد نفس الأسئلة السابقة ومع اعتبار أننا لا نعيد القريصة الأولى قبل السحب الثاني.

التمرين 13

الحل

يحتوي صندوق 7 كرات منها ثلاث كرات سوداء مرقمة 1، 2، 3 وأربع كرات حمراء مرقمة 1، 2، 3، 4، نسحب عشوائيا كرة من الصندوق

احسب احتمال الحوادث الآتية:

• A: "الكرة المسحوبة سوداء"

• B: "الكرة المسحوبة حمراء"

• C: "الكرة المسحوبة تحمل رقما فرديا"

التمرين 14

الحل

A و B حادثتان حيث: $P(\bar{A}) = 0.44$ ، $P(\bar{B}) = 0.63$

و $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.52$

• احسب $P(A \cap B)$

التمرين 15

الحل

نفرض أنه في عيادة ولادة هناك نفس الحظوظ حتى يكون كل مولود ولد أو بنت، باعتبار الترتيب في الولادات:

1 عيّن كل الإمكانيات لعائلة بثلاث أطفال

2 احسب احتمال أن تكون عائلة بثلاث أطفال تتضمن بنتين

التمرين 16

الحل

يحتوي كيس على 4 كرات مرقمة 1، 2، 5، 7

نسحب كرتين من الكيس بحيث نعيد الكرة إلى الكيس قبل

السحب الموالي، نضع: X رقم الكرة الأولى، Y رقم الكرة الثانية

1 هات قائمة الإمكانيات الـ 16 لهذه التجربة

2 احسب احتمال الأحداث التالية:

• A: "X = 5" • B: "X + 3Y ≤ 3"

• C: "X = 2Y" • D: "X + Y عدد فردي"

التمرين 17

الحل

نرمي قطعة نقد مزيفة مرة واحدة، نسمي P الحادث: "الحصول

على ظهر" و F الحادث: "الحصول على وجه"

1 علما أن الحصول على ظهر هو $P(P) = \frac{1}{3}$ ، احسب $P(F)$

2 نرمي هاته القطعة ثلاث مرات:

أ/ ضع مخططا توضح فيه جميع الحالات الممكنة لهاته

التجربة.

ب/ ما احتمال: الحصول على "وجه"

ج/ ما احتمال الحصول على "مرتين وجه"

التمرين 18

الحل

في قسم 45 تلميذا، 14 تلميذا في نادي الموسيقى و 10

تلاميذ في نادي الرسم و 5 تلاميذ في كلا الناديين.

1 نختار عشوائيا تلميذا من هذا القسم، ما احتمال أن يكون

هذا التلميذ:

أ/ من نادي الموسيقى؟

ب/ من الناديين؟

② نختار تلميذا من نادي الرسم، ما هو احتمال أن يكون من نادي الموسيقى؟

التمرين 19

في حقيبة السفر لخليل يوجد سروالان، واحد أبيض والآخر أسود، معطفان واحد أبيض والآخر أسود وثلاثة أقمص: إثنان بيضاوان والآخر أسود، أخذ خليل بطريقة عشوائية سروالا ومعطفا و قميصا.

① بواسطة شجرة، عيّن كل الإمكانيات التي تسمح لأحمد بارتداء سروال ومعطف و قميص.

② لتكن الحادثة A : "لباس أحمد أسود"

$$P(A) = \frac{1}{12}$$

③ احسب احتمال أن يكون أحمد مرتديا سروالا ومعطفا من لونين مختلفين.

④ احسب احتمال ألا يكون أحمد مرتديا قميصا أسودا ولا معطفا أبيضاً.

التمرين 20

ليكن X متغيرا عشوائيا قانون احتماله موزع كالاتي:

| x_i | -5 | -2 | 3 | 4 | 7 |
|--------------|-----|------|-----|------|-----|
| $P(X = x_i)$ | 0.2 | 0.35 | 0.1 | 0.15 | 0.2 |

① احسب الأمل الرياضي لـ X

② عيّن تبيان X

التمرين 21

يحتوي كيس على كرتين حمراويتين وثلاث كريات خضراء وكرية زرقاء (لا يمكن التفريق بينها باللمس)، نسحب عشوائيا كرتين على التوالي من الكيس بدون إرجاع، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الخضراء المسحوبة.

① مثل النتائج باستعمال:

أ/ شجرة الاحتمالات

ب/ جدول

② عيّن قانون الاحتمال X باستعمال:

أ/ شجرة الاحتمالات

ب/ جدول

③ احسب كلا من $E(X)$ ، $V(X)$ و $\sigma(X)$

التمرين 22

يحتوي كيس على 8 كريات مرقمة من 1 إلى 8، نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس:

① ما عدد الحالات الممكنة للسحب

② ما عدد الطرق للحصول على:

أ/ كرتين تحملان رقما زوجيا

ب/ كرتين تحملان عددين مجموعهما عدد زوجي

ج/ كرتين تحملان عددين حاصل جدائهما عدد زوجي

التمرين 23

زهرة نرد غير مزيفة مكعبة نسميها A ، بها وجه يحمل الرقم 1، وجهان يحملان الرقم 2، ثلاثة أوجه تحمل الرقم 3، وزهرة نرد أخرى غير مزيفة مكعبة نسميها B ، بها وجه يحمل الرقم 1، وجهان يحملان الرقم 2، وجه يحمل الرقم 3، وجهان يحملان الرقم 4.

نرمي الزهرتان في آن واحد، ما احتمال أن يكون الرقمان

المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين:

① زوجيين

② فرديين

التمرين 24

يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء، كرتان خضروان وكرتان حمراوان، نسحب كرتين على التوالي بدون إرجاع. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات البيضاء المسحوبة، و Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

① عيّن القيم الممكنة لـ X

② عين قانون احتمال المتغير X

③ احسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير X

④ أجب عن نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للمتغير Y

⑤ نعتبر المتغير العشوائي Z حيث: $Z = X + Y$ ، وليكن N

المتغير عشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات

الخضراء المسحوبة

أ/ عبر عن Z بدلالة N

ب/ استنتج قانون احتمال Z

ج/ احسب $E(Z)$ و $\sigma(Z)$

التمرين 25 الحل

يحتوي صندوق على 5 كرات لا نفرق بينها باللمس.

منها 2 كرات بيضاء تحمل الرقم a و 2 كرات حمراء تحمل الرقم $a-2$ ، وكرة واحدة خضراء تحمل الرقم 2 حيث a عدد حقيقي موجب تماما.

(I) نسحب كرتين من الصندوق على التوالي وبدون ارجاع الكرة الأولى:

1 مثل التجربة بمخطط - شجرة الامكانيات-

2 عين مجموع الإمكانيات Ω ، ثم عرّف عليها قانون احتمال التجربة.

3 احسب احتمال الحوادث التالية:

أ / A: "الحصول على كرتين من نفس اللون"

ب / B: "الحصول على كرة خضراء"

ج / C: "الحصول على كرة بيضاء أو كرة حمراء"

(II) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة جداء الرقمين المتحصل عليهما.

1 عين جميع القيم الممكنة للمتغير X ، ثم عرّف قانون احتماله

2 بيّن أنّ الأمل الرياضياتي للمتغير X يعطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \frac{6a^2 + 2a - 3}{10}$$

3 عين قيم العدد الحقيقي a حتى يكون الأمل الرياضياتي عادلا.

التمرين 26 الحل

نختار عشوائيا عدد محصور بين 0 و 60، ليكن X المتغير العشوائي المناسب لرقم الأحاد، و Y المتغير العشوائي المناسب لرقم العشرات

1 عين قانون احتمال X وقانون احتمال Y

2 احسب $P(X = Y)$

3 احسب $P(XY > 17)$

4 احسب $P(2X + Y = 13)$

التمرين 27 الحل

تتكون باقة ورود من 3 ورود حمراء ووردتين صفراوين ووردة بيضاء، نختار عشوائيا على التوالي ورتين من الباقة دون

ارجاع

1 مثل الوضعية بشجرة الاحتمال

2 احسب احتمال الحوادث التالية:

أ / A: "الحصول على ورتين حمراوين"

ب / B: "الحصول على وردة صفراء على الأقل"

ج / C: "الحصول على ورتين ليس لهما نفس اللون"

• قرر بائع هذه الباقة أن يقترح اللعبة التالية:

يدفع الزبون m دينار ويختار ورتين بصفة عشوائية ودون

ارجاع، يربح الزبون 10 دينار إذا كانت الوردتين حمراوين،

ويربح 30 دينار إذا كانت إحدى الوردتين بيضاء، ويربح 110

إذا كانت الوردتين صفراويتين، ولا يربح أي دينار إذا لم يتحقق

أي شرط من الشروط الثلاث السابقة.

X هو المتغير العشوائي الذي يمثل الربح.

3 عين بدلالة m القيم التي يأخذها المتغير X

4 عين قانون احتمال المتغير X

5 احسب بدلالة m الأمل الرياضياتي للمتغير X

6 عين قيمة m حتى تكون اللعبة عادلة

7 إذا دفع الزبون 20 دينار، هل المشاركة في هاته اللعبة

من مصلحته.

8 احسب الانحراف المعياري للمتغير X في حالة $m = 20$

التمرين 28 الحل

(I) اقترح أستاذ على تلاميذ استجاب متكون من سؤالين،

وا احتمال أن يجيب التلميذ إجابة صحيحة هو $\frac{1}{2}$ واحتمال أن

تكون الإجابة خاطئة يساوي احتمال عدم الإجابة عن

السؤال

1 مثل هذه التجربة على شجرة الاحتمالات.

2 احسب احتمال الحوادث التالية:

A: "أن يجيب التلميذ على السؤالين"

B: "ألا يجيب التلميذ على السؤال الثاني فقط"

C: "يجيب التلميذ إجابة واحدة صحيحة على الأكثر"

(II) يتحصل التلميذ على (+2) لكل إجابة صحيحة وعلى

(-1) لكل إجابة خاطئة، وفي حالة عدم الإجابة يتحصل

على (0). وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق لكل

د / احسب $E(X)$

- ② إذا علمت أن تكلفة الجهاز هي 250 دينار، جد أصغر عدد من الجولات التي يمكن تنظيمها حتى لا تكون هناك خسارة مالية لمنظم اللعبة (بفرض أن جميع الحالات يخسر فيها اللاعب)
- ③ نريد تغيير رقم الخانة التي في الأعلى على اليمين بحيث يكون معدل الربح المالي للاعب مساوياً لـ 0، ما الرقم الذي يجب وضعه في هذه الخانة.

التمرين 31 الحل

يحتوي كيس على n قريصة (n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 7)، منها 7 قريصات بيضاء والباقي حمراء. نسحب قريصتين على التوالي وبدون ارجاع.

① نفرض في هذا السؤال أن $n = 10$:

• احسب احتمال الحوادث التالية:

A: "القريصة الأولى بيضاء والثانية حمراء"

B: "قريصة بيضاء وقريصة حمراء"

C: "القريصتان بيضاوان"

D: "القريصتان من نفس اللون"

② في هذا السؤال n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 8

و P_n هو احتمال أن تكون القريصتان المسحوبتان من لونيين مختلفين.

أ / أثبت أن:

$$P_n = \frac{14(n-7)}{n^2 - n}$$

ب / عيّن قيّم العدد الطبيعي n الذي يكون من أجلها لـ P_n قيمة حدية عظمى، ثم عيّن قيمة P_n المناسبة.

بالتوفيق

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل



مخرج مجموع النقاط المتحصل عليها. وإذا كان $X < 0$

يحصل التلميذ على 0

① ماهي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

② عرّف قانون الاحتمال X

③ احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ماذا تستنتج؟

التمرين 29 الحل

زهرة نرد مزيفة وجوهها مرقمة من 1 إلى 6، نرمي الزهرة

مرة واحدة ونهتم بالرقم الذي يظهر على الوجه العلوي

نسمّي P_i احتمال الحصول على الوجه الذي يحمل الرقم i

يُعطى: $P_2 = 0.15, P_5 = 2P_6, P_3 = 2P_1, P_1 = P_5$

و $P_4 = 2P_3$

① بيّن أن $P_1 = 0.1$ ، ثم استنتج P_6, P_5, P_4, P_3

② عيّن احتمال الحوادث الآتية:

A: "النتيجة تظهر رقم فردي"

B: "النتيجة تظهر رقم أصغر أو يساوي 3"

C: "النتيجة تظهر الرقم 2 أو 5"

D: " $A \cap C$ "

E: " $A \cup C$ "

F: " \bar{A} "

التمرين 30 الحل

جهاز الكتروني يحتوي على شاشة مكونة من 9 خانات مرقمة

كما هو في الجدول:

| | | |
|----|----|----|
| 0 | 10 | 30 |
| 0 | 20 | 0 |
| 10 | 0 | 10 |

عند وضع الجهاز في حالة تشغيل تضيء إحدى الخانات باللون

الأحمر بصفة عشوائية (جميع الخانات لها نفس حظوظ

الإضاءة). للعب جولة بالجهاز، على اللاعب أن يضع 10 دينار

لتشغيل الجهاز، فيتحصل اللاعب على مبلغ يساوي الرقم

الظاهر في الخانة المضيئة

① نرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يعطينا الربح المالي

الصافي بالدينار للاعب في كل جولة

أ / عيّن القيم الممكنة للمتغير X

ب / عيّن قانون احتمال X

ج / احسب $P(X > 0)$

3.

الخطوة

[خطوة مقترحة]

انقر على كلمة التمرين في كل حل للانتقال إليه

$$A \cap B = \{5; 15\}$$

- تعيين الحادثة \bar{A} :

$$\bar{A} = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 13; 14\}$$

- تعيين الحادثة \bar{B} :

$$\bar{B} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 13; 14\}$$

- استنتاج الحادثة $\bar{A} \cap \bar{B}$:

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1; 2; 4; 7; 8; 11; 13; 14\}$$

- استنتاج الحادثة $\overline{A \cap B}$:

$$\overline{A \cap B} = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$$

حل التمرين 04

• حساب $P(B \cap C)$:

$$\begin{aligned} P(B \cap C) &= P(B) + P(C) - P(B \cup C) \\ &= 0.4 + 0.7 - 0.7 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

• حساب $P(A \cup C)$:

$$\begin{aligned} P(A \cup C) &= P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ &= 0.3 + 0.7 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

حل التمرين 05

• اثبات أن A و B غير متلائمتين:

$$P(A \cap B) = 0 \text{ معناه } A \text{ و } B \text{ غير متلائمتين معناه}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow 0.82 &= 0.45 + 0.37 - P(A \cap B) \\ \Rightarrow 0.82 &= 0.82 - P(A \cap B) \\ \Rightarrow 0 &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

حل التمرين 06

• حساب احتمال ظهور كل وجه:

نضع $P(1) = x$ ومنه:

$$\begin{array}{lll} P(3) = 2x & P(2) = x & P(1) = x \\ P(6) = x & P(5) = x & P(4) = 3x \end{array}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 p_i &= 1 \Rightarrow x + x + 2x + 3x + x + x = 1 \\ \Rightarrow 9x &= 1 \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

إذن:

$$P(3) = \frac{2}{9} \quad P(2) = \frac{1}{9} \quad P(1) = \frac{1}{9}$$

حل التمرين 01

التجارب متساوية الاحتمال هي:

- رمي زهرة نرد حقيقية مرتين.
- رمي قطعة نقدية متوازنة P : ظهر، F : وجه

حل التمرين 02

1 تعيين مجموعة الإمكانات Ω :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

2 تعيين الحوادث وحساب احتمالاتها:

$$A = \{1; 3; 5\} ; P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{2; 3; 5\} ; P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{4; 5; 6\} ; P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$D = \emptyset ; P(D) = \frac{0}{6} = 0$$

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} ; P(E) = \frac{6}{6} = 1$$

3 نسمي الحدث D : بالحدث المستحيل

والحدث E بالحدث الأكيد

4 حساب $P(\bar{A})$, $P(A \cap C)$, $P(B \cup C)$:

$$B \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6\} \text{ لدينا:}$$

ومنه:

$$P(B \cup C) = \frac{5}{6}$$

$$A \cap C = \{3; 5\} \text{ لدينا:}$$

$$P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ولدينا:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حل التمرين 03

1 تعيين المجموعة الشاملة:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$$

2 تعيين الحادثة A : "الحصول على رقم مضاعف للعدد 5":

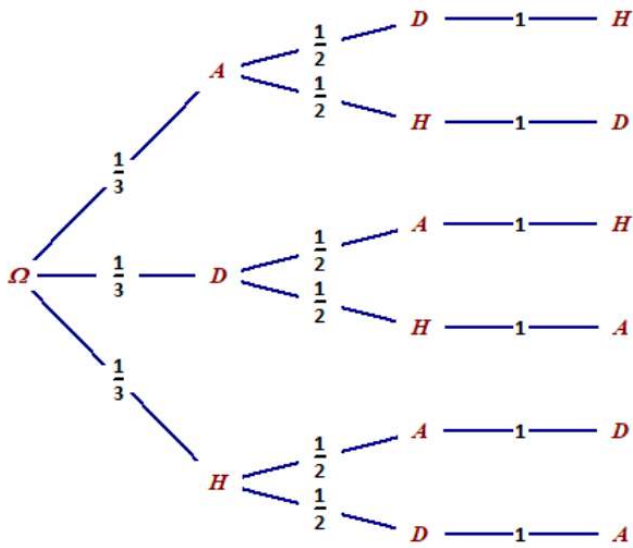
$$A = \{5; 10; 15\}$$

3 تعيين الحادثة B : "الحصول على رقم مضاعف للعدد 3":

$$B = \{3; 6; 9; 12; 15\}$$

4

- تعيين الحادثة $A \cap B$:



مجموعة الإمكانات هي:

$$\Omega = \{ADH; AHD; DAH; DHA; HAD; HDA\}$$

إذن احتمال أن تكتبها التلميذة "AHD" إسمها هو: $\frac{1}{6}$

حل التمرين 09

1 ليس هناك تساوي احتمال، لأن:

$$P(1) = \frac{1}{6}$$

$$P(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ومنه:

$$P(1) \neq P(2) \neq P(3)$$

2 مجموعة الإمكانات التي من أجلها تساوي احتمال هي:

$$\Omega = \{1; 2; 3\}$$

حل التمرين 10

• تعيين قيمة α و β :

لدينا:

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 1 \Rightarrow 0.12 + 0.4 + \beta + 0.3 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 0.18}$$

ولدينا:

$$E(X) = 0.32$$

$$\Rightarrow -2(0.12) - 1(0.4) + \alpha(\beta) + 3(0.3) = 0.44$$

$$\Rightarrow \alpha(0.18) = 0.18$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

حل التمرين 11

لدينا:

$$P(6) = \frac{1}{9}$$

$$P(5) = \frac{1}{9}$$

$$P(4) = \frac{3}{9}$$

حل التمرين 07

1 حساب احتمال الربح لكل لاعب:

لدينا:

$$P(A) = P(B) = P(C)$$

$$P(D) = P(E)$$

$$2P(A) = P(D)$$

$$P(D) = x \quad \text{نضع:}$$

ومنه:

$$P(A) = P(B) = P(C) = 2x$$

$$P(D) = P(E) = x$$

لدينا:

$$\sum_{i=1}^5 p_i = 1 \Rightarrow 2x + 2x + 2x + x + x = 1$$

$$\Rightarrow 8x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

إذن:

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = \frac{1}{4}$$

$$P(D) = \frac{1}{8}$$

$$P(E) = \frac{1}{8}$$

2 حساب احتمال الربح لـ D أو E:

D أو E معناه:

$$P(D) + P(E) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

3 حساب احتمال ربح A أو B أو C:

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

4 حساب احتمال ألا يربح B:

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

حل التمرين 08

• حساب احتمال أن تكتب اكرام اسمها هكذا AHD

نشكل شجرة الاحتمالات:

| | خارجي | داخلي | المجموع |
|---------|-------|-------|---------|
| ناجح | 195 | 212 | 407 |
| راسب | 43 | 80 | 123 |
| المجموع | 238 | 292 | 530 |

① احتمال أن يكون:

أ / A: "داخلي وناجح":

$$P(A) = \frac{212 + 80}{530} = \frac{292}{530}$$

ب / B: "خارجي":

$$P(B) = \frac{195 + 43}{530} = \frac{238}{530}$$

ج / C: "راسب":

$$P(C) = \frac{43 + 80}{530} = \frac{123}{530}$$

② D: نختار عشوائيا تلميذا داخليا، احتمال أن يكون ناجحا:

$$P(D) = \frac{212}{292}$$

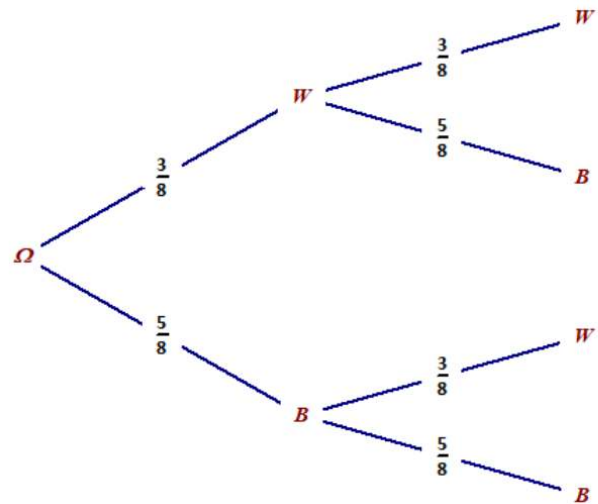
③ E: "نختار عشوائيا تلميذا راسبا احتمال أن يكون خارجيا":

$$P(E) = \frac{43}{123}$$

حل التمرين 12

① تمثيل النتائج بمخطط (شجرة):

نضع: W: القريصات البيضاء، B: القريصات السوداء



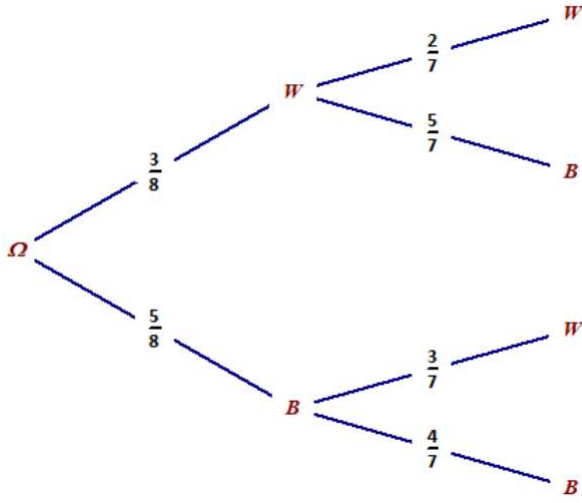
② A: "احتمال الحصول على نفس اللون":

$$P(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

③ إعادة نفس الأسئلة السابقة ومع اعتبار أننا لا نعيد

القريصة الأولى قبل السحب الثاني:

أ / تمثيل النتائج بمخطط (شجرة):



ب / B: "احتمال الحصول على نفس اللون":

$$P(B) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{13}{28}$$

حل التمرين 13

• حساب احتمال الحوادث الآتية:

- A: "الكرة المسحوبة سوداء":

$$P(A) = \frac{3}{7}$$

- B: "الكرة المسحوبة حمراء":

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

- C: "الكرة المسحوبة تحمل رقما فرديا":

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

حل التمرين 14

• حساب $P(A \cap B)$:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(\bar{A}) + 1 - P(\bar{B}) - (1 - P(\overline{A \cup B})) \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

حل التمرين 15

① تعيين كل الإمكانات لعائلة بثلاث أطفال:

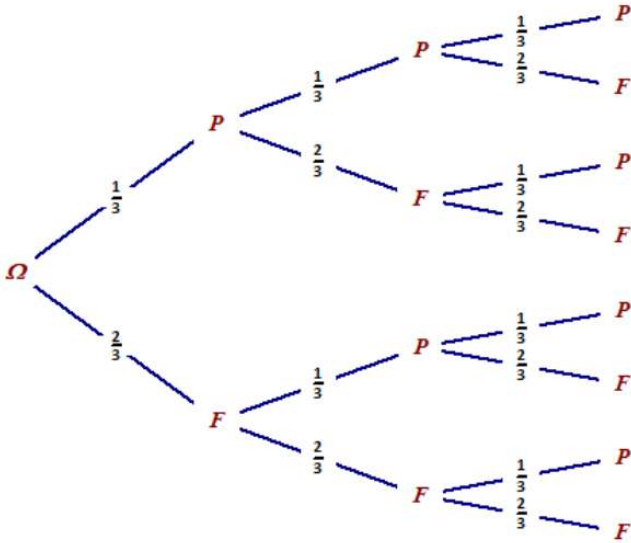
نستعين بشجرة الاحتمالات

نضع: M: ذكر F: أنثى

$$P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - P(P) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

②

أ/ وضع مخططاً نوضح فيه جميع الحالات الممكنة:



$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$$

ب/ نضع: A: "احتمال: الحصول على "وجه" ، حساب P(A):

$$P(A) = \frac{111}{333} + \frac{112}{333} + \frac{121}{333} + \frac{122}{333} + \frac{211}{333} + \frac{212}{333} + \frac{221}{333} = \frac{19}{27}$$

ج/ نضع: B: "الحصول على "مرتين وجه" ، حساب P(B):

$$P(B) = \frac{122}{333} + \frac{212}{333} + \frac{221}{333} + \frac{221}{333} = \frac{16}{27}$$

حل التمرين 18

①

أ/ نضع: A: "احتمال: التلميذ من نادي الموسيقى" ، حساب

$$P(A)$$

$$P(A) = \frac{14}{45} + \frac{5}{45} = \frac{19}{45}$$

ب/ نضع: B: "احتمال: التلميذ من الناديين" ، حساب P(B):

$$P(B) = \frac{14}{45} + \frac{10}{45} + \frac{5}{45} = \frac{29}{45}$$

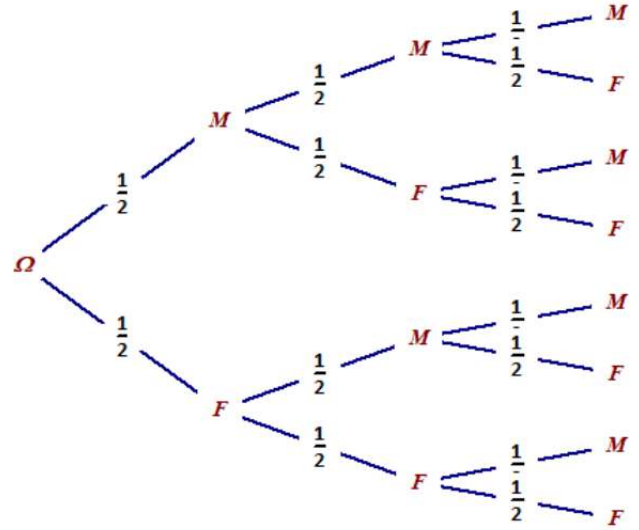
② نضع: C " نختار تلميذاً من نادي الرسم، احتمال أن يكون

من نادي الموسيقى" ، حساب P(C):

$$P(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

حل التمرين 19

① تعيين كل الإمكانيات:



ومنه كل الإمكانيات هي:

$$\Omega =$$

$$\{MMM; MMF; MFM; MFF; FMM; FMF; FFM; FFF\}$$

② حساب احتمال أن تكون عائلة بثلاث أطفال تتضمن بنتين:

نسمي هاته الحادثة ب: A

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

حل التمرين 16

① هات قائمة الإمكانيات الـ 16 لهذه التجربة

| Y \ X | 1 | 2 | 5 | 7 |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1 | (1; 1) | (2; 1) | (5; 1) | (7; 1) |
| 2 | (1; 2) | (2; 2) | (5; 2) | (7; 2) |
| 5 | (1; 5) | (2; 5) | (5; 5) | (7; 5) |
| 7 | (1; 7) | (2; 7) | (5; 7) | (7; 7) |

قائمة الإمكانيات هي:

$$\Omega = \{(1; 1); (1; 2); (1; 5); (1; 7); (2; 1); (2; 2); (2; 5); (2; 7); (5; 1); (5; 2); (5; 5); (5; 7); (7; 1); (7; 2); (7; 5); (7; 7)\}$$

② حساب احتمال الأحداث التالية A, B, C و D:

$$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{0}{16} = 0$$

$$P(C) = \frac{1}{16}$$

$$P(D) = \frac{0}{16} = \frac{6}{16}$$

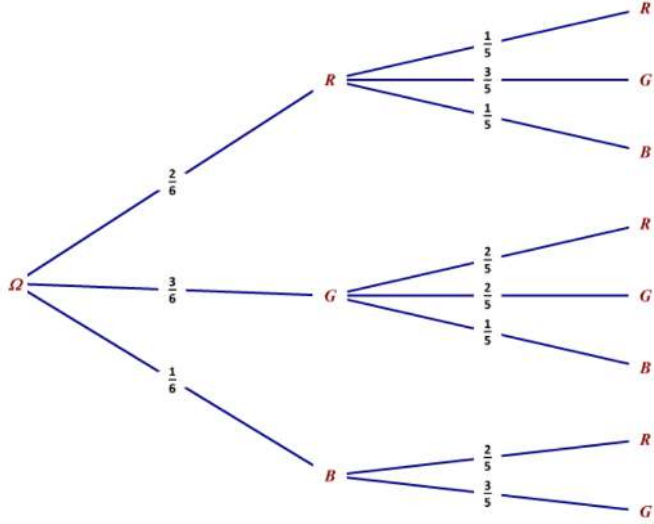
حل التمرين 17

① حساب P(F):

حل التمرين 21

1 تمثيل النتائج باستعمال
أ/ شجرة الاحتمالات:

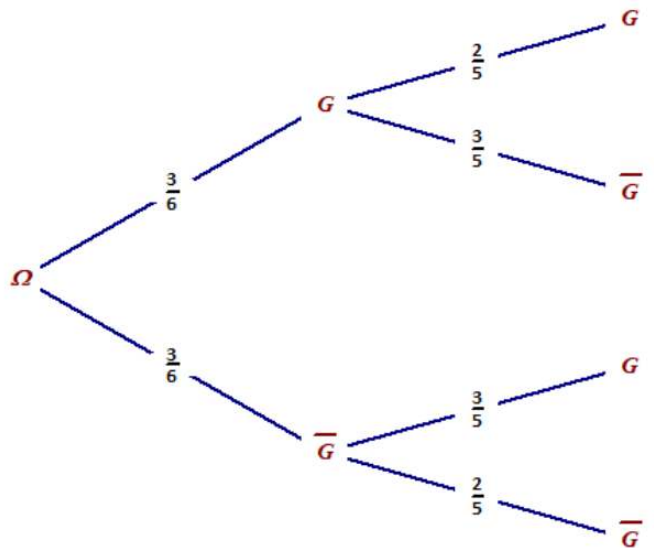
نضع: R: الكرة الحمراء، G: الكرة الخضراء، B: الكرة الزرقاء



ب/ جدول:

| السحبة 1 \ السحبة 2 | R | G | B |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|
| R | $\frac{2}{30}$ | $\frac{6}{30}$ | $\frac{2}{30}$ |
| G | $\frac{6}{30}$ | $\frac{6}{30}$ | $\frac{3}{30}$ |
| B | $\frac{2}{30}$ | $\frac{3}{30}$ | 0 |

2 تعيين قانون الاحتمال X باستعمال:
أ/ شجرة الاحتمالات:

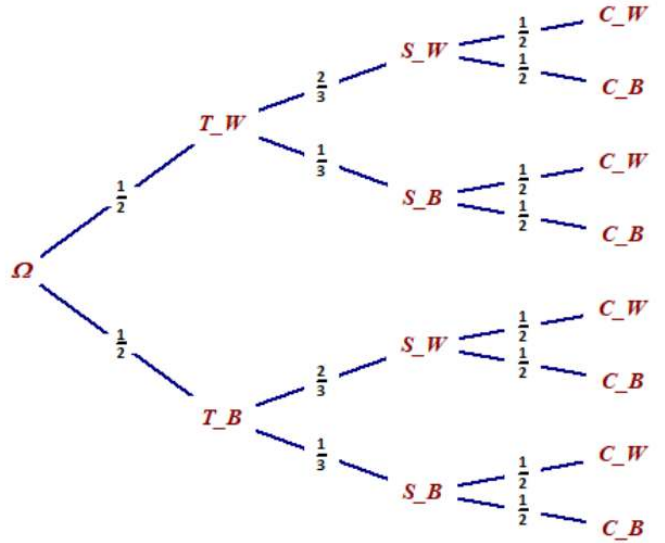


ب/ جدول:

| | | | |
|--------------|----------------|-----------------|----------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{6}{30}$ | $\frac{18}{30}$ | $\frac{6}{30}$ |

نضع:

T: سروال
S: قميص
C: معطف
W: أبيض
B: أسود



2 تبين أن $P(A) = \frac{1}{12}$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

3 نضع D: "أحمد مرتديا سروالا ومعطفا من لونين مختلفين"، حساب D:

$$P(D) = \frac{121}{232} + \frac{111}{222} + \frac{121}{232} + \frac{111}{222} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

4 نضع E: "الأ يكون أحمد مرتديا قميصا أسودا ولا معطفا أبيضاً"، حساب E:

$$P(E) = \frac{121}{222} + \frac{121}{222} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

حل التمرين 20

1 حساب الأمل الرياضياتي لـ X:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^5 x_i p_i \\ &= (-5)(0.2) + (-2)(0.35) + (3)(0.1) \\ &\quad + (4)(0.15) + (7)(0.2) \\ &= \boxed{0.6} \end{aligned}$$

2 تعيين تباين X:

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i - E(X)^2 \\ &= (-5)^2(0.2) + (-2)^2(0.35) + (3)^2(0.1) \\ &\quad + (4)^2(0.15) + (7)^2(0.2) - 0.6^2 \\ &= \boxed{19.14} \end{aligned}$$

• احتمال أن يكون الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين

للزهرتين:

① A: "زوجيين":

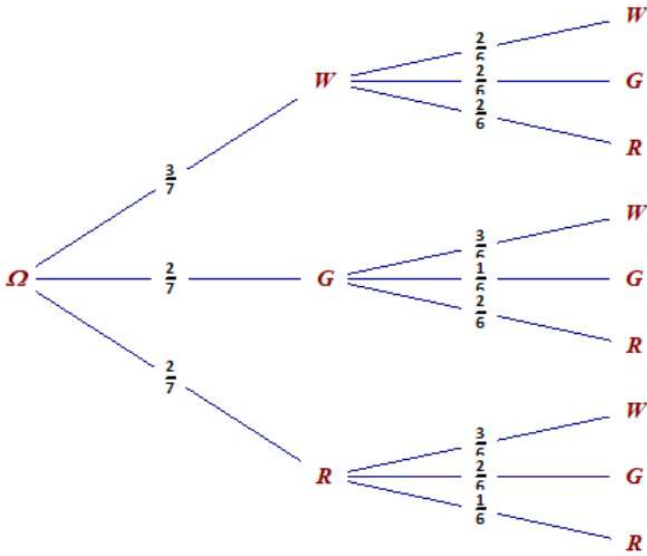
$$P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

② B: "فرديين":

$$P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

حل التمرين 24

نستعين بشجرة الاحتمالات:



① تعيين القيم الممكنة لـ X:

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

② تعيين قانون احتمال المتغير X:

| | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |

③ حساب الأمل الرياضياتي والتباين للمتغير X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7}$$

$$= \frac{6}{7} \approx 0.8$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^3 (x_i^2 p_i) - (E(X))^2$$

$$= 0^2 \cdot \frac{2}{7} + 1^2 \cdot \frac{4}{7} + 2^2 \cdot \frac{1}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2$$

$$= \frac{20}{49} \approx 0.4$$

④ الإجابة عن نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للمتغير Y:

أ / تعيين القيم الممكنة لـ Y:

$$Y(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

③ حساب كلا من $E(X)$, $V(X)$ و $\sigma(X)$:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{6}{30} + 1 \cdot \frac{18}{30} + 2 \cdot \frac{6}{30}$$

$$= \frac{30}{30} = 1$$

$$V(X) = 0^2 \cdot \frac{6}{30} + 1^2 \cdot \frac{18}{30} + 2^2 \cdot \frac{6}{30}$$

$$= \frac{42}{30} - 1 = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0.63$$

حل التمرين 22

① تعيين عدد الحالات الممكنة للسحب:

| | | | | | | | | |
|---|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | / | (2; 1) | (3; 1) | (4; 1) | (5; 1) | (6; 1) | (7; 1) | (8; 1) |
| 2 | / | / | (3; 2) | (4; 2) | (5; 2) | (6; 2) | (7; 2) | (8; 2) |
| 3 | / | / | / | (4; 3) | (5; 3) | (6; 3) | (7; 3) | (8; 3) |
| 4 | / | / | / | / | (5; 4) | (6; 4) | (7; 4) | (8; 4) |
| 5 | / | / | / | / | / | (6; 5) | (7; 5) | (8; 5) |
| 6 | / | / | / | / | / | / | (7; 6) | (8; 6) |
| 7 | / | / | / | / | / | / | / | (8; 7) |
| 8 | / | / | / | / | / | / | / | / |

من الجدول نجد أن عدد الحالات الممكنة للسحب هو 28

② تعيين عدد الطرق للحصول على:

A / "كريتين تحملان رقما زوجيا":

$$P(A) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

B / "كريتين تحملان عددين مجموعهما عدد زوجي":

$$P(B) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

ج / "كريتين تحملان عددين حاصل جدائهما عدد زوجي":

$$P(C) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

حل التمرين 23

• نلخص جميع الحالات الممكنة في جدول:

| | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| A \ B | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 1 | (1; 1) | (2; 1) | (2; 1) | (3; 1) | (3; 1) | (3; 1) |
| 2 | (1; 2) | (2; 2) | (2; 2) | (3; 2) | (3; 2) | (3; 2) |
| 2 | (1; 2) | (2; 2) | (2; 2) | (3; 2) | (3; 2) | (3; 2) |
| 3 | (1; 3) | (2; 3) | (2; 3) | (3; 3) | (3; 3) | (3; 3) |
| 4 | (1; 4) | (2; 4) | (2; 4) | (3; 4) | (3; 4) | (3; 4) |
| 4 | (1; 4) | (2; 4) | (2; 4) | (3; 4) | (3; 4) | (3; 4) |

$$= \frac{50}{147} \approx 0.34$$

ومنه:

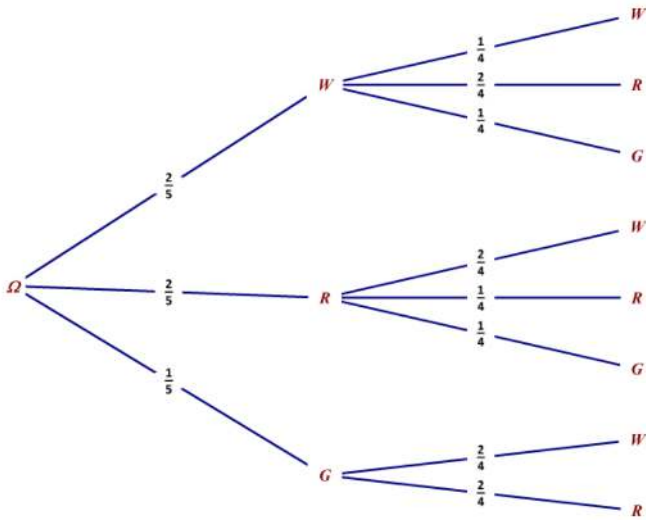
$$\bullet \sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{\frac{50}{147}} \approx 0.58$$

حل التمرين 25

(I)

1 تمثيل التجربة بمخطط - شجرة الامكانيات:-

نضع: R: الكرة الحمراء، W: الكرة البيضاء، G: الكرة الخضراء



2 تعيين مجموع الإمكانيات: Ω

$$\Omega = \{WW; WR; WG; RW; RR; RG; GW; GR\}$$

- تعريف قانون احتمال التجربة:

| x_i | WW | WR | WG | RW | RR | RG | GW | GR |
|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| p_i | $\frac{2}{20}$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{2}{20}$ |

3 حساب احتمال الحوادث التالية:

أ/ A: "الحصول على كرتين من نفس اللون":

$$P(A) = P(WW) + P(RR) \\ = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

ب/ B: "الحصول على كرة خضراء":

$$P(B) = P(WG) + P(RG) + P(GW) + P(GR) \\ = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

ج/ C: "الحصول على كرة بيضاء أو كرة حمراء":

$$P(C) = P(\Omega) = 1$$

(II)

1 تعيين جميع القيم الممكنة للمتغير X:

ب/ تعيين قانون احتمال المتغير Y:

| x_i | 0 | 1 | 2 |
|--------------|-----------------|-----------------|----------------|
| $P(Y = x_i)$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{1}{21}$ |

ج/ حساب الأمل الرياضي والتباين للمتغير Y:

$$\bullet E(Y) = 0 \frac{10}{21} + 1 \frac{10}{21} + 2 \frac{1}{21} = \frac{4}{7} \approx 0.57$$

$$\bullet V(Y) = 0^2 \frac{10}{21} + 1^2 \frac{10}{21} + 2^2 \frac{1}{21} - \left(\frac{4}{7}\right)^2 \\ = \frac{50}{147} \approx 0.34$$

5 نعتبر المتغير العشوائي Z حيث: $Z = X + Y$ ، وليكن N

المتغير عشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات

الخضراء المسحوبة

أ/ التعبير عن Z بدلالة N:

لدينا عدد الكرات المسحوبة هو 2

$$Z + N = 2 \quad \text{ومنه:}$$

$$\boxed{Z = 2 - N} \quad \text{إذن:}$$

ب/ استنتاج قانون احتمال Z:

$$N(\Omega) = \{0; 1; 2\} \quad \text{لدينا:}$$

إذن:

لما $N = 0$ نجد: $Z = 2$ أي:

$$P(N = 0) = P(Z = 2)$$

لما $N = 1$ نجد: $Z = 1$ أي:

$$P(N = 1) = P(Z = 1)$$

لما $N = 2$ نجد: $Z = 0$ أي:

$$P(N = 2) = P(Z = 0)$$

ومنه:

$$Z(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

لدينا:

| x_i | 0 | 1 | 2 |
|--------------|-----------------|-----------------|----------------|
| $P(N = x_i)$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{1}{21}$ |

ومنه:

| x_i | 0 | 1 | 2 |
|--------------|----------------|-----------------|-----------------|
| $P(Z = x_i)$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{10}{21}$ |

ج/ حساب $E(Z)$ و $\sigma(Z)$:

$$\bullet E(Z) = 0 \frac{1}{21} + 1 \frac{10}{21} + 2 \frac{10}{21} = \frac{10}{7} \approx 1.42$$

لدينا:

$$\bullet V(Z) = 0^2 \frac{1}{21} + 1^2 \frac{10}{21} + 2^2 \frac{10}{21} - \left(\frac{10}{7}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{45}{61} = \frac{16}{61}$$

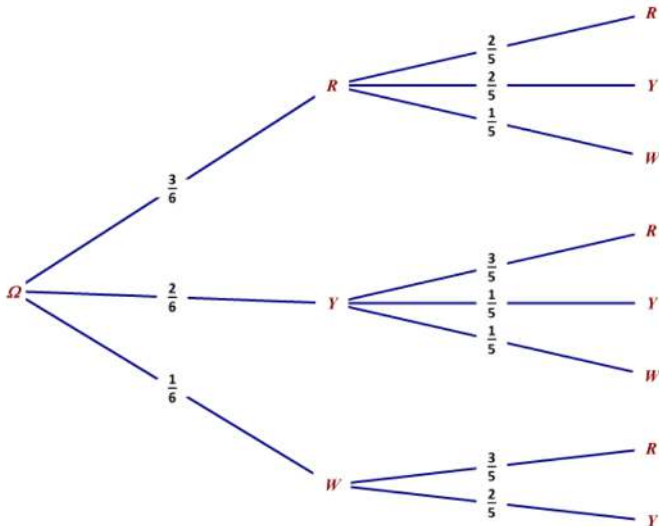
④ حساب $P(2X + Y = 13)$

$$P(2X + Y = 13) = \frac{3}{61}$$

حل التمرين 27

① تمثيل الوضعية بشجرة الاحتمال:

نضع: R : الوردة الحمراء، Y الوردة صفراء، W : الوردة بيضاء



② حساب احتمال الحوادث التالية:

أ/ A : "الحصول على وردتين حمراوين":

$$P(A) = P(RR) = \frac{32}{65} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

ب/ B : "الحصول على وردة صفراء على الأقل":

$$P(A) = P(RY) + P(YR) + P(YY) + P(YW) + P(WY)$$

$$= \frac{32}{65} + \frac{23}{65} + \frac{21}{65} + \frac{21}{65} + \frac{12}{65} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

ج/ C : "الحصول على وردتين ليس لهما نفس اللون":

$$P(C) = 1 - (P(RR) + P(YY))$$

$$= 1 - \left(\frac{32}{65} + \frac{21}{65}\right) = \frac{30}{65} - \frac{8}{65} = \frac{22}{65} = \frac{11}{30}$$

③ تعيين بدلالة m القيم التي يأخذها المتغير X :

$$X = \{10 - m; 30 - m; 110 - m; -m\}$$

④ تعيين قانون احتمال المتغير X :

| | | | | |
|--------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| x_i | $10 - m$ | $30 - m$ | $110 - m$ | $-m$ |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{6}{30}$ | $\frac{10}{30}$ | $\frac{2}{30}$ | $\frac{12}{30}$ |

⑤ حساب بدلالة m الأمل الرياضي للمتغير X :

| | | | | | |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| x_i | a^2 | $a(a-1)$ | $2a$ | $(a-1)^2$ | $2(a-1)$ |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{4}{20}$ |

② تعيين أن الأمل لـ X يعطى بـ $E(X) = \frac{6a^2 + 2a - 3}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = \frac{2a^2}{20} + \frac{8a(a-1)}{20} + \frac{8a}{20} + \frac{2(a-1)^2}{20} + \frac{8(a-1)}{20} = \frac{2a^2 + 8a^2 - 8a + 8a + 2a^2 + 2 - 4a + 8a - 8}{20} = \frac{12a^2 + 4a - 6}{20} = \frac{6a^2 + 2a - 3}{10}$$

③ تعيين قيم a حتى يكون الأمل الرياضي عاديًا:

يكون الأمل الرياضي عاديًا لما $E(X) = 0$

$$E(X) = 0 \Rightarrow \frac{6a^2 + 2a - 3}{10} = 0$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(6)(-3) = 79 = (2\sqrt{19})^2 \quad \text{لدينا:}$$

ومنه:

$$a_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{19}}{12} = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{19}}{6}$$

$$a_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{19}}{12} = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{19}}{6}$$

a_2 مرفوض لأن $a \in \mathbb{R}_+$

إذن قيم a حتى يكون الأمل الرياضي عاديًا هي $\{a_1\}$

حل التمرين 26

① تعيين قانون احتمال X وقانون احتمال Y :

| | | | | | | | | | | |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

| | | | | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $P(Y = x_i)$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |

② حساب $P(X = Y)$:

لدينا: $card(\Omega) = 61$

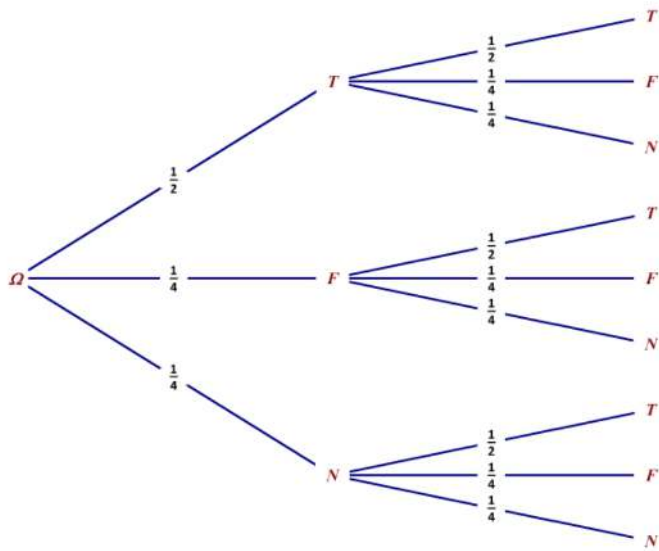
نضع $X = Y: A$

$$A = \{00; 11; 22; 33; 44; 55\}$$

$$P(A) = P(X = Y) = \frac{6}{61}$$

③ حساب $P(XY > 17)$:

$$P(XY > 17) = 1 - P(XY \leq 17)$$



② حساب احتمال الحواث التالية:

- A: "أن يجيب التلميذ على السؤالين":

$$P(A) = P(TT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- B: "ألا يجيب التلميذ على السؤال الثاني فقط":

$$P(B) = P(TN) + P(FN) + P(NN) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

- C: "يجيب التلميذ إجابة واحدة صحيحة على الأكثر":

$$P(C) = P(TT) + P(TF) + P(TN) + P(FT) \\ + P(FN) + P(NT) \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

(II)

① القيم الممكنة للمتغير العشوائي X:

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}$$

② تعريف قانون الاحتمال X:

| | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 4 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

③ حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

• لدينا $E(X) > 0$ ومنه: نستنتج أن احتمال تحصل التلميذ

على نقاط جيدة كبير

حل التمرين 29

① تبين أن $P_1 = 0.1$

لدينا:

$$P_5 = 2P_6 \Rightarrow P_1 = 2P_6 \Rightarrow P_6 = \frac{1}{2}P_1$$

$$E(X) = \frac{6(10-m)}{30} + \frac{10(30-m)}{30} + \frac{2(110-m)}{30} \\ + \frac{12(-m)}{30} \\ = \frac{60 - 6m + 300 - 10m + 220 - 2m - 12m}{30} \\ = \frac{-30m + 580}{30} \\ = -m + \frac{58}{3}$$

⑥ تعيين قيمة m حتى تكون اللعبة عادلة:

$$E(X) = 0 \Rightarrow -m + \frac{58}{3} = 0 \\ \Rightarrow m = \frac{58}{3}$$

⑦ إذا دفع الزبون 20 دينار، هل المشاركة في هاته اللعبة

من مصلحته:

$$E(X) = -20 + \frac{58}{3} = \frac{-60 + 58}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

إذن إذا دفع 20 دينار اللعبة ليست في صالحه

⑧ حساب الانحراف المعياري للمتغير X في حالة $m = 20$:

لدينا:

$$V(X) = \frac{6(-10)^2}{30} + \frac{10(10)^2}{30} + \frac{2(90)^2}{30} \\ + \frac{12(-20)^2}{30} - \left(-20 + \frac{58}{3}\right)^2 \\ = \frac{22600}{30} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6776}{9}$$

ومنه:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{6776}{9}} = \frac{22\sqrt{14}}{3} \approx 27.43$$

حل التمرين 28

(I)

① تمثيل هذه التجربة على شجرة الاحتمالات:

نحسب أولاً احتمال الإجابة الخاطئة:

نضع x احتمال الإجابة الخاطئة أو عد الإجابة على السؤال

لدينا:

$$\sum p_i = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} + x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

نضع: T : إجابة صحيحة، F : إجابة خاطئة، N : عدم الإجابة

ج/ حساب $P(X > 0)$:

$$P(X > 0) = P(X = 10) + P(X = 20) \\ = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

د/ حساب $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 P_i x_i = -10 \frac{4}{9} + 0 \frac{3}{9} + 10 \frac{1}{9} + 20 \frac{1}{9} \\ = \frac{-10}{9}$$

2) إيجاد أصغر عدد من الجولات التي يمكن تنظيمها حتى لا

تكون هناك خسارة مالية لمنظم اللعبة:

• نضع n هو عدد الجولات

• مبلغ الجهاز هو 250 أي أن صاحب الجهاز رصيده -250 دينار

بفرض أن جميع الحالات يخسر فيها اللاعب أي احتمال

$$P(-10) = 1$$

ومنه:

$$-10n = -250 \Rightarrow n = 25$$

3) تعيين الرقم الذي يجب وضعه في هذه الخانة:

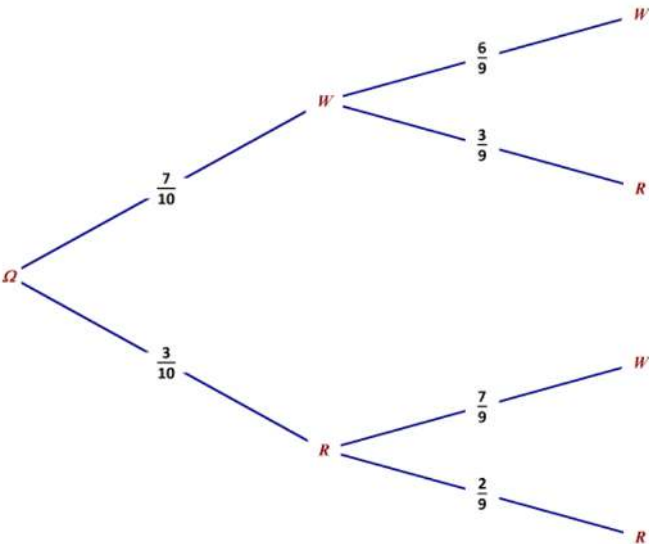
الربح المالي للاعب مساوي لـ 0 معناه $E(X) = 0$

نضع m هو رقم الخانة التي نبحث عن قيمتها

$$E(X) = 0 \Rightarrow -10 \frac{4}{9} + 0 \frac{3}{9} + 10 \frac{1}{9} + (m - 10) \frac{1}{9} = 0 \\ \Rightarrow \frac{-40}{9} + \frac{10}{9} + \frac{m}{9} - \frac{10}{9} = 0 \\ \Rightarrow \frac{m}{9} = \frac{40}{9} \Rightarrow m = 40$$

حل التمرين 31

1) نضع: W : قريصة بيضاء، R : قريصة حمراء



$$\bullet P_4 = 2P_3 \Rightarrow P_4 = 2(2P_1) \Rightarrow P_4 = 4P_1 \\ \sum p_i = 1 \Rightarrow P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1 \\ \Rightarrow P_1 + P_2 + 2P_1 + 4P_1 + P_1 + \frac{1}{2}P_1 = 1 \\ \Rightarrow \frac{17}{2}P_1 + 0.15 = 1 \\ \Rightarrow P_1 = \frac{0.85}{\frac{17}{2}} \\ \Rightarrow P_1 = 0.1$$

- استنتج P_6, P_5, P_4, P_3 :

$$2P_1 = P_3 = 0.2$$

$$2P_3 = P_4 = 0.4$$

$$P_1 = P_5 = 0.1$$

$$P_5 = 2P_6 \Rightarrow P_6 = \frac{1}{2}P_5 \Rightarrow P_6 = 0.05$$

2) تعيين احتمال الحوادث الآتية:

• A : "النتيجة تظهر رقم فردي":

$$P(A) = P_1 + P_3 + P_5 = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$$

• B : "النتيجة تظهر رقم أصغر أو يساوي 3":

$$P(B) = P_1 + P_2 + P_3 = 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45$$

• C : "النتيجة تظهر الرقم 2 أو 5":

$$P(C) = P_2 + P_5 = 0.15 + 0.1 = 0.25$$

• D : " $A \cap C$ ":

$$P(A \cap C) = P_5 = 0.1 = 0.1$$

• E : " $A \cup C$ ":

$$P(A \cup C) = P_1 + P_2 + P_3 + P_5 \\ = 0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.1 = 0.55$$

أو:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ = 0.4 + 0.25 - 0.1 = 0.55$$

• F : " \bar{A} ":

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

حل التمرين 30

1

أ/ تعيين القيم الممكنة للمتغير X :

$$X(\Omega) = \{(0 - 10); (10 - 10); (20 - 10); (30 - 10)\}$$

$$X(\Omega) = \{-10; 0; 10; 20\}$$

ب/ تعيين قانون احتمال X :

| x_i | -10 | 0 | 10 | 20 |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

$$= \frac{14(x^2 - x - 2x^2 + 15x - 7)}{(x^2 - x)^2}$$

$$= \frac{14(-x^2 + 14x - 7)}{(x^2 - x)^2}$$

لدينا: $(x^{-x})^2 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ من البسط:

$$-x^2 + 14x - 7 = 0$$

$$\Delta = 168 = (2\sqrt{42})^2 \text{ لدينا:}$$

ومنه:

$$x_1 = \frac{-14 - 2\sqrt{42}}{-2} = 7 + \sqrt{42} \approx 13.48$$

أو

$$x_2 = \frac{-14 + 2\sqrt{42}}{-2} = 7 - \sqrt{42} \approx 0.5$$

الدالة تبلغ قيمة حدية عظيمة لما $x \approx 13.48$

وبما أن $n \in \mathbb{N}$ إذن قيم n التي يكون من أجلها P_n قيمة

حدية عظيمة هي $n \in \{13; 14\}$

- تعيين قيمة P_n المناسبة:

$$P_{13} = \frac{14(13 - 7)}{13^2 - 13} = \frac{7}{13}$$

$$P_{14} = \frac{14(14 - 7)}{14^2 - 14} = \frac{7}{13}$$

إذن قيمة P_n المناسبة هي: $\frac{7}{13}$

• A: "القريصة الأولى بيضاء والثانية حمراء":

$$P(A) = P(WR) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

• B: "قريصة بيضاء وقريصة حمراء":

$$P(B) = P(WR) + P(RW)$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{21 + 21}{90} = \frac{7}{15}$$

• C: "القريصتان بيضاوان":

$$P(C) = P(WW) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{21}{90} = \frac{7}{15}$$

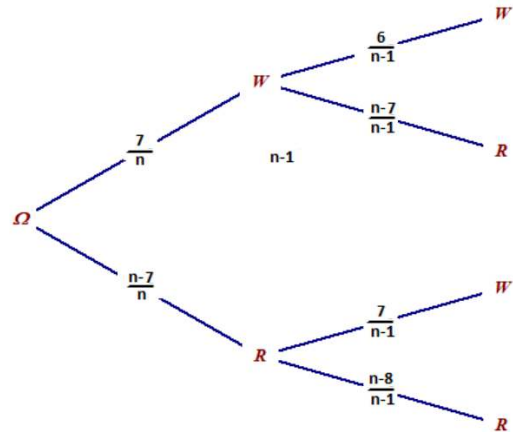
• D: "القريصتان من نفس اللون":

$$P(A) = P(WW) + P(RR)$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{42 + 6}{90} = \frac{8}{15}$$

2

أ/ اثبات أن $P_n = \frac{14(n-7)}{n^2-n}$



$$P_n = P(WR) + P(RW)$$

$$= \frac{7}{n} \times \frac{n-7}{n-1} + \frac{n-7}{n} \times \frac{7}{n-1}$$

$$= \frac{7(n-7) + 7(n-7)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{14(n-7)}{n^2-n}$$

ب/ قيم n التي يكون من أجلها P_n قيمة حدية عظيمة:

نضع

$$f(x) = \frac{14(x-7)}{x^2-x}$$

لدينا:

$$f'(x) = \frac{14x^2 - 14x - (2x-1)14(x-7)}{(x^2-x)^2}$$

$$= \frac{14x^2 - 14x - 14(2x^2 - 15x + 7)}{(x^2-x)^2}$$

بالتوفيق

♥ لا تنسوننا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم إبراهيم الخليل

