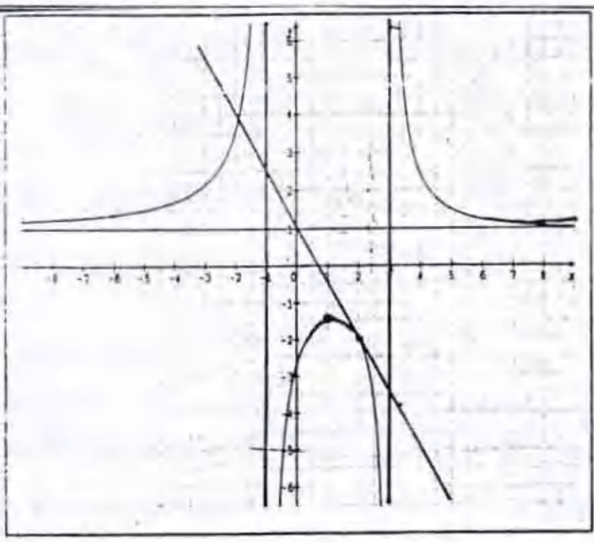
Exercices de Maths

-- Les limites (étude de fonctions) 2AS --

Par M. Moula

09 / 02 / 2009

الأستاذ: Moula	دراســــــــة الــــــدوال	Classe : 2AS



التمرين الأول

(C_g)هو التمثيل البياني للدالة g .

1- عين D_g مجموعة تعريف الدالة g ثم جد نهايتها عند الأطراف المفتوحة لـــ D_g .

2- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_g)

3- شكل جدول تغيرات الدالة g معينا القيم الحدية لها ، ثم استنتج إشارة دالتها المشتقة.

4- أكتب معادلة المماس لـــ (C_g) عند النقطة $B(2,-2)$

باستعمال التقريب التآلفي للدالة g عين قيمة مقربة للعدد $g(2,0004)$.

التمرين الثاني

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

لتكن f دالة معرفة $f(x)=\dfrac{\alpha x+2}{x+\beta}$ حيث β,α عددان حقيقيان.

1-عين D_f مجموعة تعريف f ، ثم عين العددين الحقيقيين β,α إذا علمت أن المستقيم(Δ) ذي المعادلة : $Y=x-1$ مماسا للمنحنى C_f الممثل للدالة f في النقطة ذات الإحداثيات $(0,-1)$.

2-نضع : $f(x)=\dfrac{-3x+2}{x-2}$ أحسب النهايات عند الأطراف المفتوحة لمجموعة التعريف.

3-أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4-أثبت أن النقطة $\omega(2,-3)$ مركز تناظر منحنى الدالة f .

5-عين نقط تقاطع(C_f) مع محوري الإحداثيات

6-برهن أن المستقيم(δ) ذو المعادلة $Y=-3$ مستقيم مقارب لـــ(C_f) .

أدرس وضعية(C_f) بالنسبة للمستقيم (δ).

7- g دالة معرفة بـــ $g(x)=\dfrac{|-3x+2|}{x-2}$ وضح طريقة لإنشاء منحنى الدالة g بالإستعانة بالمنحنى (C_f) (لا يطلب الإنشاء).

التمرين الثالث

I. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^2-x$

(δ)التمثيل البياني للدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

- أنشئ المنحنى (δ).

II. $P(x)$ كثير حدود للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x)=2x^3+3x^2-5$

- أحسب $P(1)$ ثم أدرس إشارة $P(x)$

III. نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $P(x)=\dfrac{x^3-x+4}{x+1}$

(C)التمثيل البياني للدالة f في المستوي المعطى.

1- أحسب نهايات f عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها.

2- بين أنه من أجل : $x\neq-1: f'(x)=\dfrac{P(x)}{(x+1)^2}$

- إستنتج اتجاه تغيرات f.

3- شكل جدول تغيرات الدالة f .

4- بين أنه من أجل $x\neq-1$ ، يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=g(x)+\dfrac{\alpha}{x+1}$ حيث α عدد حقيقي يطلب تعينه.

5- أدرس وضعية (C)بالنسبة إلى (δ).

6- أحسب نهاية الفرق $[f(x)-g(x)]$ عند $(+\infty)$و $(-\infty)$.

- فسر ذلك هندسيا.
- أرسم المنحنى (C) في نفس المعلم السابق.

التمرين الرابع

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ لتكن F دالة معرفة بـــ : $F(X)=\dfrac{\alpha X+2}{X+\beta}$ حيث β,α عددان حقيقيان.

1- عين D_f مجموعة تعريف F ، ثم عين العددين β,α إذا علمت أن المستقيم (Δ)ذو المعادلة : $Y=X-1$ مماسا للمنحنى (C_F) الممثل للدالة F في النقطة ذات الإحداثيات $(0,-1)$.

2- نضع الآن : $F(X)=\dfrac{-3X+2}{X-2}$ أحسب النهايات عند الحدود.

3- أدرس قابلية الإشتقاق عند النقطة1، ثم أكتب معادلة المماس عندها.

4- أدرس اتجاه التغيرات.

5- أثبت أن النقطة $\omega(2,\ 3)$مركز تناظر لـ (C_F).

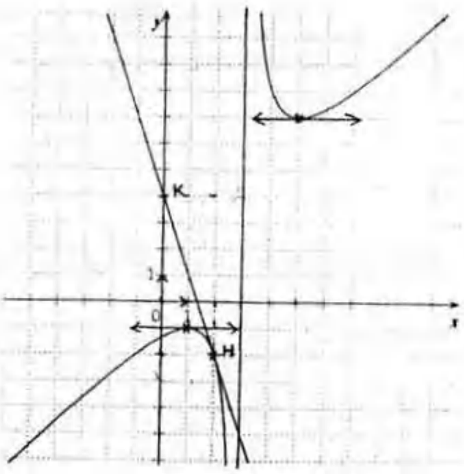
6- عين نقطة تقاطع (C_F)مع محوري الإحداثيات $(x'ox),(y'oy)$

7- بين أن (C_F)يقبل مقاربان أفقي و الآخر شاقولي.

8- أنشئ (C_F)و (Δ)بدقة.

التمرين الخامس

I. (C_u)التمثيل البياني للدالة Uفي مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس$\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ،والموضح في الشكل المقابل.



1- عين D_u مجموعة تعريف الدالة U .

- جد نهايات الدالة U عند كل حد من حدود D_u.
- استنتج معادلة المستقيم المقارب لـ (C_u)الموازي لحامل محور التراتيب.

2- شكل جدول تغيرات الدالة U معينا القيم الحدية لها.

- U'الدالة المشتقة للدالة U .
- استنتج إشارة $U'(x)$.

3- المستقيم (KH) مماس للمنحنى (C_u)عند النقطة H، أكتب معادلة له.

- باستعمال التقريب التآلفي للدالة U ، عين قيمة مقربة للعدد $u(2,0004)$.

II. لتكن V الدالة المعرفة كما يلي : $V(x)=4-2U(x)$

1- عين مجموعة تعريف الدالة V.

2- V'الدالة المشتقة للدالة V، أحسب$V'(x)$ بدلالة $U'(x)$.

- استنتج إتجاه تغيرات الدالة Vو شكل جدول تغيراتها.

التمرين السادس

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=-1+\dfrac{3}{x+2}$

- (C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب الدالة المشتقة f' للدالة f، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f .

2- أثبت أن النقطة $S(-2,-1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

3- برهن أن المستقيم الذي معادلته $y=-1$ مقارب للمنحنى (C_f).

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=-x^2-x+2$

- (C_g) التمثيل البياني للدالة g في مستو منسوب إلى المعلم السابق.

1- أدرس تغيرات الدالة g.

2- تحقق أن (C_f) و (C_g) يشملان النقطة $A(1,0)$ ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (C_g).

التمرين السابع

في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، $A(3,1)$ من أجل كل نقطة M ذات الإحداثيات $(x,0)$ مع $x\neq 3$ نرفق لها M' نقطة تقاطع (AM) مع محو لا التراتيب.

من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 3$ نرمز بـــ $f(x)$ لترتيبة النقطة M'.

1- عبري عن $f(x)$ بدلالة x و تحقق أن : $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$

2- أدرس تغيرات الدالة f أحسب $f(0)$.

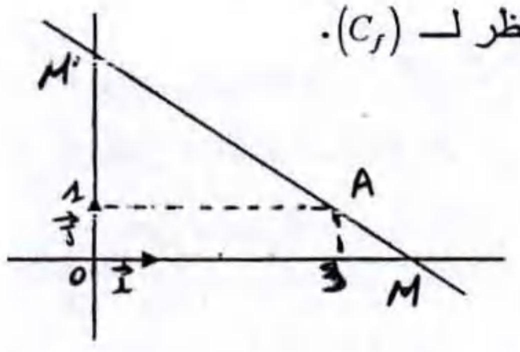
3- بين أن (C_f) منحنى الدالة f يقبل مستقيمين متقاربين يطلب معادلة كل منه [1]

4- بين أن ω نقطة تلاقي المستقيمين المتقاربين مركز تناظر لـــ (C_f).

5- أرسم (C_f).

6- g دالة معرفة بـــ : $g(x)=\dfrac{|x|}{x-3}$

استنتج جدول تغيرات الدالة g.



التمرين الثامن

- f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x)=x^3-x^2+ax+b$
- (C_f) منحناها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس.

1- عين العددين : b,a بحيث : $f(0)=7, f'(1)=0$

2- بأخذ $a=-1$ و $b=7$

1) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f .

2) عين جدول تغيراتها .

3) عين حصرا للدالة f في المجال $[0,1]$.

4) أثبت أنه توجد نقطتان A و B من (C_f) المماس فيهما يوازي (Δ) / $(\Delta): y=-x$

- يطلب كتابة معادلة المماس عند كلا منهما.

5) أنشئ المنحنى البياني للدالة f في المجال $[-2,2]$.

التمرين التاسع

- نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ و d,c,b,a أعداد حقيقية.

1- عين الثوابت d,c,b,a بحيث يقبل (C_f) عند النقطتين $M_0(1,5)$ و $M_1(2,4)$ مماسين يوازيان محور الفواصل.

2- نعتبر الآن الدالة f : $f(x)=2x^3-9x^2+12x$

- ادرس تغيرات الدالة f و انشئ منحناها (C_f).

3- ناقش حسب قيم m بيانيا حلول المعادلة : $f(x)=2m-4$

4- نعتبر الدالة g وحيث $g(x)$ معرف كما يلي : $g(x)=2|x^3|-9x^2+12|x|$

5- أثبت أن g زوجية.

6- استنتج و أنشئ منحناها (C_g) في معلم آخر.

7- أنشئ المنحنى (C_h) للدالة h المعرفة كما يلي : $h(x)=2(x+1)^3-9(x+1)^2+12x+12$

8- هل الدالة g قابلة للإشتقاق من أجل $x_0=0$.

التمرين العاشر

f الدالة المعرفة بالشكل : $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أوجد مجموعة تعريف الدالة f .

2- بين أنه يوجد عددان حقيقيان b,a بحيث من أجل كل x من $D_f : f(x)=a+\dfrac{bx}{x^2-1}$:

3- أدرس إتجاه تغير الدالة f .

4- Ω نقطة هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عن النقطة Ω.

6- أوجد وضعية (C_f) و (T).

التمرين الحادي عشر

f الدالة المعرفة بالشكل: $f(x)=\dfrac{4x^2-2}{2x+1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f.

1- أوجد مجموعة تعريف الدالة f .

2- أوجد الأعداد الحقيقية c,b,a حيث : $x\in D_f : f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2x+1}$

3- ليكن d مستقيما معادلته : $y=2x-1$

- أوجد وضعية المنحنى (C) و المستقيم d .

4- أدرس تغيرات الدالة f .

5- لتكن I نقطة فاصلتها $-\dfrac{1}{2}$ من (C_f).

- أثبت أن النقطة مركز تناظر للمنحنى (C_f).

6- بين أنه توجد نقطتان من المنحنى يكون عندهما المماس موازيا للمستقيم d الذي معادلته $y=3$ يطلب تعيين فاصلتهما .

التمرين الثاني عشر

f الدالة المعرفة بالشكل : $-5 \le x \le +5 : f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

(C)التمثيل البياني للدالة f .

أ- أوجد مجموعة تعريف الدالة f .

- أوجد نقط تقاطع المنحني(C) مع محوري الإحداثيات.

ب- لتكن الدالة g المعرفة بالشكل : $g(x)-x^3-3x-4$ ، $-5 \le x \le +5$

- أدرس تغيرات الدالة g .
- عين جدول تغيرات الدالة g .

ليكن α جدرا لكثير الحدود $g(x)$،$(\alpha \cong 2.2)$.

- عين إشارة $g(x)$من أجل $-5 \le x \le +5$.

ج- عين الدالة f' المشتقة للدالة f .

- بين أن : $f(x)=\dfrac{x-g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f .

- أكتب جدول تغيرات الدالة f .
- أوجد لأعداد الحقيقية σ,β,α حيث: $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{x+\sigma}{x^2-1}$
- **أدرس وضعية المنحني (C)بالنسبة للمستقيم d الذي معادلته : $y=x+2$**

التمرين الثالث عشر

- **الجزء أ:**

نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=2x^3-3x^2-1$ ، (C_g)تمثيلها البياني .

1- أدرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا αحيث : $1,6 \le \alpha \le 1,7$

3- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

- **الجزء ب:**

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالشكل : $f(x)=\frac{1-x}{x^3+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

2- إستنتج إتجاه تغير الدالة f.

3- شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{1}{2},5\right]$.

4- عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة0.

5- ادرس وضعية (C_f) مع (T).

6- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

7- أرسم (C_f) و المماس (T) في المجال $\left[-\frac{1}{2},5\right]$.

التمرين الرابع عشر

I. f الدالة المعرفة على : $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$

1- أوجد $f'(x)$ من أجل كل x من $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$.

2- أوجد إشارة $f'(x)$، شكل جدول تغيرات f.

3- أدرس وضعية المنحني (C_f) و المستقيم الذي معادلته : $y=x$.

4- أوجد معادلة للمماس الذي معامل توجيهه يساوي $\frac{4}{3}$.

II. g الدالة المعرفة كما يلي : $g(x)=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-4}\right)$ ، (Γ) تمثيلها البياني.

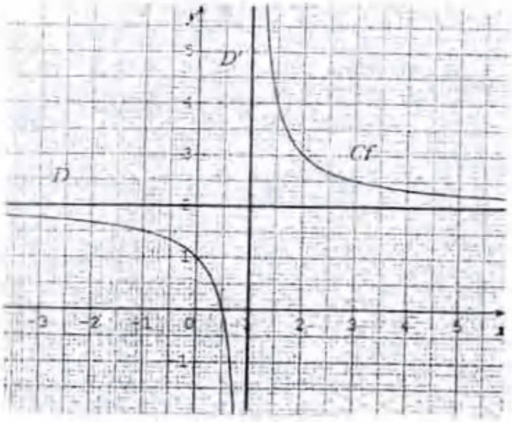
1- أثبت أنه من أجل كل x من $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$: $g(-x)=-f(x)$

2- أثبت أنه من أجل كل x من $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

3- ثم أحسب $g'(x)$ و استنتج إتجاه تغيرات الدالة g.

التمرين الخامس عشر

I. المنحنى المقابل C_f يمثل الدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. C_f يقبل مستقيمين مقاربين D و D' و $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.



1- عين مجموعة تعريف f و نهايات f عند حدود D_f .

2- أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3- نفرض أن من أجل كل x من D_f لدينا : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ عين الأعداد الحقيقية c,b,a .

4- تحقق أن من أجل كل x من $D_f : f(x)=2+\dfrac{1}{x-1}$ ، أكتب معادلة المماس Δ لـ C_f عند النقطة A التي فاصلتها 2 ، بين أن C_f يقبل مماسا أخر Δ' عند نقطة B حيث Δ' يوازي Δ عين النقطة B و معادلة Δ'.

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $g(x)=\alpha x^2+\beta x+3$ ، α و β عددين حقيقيين و C_g تمثيلها البياني في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أوجد α و β علما أن C_f و C_g يقبلان نفس المماس عند النقطة A .

2- أدرس تغيرات g ، بين أن C_f و C_g يتقطعان في نقطة أخرى C يطلب تعيينها.

3- أرسم C_f ، C_g ، Δ ، Δ' في نفس المعلم.

4- حل بيانيا المتر حة : $f(x)\le g(x)$

التمرين السادس عشر

I. لتكن f دالة عددية معرفة : $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$

و ليكن (C_f) التمثيل البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- عين العددين الحقيقيين : b,a حتى يقبل (C_f) مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة

$K(3,3)$.

2- عين الأعداد الحقيقية : σ,β,α بحيث : $\forall x\in D_f : f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\sigma}{x-1}$

3- أدرس تغيرات الدالة f و أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

4- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل و ليكن (Δ).

5- أرسم المنحنى (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي : m عدد و إشارة حلول المعادلة :
$x^2-(m+3)x+m+6=0$

II. لتكن M نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين ، برهن أن M هي مركز تناظر لـ (C_f).

III. لتكن g دالة عددية معرفة : $\dfrac{x^2-3|x|+6}{|x|-1}$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني .

1- عين D_g مجموعة تعريف g ثم عبر بدلالة $f(x)$ عن $g(x)$ في مجالات يطلب تعيينها.

2- بالإستعانة بالمحنى (C_f) أنشئ و في نفس المعلم المنحنى C_g الممثل للدالة g.

التمرين السابع عشر

I. لتكن f دالة عددية معرفة : $f(x)=\dfrac{9(x+1)}{x^2}$ و ليكن (C_f) التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f و أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

2- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياها و لتكن ω .

3- أكتب معادلة المماس (E) للمنحنى (C_f) في النقطة ω .

4- أنشئ في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق (C_f) و المماس (E) .

II. ليكن h دالة عددية معرفة: $h(x)=\dfrac{-9|x|+9}{x^2}$

1- عين D_h مجموعة تعريف الدالة h ثم قارن بين : $h(x)$ و $h(-x)$.

2- عبر بدلالة $f(x)$ عن $h(x)$ في مجالات يطلب تعيينها ، ثم أنشئ (C_h) في نفس المعلم.

3- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة. $mx^2+9|x|-9=0$