مجلة Top Maths

Bouchenak Youssouf — نشر الملف بتاريخ 07 جانفي 2022

الاشتقاقية وتطبيقاتها

السنة الثانية جميع الشعب العلمية

2^{as}

المجلة تتضمن

- درس
- 11 تمرين محلول
- 08 مسائل محلولة

إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

Num 07.76.60.8058

Tlemcen

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

مجلة Top Maths في الاشتقاقية
المجلة موجهة لتلاميذ السنة الثانية
علوم تجريبية ❖ رياضيات ❖ تقني رياضي

إعداد الأستاذ بوشناق يوسف

❑تجدون في هذا الملف

❶ درس مفصل

❷ 11 تمرين محلول

❸ 08 مسائل نموذجية محلولة

Tlemcen بوشناق يوسف Num 07.76.60.80.58

رَبِّ قَدْ آتَيْتَنِي مِنَ الْمُلْكِ وَعَلَّمْتَنِي مِن تَأْوِيلِ الْأَحَادِيثِ ۚ فَاطِرَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ أَنتَ وَلِيِّي فِي الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ ۖ تَوَفَّنِي مُسْلِمًا وَأَلْحِقْنِي بِالصَّالِحِينَ

الاشتقاقية

نشاط 1 :

يسقط جسم A سقوطا حرا بدون سرعة ابتدائية $(v=0)$ في اللحظة $t=0$ فتكون حركته متغيرة بانتظام و محددة بالمعادلة الزمنية $d=f(t)=5t^2$ حيث t هي المدة بالثانية و d هي المسافة بالمتر.سرعة الكرة عند اللحظة t تسمى السرعة اللحظية

1.السرعة المتوسطة للجسم المتحرك بين اللحظتين t_0 و t_1 هي $v_m=\dfrac{d(t_1)-d(t_0)}{t_1-t_0}$.نريد حساب السرعة اللحظية عند اللحظة $t=3$.للتقرب من v_3 نحسب السرعة المتوسطة بين اللحظتين $t=3$ و $t=3+h$ حيث h عدد حقيقي قريب من الصفر

أ-تحقق من أن $v_3=30+5h$.

ب-أحسب v_3 من أجل قيم h التالية: $0,1$ ؛ $0,01$ ؛ $0,001$ ؛ $0,0001$.

ج-استنتج قيمة مقربة لـ v_3.

2.أ-أحسب السرعة المتوسطة v_t بين لحظتين t و $t+h$.

ب-استنتج السرعة اللحظية عند لحظة كيفية t .

الحل:

1.أ) $v_3=\dfrac{d(3+h)-d(3)}{h}=\dfrac{5(3+h)^2-5\times 3^2}{h}=\dfrac{5h^2+30h}{h}=30+5h$

ب)

h	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
v_3	$30,5$	$30,05$	$30,005$	$30,0005$

نلاحظ أنه كلما يقترب h من الصفر السرعة المتوسطة v_3 تقترب أكثر فأكثر من $30m/s$.

ج) نستنتج أن القيمة المقربة للسرعة اللحظية v_3 هي $30m/s$

2.أ) $v_m=\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}=\dfrac{5(t+h)^2-5\times t^2}{h}=\dfrac{5h^2+10th}{h}=10t+5h$

ب) نلاحظ أنه كلما يقترب h من الصفر السرعة المتوسطة v_m تقترب أكثر فأكثر من $10t$.إذن نستنتج السرعة اللحظية عند لحظة كيفية t هي $v(t)=10t$.

تعليق:- عندما يأخذ h قيما قريبة بقدر ما أمكن من العدد 0 فالسرعة تصبح لحظية (زمنية) عند اللحظة t ونرمز لها بـ $\lim\limits_{h\to 0} v_m$ ونكتب $v(t)=\lim\limits_{h\to 0} v_m$.

الدالة القابلة للاشتقاق عند قيمة والعدد المشتق

التعريف:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I و x_0 عدد حقيقي من المجال I.

نقول عن الدالة f أنها تقبل الاشتقاق عند القيمة x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث العبارة $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ تقبل النهاية ℓ لما h يقترب من الصفر.

العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f عند القيمة x_0 ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

إذن: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

ملاحظة1:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

تمرين رقم 01

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+2x-1$.

• عين العدد المشتق للدالة f عند $x_0=2$.

حـــل:

من أجل كل عدد حقيقي h يختلف عن 0 لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\frac{(2+h)^2+2(2+h)-1-7}{h}\\&=\frac{4+4h+h^2+4+2h-8}{h}\\&=\frac{h^2+6h}{h}\\&=h+6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to 0}(h+6)\\&=6\end{aligned}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 و $f'(2)=6$.

تمرين رقم 02

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2+2$.

أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعيّن دالتها المشتقة

حل

لدينا $f(x)=-x^2+2$. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

ليكن x_0 عدد حقيقي . $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ هي نسبة تزايد الدالة f بين العددين x_0 و x_0+h مع $h\neq 0$

ومنه $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\left[-(x_0+h)^2+2\right]-(-x_0^2+2)}{h}=\frac{-2x_0h-h^2}{h}=-2x_0-h$

وبالتالي : $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to0}(-2x_0-h) = -2x_0$

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. ولدينا $f'(x)=2x$.

مثال 1:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}$. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 4 و حدد العدد المشتق عند 4.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\frac{1}{4}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 4 و العدد المشتق عند 4 هو $f'(4)=\frac{1}{4}$.

مثال 2:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x}$. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 و حدد العدد المشتق عند 1.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-1}{1+h}=-1$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 و العدد المشتق عند 1 هو $f'(1)=-1$.

مشتقة دالة

تعريف:

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$.

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f إذا و فقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f.

مشتقة الدالة f هي الدالة التي نرمز لها الرمز f' و المعرفة كما يلي: $f':x_0\mapsto f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

مثال 1:

عين الدالة المشتقة للدالة $f:x\mapsto x^2$

ليكن $x_0\in\mathbb{R}$. $f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}(2x_0+h)=2x_0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة x_0 من $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة معرفة كما يلي: $f':x\mapsto 2x$

مثال 2:

عين الدالة المشتقة للدالة $f:x\mapsto\sqrt{x}$

ليكن $x_0\in\mathbb{R}$. $f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة x_0 من $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة معرفة كما يلي: $f':x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال 3:

عين الدالة المشتقة للدالة $f:x\mapsto\frac{1}{x}$

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ، $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x_0^2+hx_0}=\frac{-1}{x_0^2}$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل قيمة x_0 من $\mathbb{R}^*$ و دالتها المشتقة معرفة كما يلي: $f':x\mapsto\frac{-1}{x^2}$

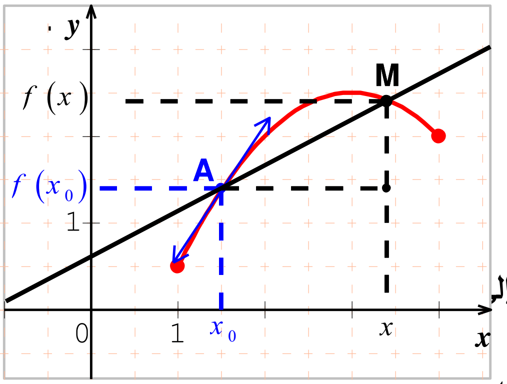
ملخص

مشتقة الدوال المألوفة :

$f(x)$	$f'(x)$	**مجالات قابلية الاشتقاق**
k (**حيث k ثابت حقيقي**)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x\mapsto\frac{1}{x^n}$ ($n\in\mathbb{N}$	$x\mapsto-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

مماس منحني دالة عند نقطة منه

نشاط 2 :



نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;4]$ وقابلة للاشتقاق عند x_0

C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

A النقطة من C_f فاصلتها x_0 .

لتكن M نقطة متغيرة من C_f فاصلتها x ونضع $h=x-x_0$.

1) عين معامل توجيه المستقيم (AM) بدلالة h .

2) ماذا يعتبر المستقيم (AM) عندما نقرب النقطة M بقدر ما أمكن إلى

3) أعط تفسيرا هندسيا للعدد المشتق للدالة f عند القيمة x_0 .

4) أكتب معادلة للمستقيم (AM) في حالة M قريبة جدا من النقطة A .

حل النشاط

1) معامل توجيه المستقيم (AM) هو $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2) المستقيم (AM) يصبح مماسا للمنحني C_f في النقطة A .

3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس للمنحني C_f في النقطة A .

4) معادلة المماس هي من الشكل $y=f'(x_0)x+b$ بما أن النقطة A تنتمي إلى المماس فإن

$f(x_0)=f'(x_0)x_0+b$ ومنه $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$ إذن معادلة مماس المنحني C_f في النقطة A هي

$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0$

أي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

مماس منحني دالة عند نقطة منه :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة على مجال مفتوح I يشمل x_0 .

نتيجة 1:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن منحنيها C_f يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة x_0 , معامل توجيهه $f'(x_0)$.

نتيجة 2 :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 فإن $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ هي معادلة المماس للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

تمرين رقم 03

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x^2+2$.

ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

• عين معادلة لـ(T) مماس المنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .

حـــل:

• في التمرين المحلول الأول رأينا أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ و $f'(x) = -2x$ ؛ إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 1 و $f'(1) = -2$ و بالتالي 2ـ هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند A لدينا $f(1) = 1$.

معادلة للمماس (T) هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

و نستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y = -2x+3$.

تمرين رقم 04

f و g دالتان معرفتان على المجال $]-\infty, 0[$ بـ: $f(x) = x^2$ و $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

ليكن (C_f) و (C_g) رسميهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

عين المماسات المشتركة للمنحنيين (C_f) و (C_g) .

حـــل:

الدالتان f و g قابلتان للإشتقاق على $]-\infty, 0[$.ولدينا:

$f'(x) = 2x$ و $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

$A(x_0, f(x_0))$ نقطة من (C_f) و $B(x_1, g(x_1))$ نقطة من (C_g) .

ليكن (T) مماس (C_f) عند النقطة A و (T') مماس (C_g) عند النقطة B .

معادلة لـ (T) : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ أي $y = 2x_0x - x_0^2$

معادلة لـ (T') : $y = g'(x_1)(x-x_1) + g(x_1)$ أي $y = -\dfrac{1}{x_1^2}x + \dfrac{2}{x_1}$

(T) و (T') منطبقان معناه $\begin{cases} 2x_0 = -\dfrac{1}{x_1^2} \\ -x_0^2 = \dfrac{2}{x_1} \end{cases}$

بحل هذه الجملة نحصل على $x_0 = -2$ و $x_1 = -\dfrac{1}{2}$.

و منه معادلة (T) و (T') : $y = -4x-4$.

التقريب التآلفي

لدينا $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ ومنه إذا كان $h\simeq 0$ فإن $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\simeq f'(x_0)$ ومنه $f(x_0+h)-f(x_0)\simeq hf'(x_0)$ أي $f(x_0+h)\simeq f(x_0)+hf'(x_0)$ ويسمى التقريب التآلفي

بوضع $x-x_0=h$ نجد $f(x)\simeq f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ ومنه أحسن تقريب تآلفي للمنحني هو مماسه عند نقطته ذات الفاصلة x_0

تمرين رقم 05

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+2x+1$.

ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم (O,I,J) .

- عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 0 .
- عين تقريبا تآلفيا للدالة f بجوار 0 .
- عين قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$.

حـــل:

- بنفس الطريقة المعتمدة في التمرين المحلول1 الدالة f قابلة للإشتقاق عند كل نقطة x من $\mathbb{R}$ ، و $f'(x)=2x+2$ ، إذن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة 0 و $f'(0)=2$ و بالتالي 2 هو معامل توجيه المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0. لدينا $f(0)=1$ و منه معادلة للمماس (T) هي : $y=f'(0)(x)+f(0)$.
و نستنتج أن معادلة للمماس (T) هي $y=2x+1$.
- تقريب تآلفي لـ f بجوار 0 هو $f'(0)(x)+f(0)$ أي $2x+1$. و الدالة $g:x\mapsto 2x+1$ هي أحسن تقريب تآلفي لها.
- $1.00004=1+4\times10^{-5}$ و $f(x)=(1+x)^2$ و منه قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي $1+2\times4\times10^{-5}$ أي 1.00008 إذن قيمة مقربة للعدد $(1.00004)^2$ هي 1.00008

العمليات على الدوال المشتقة

1.مبرهنة:

إذا كانت f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ وكان λ عدد حقيقي فإن الدوال $(f+g)$، $(f\times g)$ و (λf) قابلة للاشتقاق على D ولدينا: $(f+g)'=f'+g'$ ، $(f\times g)'=f'g+g'f$ ، $(\lambda f)'=\lambda f'$

ـ وإذا كانت الدالة g لا تنعدم على D فإن الداللتين $\left(\frac{1}{g}\right)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)$ قابلتين للاشتقاق على D ولدينا:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2} \text{ و } \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

2. مشتقة الدالة: $g:x\mapsto f(ax+b)$

مبرهنة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$. a و b عددان حقيقيان. E مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى D . الدالة $g:x\mapsto f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على E و دالتها المشتقة g' هي : $g':x\mapsto af'(ax+b)$. حيث g' مشتقة الدالة g على D.

ملاحظة:

الدالة g هي دالة مركبة من الدالة $k:x\mapsto ax+b$ متبوعة بالدالة f أي $g=f\circ k$.

نتائج:

1. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ وكانت موجبة تماما على D فإن الدالة $\sqrt{f}$ تقبل الاشتقاق على D
ولدينا: $\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.
2. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال D حيث لا تنعدم على D فإن الدالة f^n تقبل الاشتقاق على D ولدينا: $(f^n)'=nf'f^{n-1}$.

تطبيقات:

1) عين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على المجال I في الحالات التالية:

أ ـ $f(x)=x^2-3x+1$ و $I=\mathbb{R}$.

ب ـ $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{2x-1}$ و $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

جـ ـ $f(x)=\dfrac{-2}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$.

د ـ $f(x)=x^3$ و $I=\mathbb{R}$.

هـ ـ $f(x)=x\sqrt{x}$ و $I=]0;+\infty[$.

حل للتطبيقات:

1) تعيين الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على المجال I في الحالات التالية:

أ ـ $f(x)=x^2-3x+1$ و $I=\mathbb{R}$: f' معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f'(x)=2x-3$

ب - $f(x)=\frac{x^2+3x-2}{2x-1}$ و $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$:

f' معرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x-1)-2(x^2+3x-2)}{(2x-1)^2}$ أي

$f'(x)=\frac{4x^2-2x+6x-3-2x^2-6x+4}{(2x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+1}{(2x-1)^2}$.

جـ- $f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$:

f' معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f'(x)=\frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}$ أي $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}^2\sqrt{x}}=\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

د- $f(x)=x^3$ و $I=\mathbb{R}$: لدينا: $f(x)=x\times x^2$ ومنه: f' معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f'(x)=1\times x^2+x(2x)$ أي $f'(x)=x^2+2x^2=3x^2$.

هـ- $f(x)=x\sqrt{x}$ و $I=]0;+\infty[$: f' معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}}$ أي

$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

تمرين رقم 06

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=x^3+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حـل:

الدالة f هي مجموع ثلاثة دوال u ، v و w . حيث: $u:x\mapsto x^3$ ، $v:x\mapsto\frac{1}{x}$ و $w:x\mapsto\sqrt{x}$.

هذه الدوال الثلاثة قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto 3x^2$ ، $v':x\mapsto-\frac{1}{x^2}$ و $w':x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$. ودالتها المشتقة هي : $f':x\mapsto 3x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

تمرين رقم 07

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=(x^3+x+1)\sqrt{x}$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حـل:

الدالة f هي جداء دالتين u و v . حيث: $u:x\mapsto x^3+x+1$ ، $v:x\mapsto\sqrt{x}$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto 3x^2+1$ ، $v':x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.ودالتها المشتقة f' هي: $f'(x)=(3x^2+1)\sqrt{x}+(x^3+x+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

تمرين رقم 08

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-7x^3+4x^2+3x-2$.

عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

حـــل:

الدالة f هي دالة كثير حدود .إذن فهي قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ (تطبيق المبرهنات السابقة). و دالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x)=(-7)\times(3x^2)+(4)\times(2x)+(3)\times(1)+0$$
$$f'(x)=-21x^2+8x+3$$

تمرين رقم 09

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{3x+5}{2x-4}$.

- عين مجموعة تعريف الدالة f.
- عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

حـــل:

- تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $2x-4\neq 0$.

$2x-4=0$ معناه $x=2$

لتكن D_f مجموعة تعريف الدالة f و منه $D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$.

- الدالة f هي نسبة دالتين u و v أي $f=\frac{u}{v}$. حيث: $u:x\mapsto 3x+5$ ، $v:x\mapsto 2x-4$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$ نعلم أن : $u':x\mapsto 3$ ، $v':x\mapsto 2$.

بما أن $v(x)\neq 0$ على D_f وحسب مبرهنة نسبة دالتين فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$. و دالته المشتقة f' معرفة بـ: $f'(x)=\frac{3(2x-4)-2(3x+5)}{(2x-4)^2}=\frac{-22}{(2x-4)^2}$

تمرين رقم 10

لتكن الدالة f المعرفة على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ كما يلي : $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

- عين الدالة المشتقة f' للدالة f.

حـــل:

- الدالة f معرفة على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ لأن على هذا المجال $\cos x\neq 0$.

الدالة f هي نسبة دالتين u و v أي $f=\frac{u}{v}$. حيث: $u:x\mapsto \sin x$ ، $v:x\mapsto \cos x$.

هاتان الدالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ونعلم أن : $u':x\mapsto \cos x$ ، $v':x\mapsto -\sin x$.

بما أن $v(x)\neq 0$ على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وحسب مبرهنة نسبة دالتين فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

دالتها المشتقة f' معرفة بـ:

$$f'(x)=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

تمرين 11

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{2x-6}$.

- عين مجموعة تعريف الدالة f .

- عين الدالة المشتقة f' للدالة f .

حـــل:

- تكون الدالة f معرفة إذا وفقط إذا كان $2x-6\geq 0$.

$2x-6\geq 0$ معناه $x\geq 3$

لتكن D_f مجموعة تعريف الدالة f و منه $D_f=[3,+\infty[$.

- الدالة f هي مركبة من الدالة $v:x\mapsto 2x-6$ تتبعها الدالة $u:x\mapsto\sqrt{x}$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و نعلم أن $v':x\mapsto 2$.

الدالة u قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و نعلم أن $v':x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

الدالة v موجبة تماما على $]3,+\infty[$. إذن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]3,+\infty[$

وتطبيقا لمبرهنة مشتقة الدالة $x\mapsto u(ax+b)$ نجد أن : $f'(x)=2\times\frac{1}{2\sqrt{2x-6}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$$

ملخص

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

تطبيقات الاشتقاقية

.إتجاه تغير دالة:

مبرهنة:(تقبل بدون برهان)

لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة .

- إذا كانت f' موجبة تماما(يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال D_f .
- إذا كانت f' سالبة تماما(يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f .
- إذا كانت f' معدومة على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على المجال D_f .

ملاحظة:

إذا كانت دالة f إما متزايدة تماما و إما متناقصة تماما على مجال D_f نقول أن الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f: x \mapsto -x^3+2$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' حيث : $f': x \mapsto -3x^2$.

الدالة f' سالبة تماما على $\mathbb{R}^*$ و تنعدم في النقطة المعزولة 0 إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

القيم الحدية المحلية لدالة:

مبرهنة:(تقبل بدون برهان)

لتكن دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I و f' دالتها المشتقة .

- إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال I' محتوى في I يشمل c تقبل فيه f تقبل قيمة حدية $f(c)$. تسمى $f(c)$ قيمة حدية محلية .

ملاحظة: • يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على I .

. حصر دالة:

نتائج

لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $[a,b]$ و f' دالتها المشتقة .

- إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

- إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$

$$f(b) \le f(x) \le f(a)$$

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $[-3,1]$ كما يلي : $f: x \mapsto x^2+2x-3$.

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و داتها المشتقة f' هي : $f': x \mapsto 2x+2$.

الدالة f' سالبة تماما على $[-3,-1[$ و $f'(-1)=0$ إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3,-1[$.

الدالة f' موجبة تماما على $]-1,1]$ إذن الدالة f متزادة تماما على المجال $]-1,1]$.

جدول التغيرات:

x	-3		-1		1
$f(x)$	0	↘	-4	↗	0

من أجل كل x من المجال $[-3,-1]$ ، $f(-1)\le f(x)\le f(-3)$ أي $-4\le f(x)\le 0$

من أجل كل x من المجال $[-1,1]$ ، $f(-1)\le f(x)\le f(1)$ أي $-4\le f(x)\le 0$

نقطة الانعطاف

تعريف:

f دالة قابلة للاشتقاق عند a .

القول أن النقطة $A(a;f(a))$ هي نقطة انعطاف لمنحني الدالة f إذا كان المماس عندها يخترق المنحني فيها.

مبرهنة: إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند a وإذا كانت دالتها المشتقة f' تقبل الاشتقاق عند a حيث $f''(x)$ ينعدم ويغير من إشارته فإن منحني الدالة f يقبل نقطة انعطاف $A(a;f(a))$.

مثال 1:

$f:x\mapsto x^3-2x^2+4$ ؛ $f'(x)=3x^2-4x$ ؛ $f''(x)=6x-4$.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

إذن منحني الدالة f يقبل نقطة انعطاف $A\left(\frac{3}{2};\frac{7}{8}\right)$.

مسائل محلولة

مسألة 1 : البحث عن القيم الحدية

ما هو أصغر مجموع ممكن لما نضيف عددا موجبا تماما إلى مقلوبه؟

حل للمسألة:

نعتبر الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

ندرس اتجاه تغيّر هذه الدالة:

ليكن $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$ ؛ لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $x^2>0$ إذا إشارة $f'(x)$ من إشارة x^2-1 . لدينا $f'(1)=0$

لدينا من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

لدينا من أجل كل $x\in]0;1[$ ، $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]0;1]$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	2	↗	

لدينا من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، $f(x)\geq 2$ و $f(1)=2$ ومنه الدالة تقبل قيمة حدّية صغرى 2 وتبلغها عند 1
وبالتالي أصغر مجموع ممكن لما نضيف عددا موجبا تماما إلى مقلوبه هو 2 .

مسألة رقم 02

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$ وليكن (cf) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

3ـ أدرس اتجاه تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها

4ـ لتكن $\omega(2;-1)$ ، بين أن ω مركز تناظر (cf) ثم أنشئ (cf)

حل مسألة رقم 02

3ـ دراسة اتجاه تغيرات الدالة f وإنشاء جدول تغيراتها

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$ ودالتها المشتقة معرفة كما يلي: $f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة x^2-4x+3

جدول الإشارة :

x	$-\infty$ 1	2	3 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 -	||	- 0 +

الدالة f متزايدة على المجالين $]-\infty;1]$ و $[3;+\infty[$ ومتناقصة على المجالين $[1;2[$ و $]2;3]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$ 1	2	3 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 -	||	- 0 +
$f(x)$	$-\infty$ ↗ -3 ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ 1 ↗ $+\infty$

4ـ تبيين أن ω مركز تناظر (cf) ثم أنشئ (cf)

$\omega(2;-1)$

$\omega(2;-1)$ مركز تناظر (cf) معناه: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$ ، $(4-x)\in\mathbb{R}-\{2\}$ و $f(4-x)+f(x)=-2$

$x\in\mathbb{R}-\{2\}$ معناه $x\neq 2$ ومنه $-x\neq -2$ ومنه $(4-x)\neq 2$ ومنه $(4-x)\in\mathbb{R}-\{2\}$

$$f(4-x)+f(x)=4-x-3+\frac{1}{4-x-2}+x-3+\frac{1}{x-2}$$

$$=-2+\frac{1}{-x+2}+\frac{1}{x-2}=-2$$

ومنه $\omega(2;-1)$ مركز تناظر (cf)

مسألة رقم 03

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3-3x^2+4$

1. أدرس اتجاه تغير f. أحسب $f(-1)$. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارتها على $\mathbb{R}$.
2. باستعمال السؤال 1 أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ $g(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{4}{x}$

الحل:

1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. $f'(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه 0 و 2 و بالتالي فإشارته من نفس إشارة (-3) بين الجذرين أي سالبة على المجال $[0;2]$

لدينا: $f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4=0$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		0	↗	4	↘	0	↗	

من جدول التغيرات نستنتج أن $f(x)\le 0$ على $]-\infty;-1]$ و $f(x)\ge 0$ على $[-1;+\infty[$.

2. الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$ و لدينا: $g'(x)=x-3+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\dfrac{f(x)}{x^2}$

إذن إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $f(x)$ على $]-\infty;0[$ أي سالبة على $]-\infty;-1]$ و موجبة على $[-1;0[$.

نستنتج هكذا أن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ و متزايدة تماما على $[-1;0[$.

مسألة رقم 04

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=ax+\dfrac{b}{4x+2}$ مع a و b عددان حقيقيان.

1. أ- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على كل مجال من المجموعة D_f.

جـ- عين العددين a و b بحيث من أجل كل $x\in D_f$، $f'(0)=\dfrac{7}{2}$ و $f(0)=-\dfrac{3}{2}$.

ب- برّر أنه من أجل كل $x\in D_f$، $f'(x)>0$.

جـ- أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3. نسمي $\mathscr{C}_f$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ- أكتب معادلة لمماس المنحني $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

جـ- برهن أن النقطة ω ذات الإحداثيتين $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathscr{C}_f)$.

حل مسألة

1. أ- $D_f=]-\infty;-\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2};+\infty[$

ب- لدينا من أجل كل $x\in D_f$، $4x+2\neq 0$ إذن الدالة الناطقة $x\mapsto\dfrac{b}{4x+2}$ تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ؛ الدالة كثير حدود $x\mapsto ax$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f ولدينا مجموع هاتين الدالتين هو الدالة f ؛ إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند كل قيمة من D_f.

جـ- $f'(x)=a-\dfrac{4b}{(4x+2)^2}$ ؛ $f'(0)=\dfrac{7}{2}$ معناه $a-b=\dfrac{7}{2}$ ؛

$f(0)=-\dfrac{3}{2}$ معناه $\dfrac{b}{2}=-\dfrac{3}{2}$ وبالتالي نجد $b=-3$ و $a=\dfrac{1}{2}$.

ب- معادلة المماس هي $y=\dfrac{7}{2}x-\dfrac{3}{2}$.

M نقطة من $\mathscr{C}_f$ حيث $(x;y)$ إحداثيتيها في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و $(x';y')$ إحداثيتيها في المعلم $(\omega;\vec{i};\vec{j})$ من $\overrightarrow{\omega M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\omega}$ ينتج $x'=x+\dfrac{1}{2}$ و $y'=y+\dfrac{1}{4}$ ثم نجد $y'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{4x+2}+\dfrac{1}{4}$ ؛ $y'=\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{1}{x'}$

ونبرهن أن الدالة $g:x\mapsto\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{x}$ هي فردية.

$$g(-x)=\frac{1}{2}(-x)-\frac{1}{-x}=-\left(\frac{1}{2}(x)-\frac{1}{x}\right)=-g(x)$$

اذن النقطة ω ذات الإحداثيتين $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني $(\mathcal{C}_f)$

مسألة رقم 05

a و b عددان حقيقيان. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$؛ نسمي $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في معلم.

هل يوجد عددان a و b حيث تكون لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$، معادلة $y=4x+3$ عند نقطته ذات الفاصلة 0 ؟

حل مسألة

تكون لمماس المنحني $\mathcal{C}_f$، معادلة $y=4x+3$ عند نقطته ذات الفاصلة 0 إذا وفقط إذا كان $f(0)=3$ و $f'(0)=4$ أي $b=3$ و $f'(0)=4$.

لدينا $f'(x)=\frac{(9x^2+a)(x^2+1)-(3x^3+ax+3)(2x)}{(x^2+1)^2}$ ومنه $f'(0)=a$ وبالتالي $a=4$ و $b=3$.

مسألة رقم 06

ليكن $\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق عند 0 .

المستقيم T ذو المعادلة $y=2-3x$، هو المماس للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة $A(0;2)$.

1) حدد $f(0)$ و $f'(0)$.

2) فسر هندسيا العدد $\frac{f(x)-2}{x}$ من أجل $x\neq 0$.

3) برر وجود $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}$.

حل مسألة

1) $f(0)=2$ و $f'(0)=-3$.

2) العدد $\frac{f(x)-2}{x}$ من أجل $x\neq 0$ هو معامل توجيه المستقيم (AM) حيث $M(x;f(x))$.

3) لدينا $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=f'(0)=-3$.

مسألة رقم 07

$\mathcal{C}_f$ التمثيل البياني لدالة f يشمل النقطة $A(-2;3)$. T المماس للمنحني $\mathcal{C}_f$ عند النقطة A والموازي للمستقيم ذي المعادلة $3x-2y+1=0$. أكتب معادلة للمستقيم T.

حل مسألة

لدينا $3x-2y+1=0$ معناه $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ ومنه معامل توجيه المستقيم T هو $\frac{3}{2}$ إذن معادلة للمستقيم T هي $y=\frac{3}{2}(x+2)+3$ أي $y=\frac{3}{2}x+6$.

مسألة رقم 08 يجب التنبيه على قابلية الاشتقاق على اليمين و اليسار

$\mathcal{C}_f$ منحني الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+|x-1|$.

1) أثبت أنه من أجل $h\neq 0$ لدينا : $\dfrac{f(1+h)-1}{h}=h+2+\dfrac{|h|}{h}$.

2) هل العبارة $\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 ؟

3) أعط تفسيرا هندسيا للجواب عن السؤال 2) ؛ ثم أكتب معادلتي نصفي المماسين للمنحني $\mathcal{C}_f$ في هذه الحالة.

حل مسألة

1) من أجل $h\neq 0$ لدينا : $\dfrac{f(1+h)-1}{h}=\dfrac{(1+h)^2+|h|-1}{h}=h+2+\dfrac{|h|}{h}$.

2) لدينا $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{-h}{h}=-1$ و $\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{h}{h}=1$ ومنه $\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}h+2+\dfrac{|h|}{h}=1=\lim\limits_{h\xrightarrow{<}0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ و $3=\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}h+2+\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ إذن العبارة $\dfrac{f(1+h)-1}{h}$ لا تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 أي الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

3) المنحني $\mathcal{C}_f$ يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(0;1)$ ؛ معادلتيهما $y=x+1$ و $y=3x+1$.

ملاحظة:

إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين وعلى يسار a حيث العددين المشتقين هما على الترتيب l_1 و l_2 وهما مختلفين فإن منحني الدالة f يقبل نصفي مماسين عند النقطة $A(a;f(a))$ معادلتيهما على الترتيب $y=l_1(x-a)+f(a)$ و $y=l_2(x-a)+f(a)$.

الحمد لله الذي بنعمه تتم الصالحات

تم هذا العمل بفضل من الله

ثمن هذه المجلة دعوة خير

الى مجلة اخرى ان شاء الله

نجدون صفحة Top Maths على المنصات التالية

النجاح لا يحتاج إلى كثير من العلم ولكنه

يحتاج إلى الحكمة،الصبر،الادب،الاخلاق

وفقكم الله لما يحب ويرضى

つづく

"اللهم صل على محمد وعلى آل محمد كما صليت على إبراهيم وعلى آل إبراهيم إنك حميد مجيد . اللهم بارك على محمد وعلى آل محمد كما باركت على إبراهيم وعلى آل إبراهيم إنك حميد مجيد ."

لاتنسونا من صالح الدعاء

هذا ما عندي فإِن أحسنت فمن الله، وإِ ن أسأت أو أخطأت فمن نفسي والشيطان