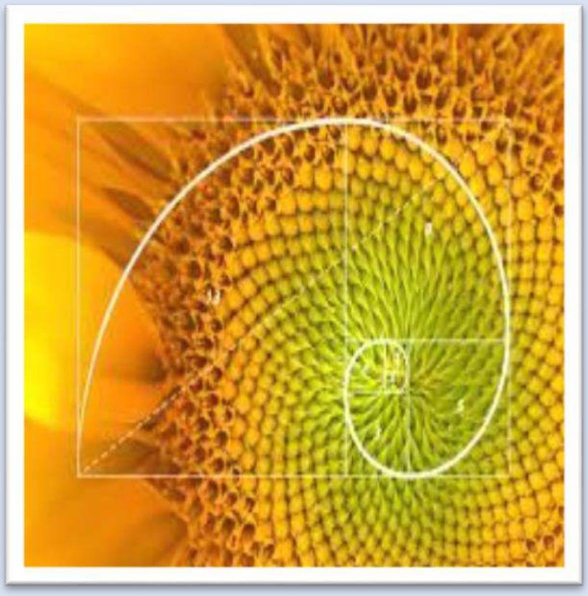
الرياضيات في الثانوية

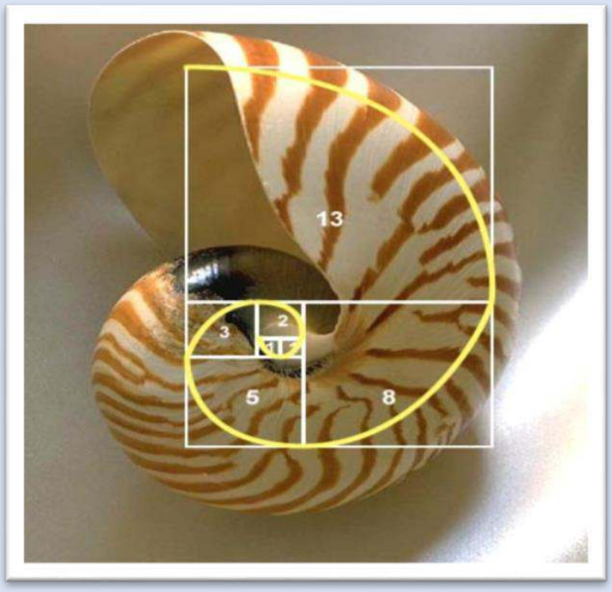
للسنوات الثانية ثانوي

21 تمرين نموذجي في

المتتاليات العددية

Les suites numériques





كتابة الأستاذ :

حنــاش نبيــل

Mai 2022

تمارين في المتتاليات العددية

التمرين الأول :

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث :
$$\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1\times u_2\times u_3=216 \end{cases}$$

1) أ- أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية ثم استنتج u_1 .

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

د- أحسب بدلالة n المجموع $S_n=u_1+u_2+......+u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n$

أ- أحسب v_2 و v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*$: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac{2}{3}$. بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

التمرين الثاني :

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية بحيث :
$$\begin{cases} u_6+u_8+u_{10}+u_{12}=132 \\ u_2+u_4=18 \end{cases}$$

1) أحسب الأساس r لهذه المتتالية و الحد الأول u_1 .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :
$$S_n=u_1+u_2+......+u_n$$

4) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $3S_n\leq 32$.

التمرين الثالث :

I- لتكن (u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث :
$$\begin{cases} u_2+u_4=4 \\ u_0=-1 \end{cases}$$

1) جد r أساس هذه المتتالية ثم استنتج إتجاه تغيرها .

2) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :
$$S_n=\left(u_1+\frac{1}{3}\right)+\left(u_2+\frac{1}{3}\right)+......+\left(u_n+\frac{1}{3}\right)$$

II- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بالعلاقة التراجعية :
$$\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=\left(\alpha^2-3\right)v_n+2\alpha^2-\alpha \end{cases} \text{ ، } n\in\mathbb{N}$$

1) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية حسابية

2) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

التمرين الرابع :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=1$ ، $u_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :
$$u_{n+2}=\frac{3}{2}u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n \text{ .}$$

و المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_{n+1}-u_n$.

1) أحسب v_0 ، v_1 .

2) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q .

3) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج المجموع S_n حيث $S_n=v_0+v_1+......+v_{n-1}$

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_n-u_0$ ثم استنتج أن : $u_n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+1$

5) أحسب $\lim S_n$ ثم استنتج $\lim u_n$.

التمرين الخامس :

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0=12$ ، $v_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :
$$u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3} \quad \text{و} \quad v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=u_n-v_n$ و $t_n=3u_n+8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب w_n بدلالة n .

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة .

3) أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) عين كلا من u_n و v_n بدلالة n .

5) استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

التمرين السادس :

I- لتكن المتتالية الحسابية (u_n) التي حدها الأول u_0 و أساسها r حيث :

$$\begin{cases} u_1 - u_4 = -6 \\ u_1 + u_5 = 28 \end{cases}$$

1) أحسب r ، u_0 و u_2 .

2) أكتب u_n بدلالة n .

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :
$S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$

4) عين قيمة n حتى يكون $S_n \geq 2586$.

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_0 = 6$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} - 1$

1) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس ، أرسم المستقيم (Δ_1) الذي $y = x$ معادلة له و المستقيم (Δ_2) الذي $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ معادلة له ثم عين فاصلة نقطة تقاطعهما .

2) أ- باستعمال (Δ_1) و (Δ_2) مثل على محور الفواصل الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 مبرزا خطوط الرسم .

ب- ما تخمينك حول إتجاه تغير المتتالية (v_n) ؟ و ما تخمينك حول تقارب المتتالية (v_n) ؟

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $w_n = \alpha v_n - 2$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

أ- عين قيمة α حتى تكون (w_n) متتالية هندسية .

- نضع $\alpha = -1$:

ب- أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (w_n) بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

د- برهن التخمينين السابقين .

4) أحسب المجموعين T_n و R_n حيث :

$$T_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$$

و $R_n = w_0^2 + w_1^2 + \ldots\ldots + w_n^2$

و الجداء P_n حيث : $P_n = w_0 \times w_1 \times w_2 \times \ldots\ldots \times w_n$

III- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a_n = \dfrac{8}{2^n} + 2n + 8$

✓ أحسب بدلالة n المجموع : $S'_n = a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_n$

التمرين السابع :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حيث : $u_2 = 2$ و $u_5 = {}^{27}\!/_{4}$

1) عين q أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_0 .

2) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج فيما يخص تقارب المتتالية (u_n) ؟

3) أحسب المجموعين : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{2n}$

و $S'_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{u_n}$

4) أحسب المجموع T_n حيث :

$$T_n = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \ldots\ldots + \sqrt{u_n}$$

التمرين الثامن :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية متزايدة حيث : $\begin{cases} u_3 = 15 \\ u_2 \times u_4 = 189 \end{cases}$

1) عين الأساس r لهذه المتتالية ثم u_0 .

2) أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

3) أحسب بدلالة n المجموع S حيث :
$S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{n-1}$

4) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S = 396$.

التمرين التاسع :

I- $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حيث : $u_{10} = 16$ و $u_{15} = 41$

1) عين الحد الأول u_0 و الأساس r للمتتالية (u_n) .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) عين الحد الذي رتبته 10 للمتتالية (u_n) .

4) بين أن العدد 101 حد من حدود المتتالية (u_n) .

II- $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :
$v_3 = 24$ و $v_5 = 96$

1) عين الحد الأول v_0 و الأساس q للمتتالية (v_n) .

2) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

3) عين الحد الذي رتبته 7 للمتتالية (v_n) .

4) بين أن العدد 12 حد من حدود المتتالية (v_n) .

التمرين العاشر :

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0 = 13$ و
$3u_3 - u_5 = 38$

1) عين الأساس r للمتتالية (u_n) .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون العدد 2017 حدا من حدود المتتالية (u_n) .

4) أحسب المجموع :
$S = 3u_0 + 3u_1 + 3u_2 + \dots\dots + 3u_{582}$

5) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $v_n = u_{2n-1}$

أ- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- من أجل كل $n \geq 1$ ، أحسب $v_{n+1} - v_n$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n) مبينا أساسها r و حدها الأول v_1 .

التمرين الحادي عشر :

لتكن (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حدودها موجبة تماما و أساسها r حيث : $r = -5$ و
$u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 = 875$.

1) أحسب u_5 ثم u_0 ثم أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

2) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$

3) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $8S_n \leq 945$.

التمرين الثاني عشر :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :
$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

2) أ- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) أ- أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$ ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$$

جـ- استنتج بدلالة n المجموع :
$$T_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots\dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

التمرين الثالث عشر :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ 4u_{n+1} = u_n + 9 \end{cases}$$

1) عين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

- في كل ما يلي نفرض : $\alpha = 4$

2) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n + \beta$

أ- عين العدد الحقيقي β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

جـ- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموعين :
$S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$ و
$T_n = v_0 + 4v_1 + 16v_2 + \dots\dots + 4^n v_n$

5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

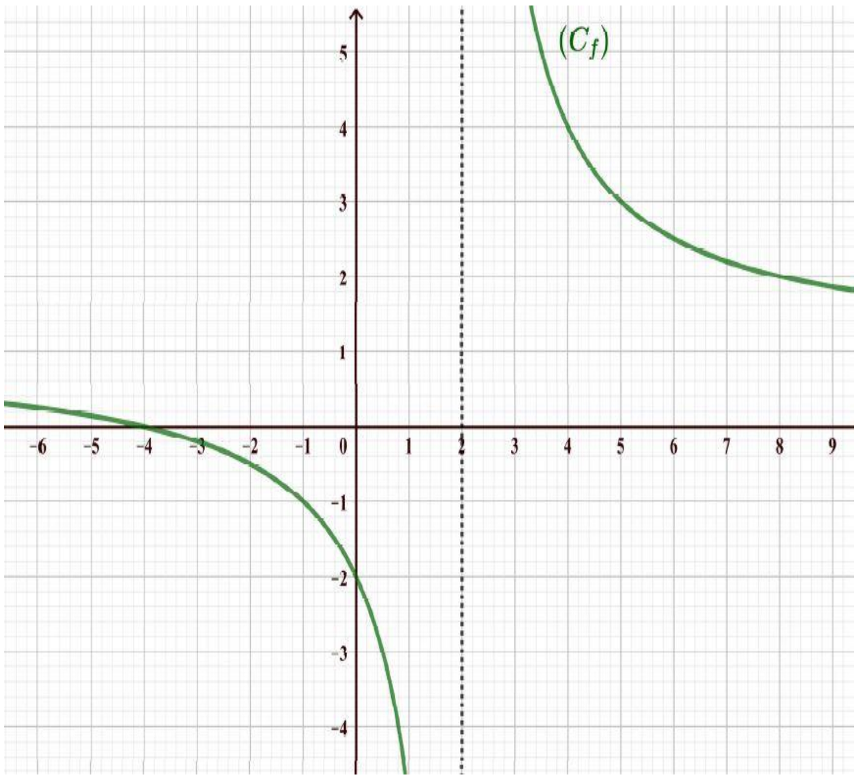
$$P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots \times v_n = \frac{1}{2^{n(n+1)}}$$

التمرين الرابع عشر :

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{u_n - 2}$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .



1) أ- باستعمال المنحنى (C_f) و المنصف الأول الذي $y = x$ معادلة له ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مع إظهار خطوط الرسم .

ب- ضع تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n) .

2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 4}$

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = -\dfrac{2}{3} v_n$ و استنتج أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

جـ- برهن التخمين السابق بحساب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

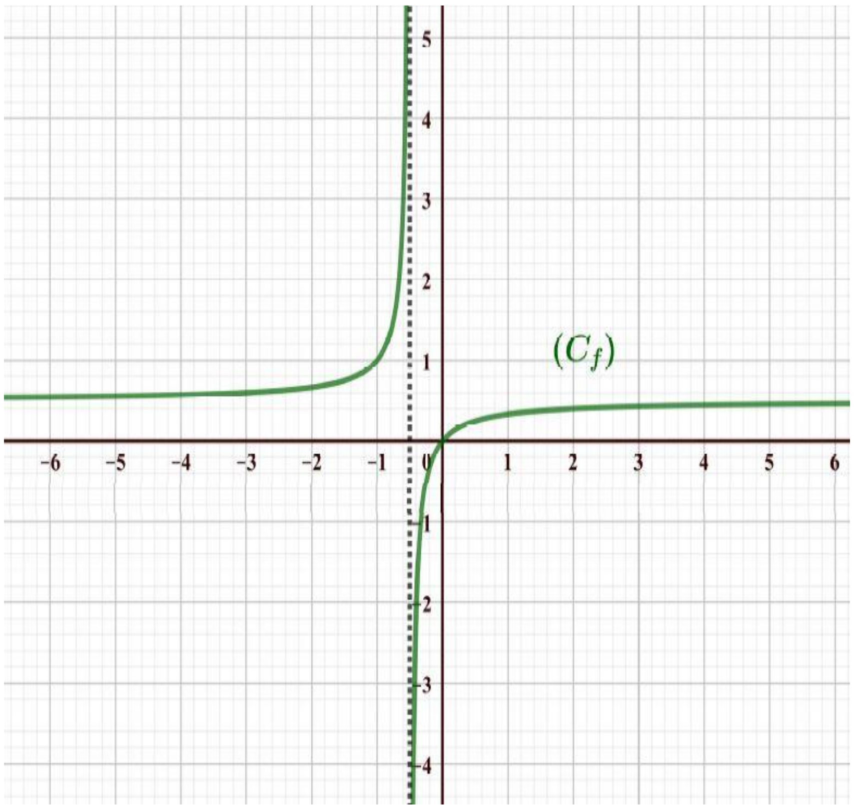
3) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

4) أحسب المجموع : $S = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{99}$

التمرين الخامس عشر :

(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}$

1) لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .



1) أ- باستعمال المنحنى (C_f) و المنصف الأول الذي $y = x$ معادلة له ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 (مع إظهار خطوط الرسم) .

ب- خمن إتجاه تغير المتتالية (u_n) و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ حيث $u_n \neq 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

أ- أحسب الحدود v_0 ، v_1 و v_2 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 .

جـ- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

د- أحسب كلا من $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج ؟

3) أحسب المجموعين التاليين :

$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots\dots + \frac{1}{u_n}$ و

$S = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots\dots + u_{2022} v_{2022}$

التمرين السادس عشر :

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2u_n + 4 \end{cases}$ ، $n \in \mathbb{N}$

1) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

2) نعتبر فيما يلي $\alpha = -3$ ، و ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) حيث :

$f(x) = 2x + 4$ و المستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له .

أ- أرسم كلا من (C_f) و (Δ) في نفس المعلم و عين فاصلة نقطة تقاطعهما .

ب- مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مبرزا خطوط الرسم ثم جدها حسابيا .

جـ- ضع تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 4$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية معينا أساسها q و حدها الأول v_0 .

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- أحسب كلا من $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و استنتج أن (v_n) و (u_n) متتاليتان متباعدتان .

د- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) أ- أحسب المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$ ثم استنتج المجموع $S'_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$.

ب- أحسب المجموع $T_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots\dots + \frac{u_n}{v_n}$.

(لاحظ أن $\frac{u_n}{v_n} = 1 - \frac{4}{v_n}$)

جـ- أحسب بدلالة n المجموع

$C_n = 5v_0 + \frac{5}{2}v_1 + \dots\dots + \frac{5}{2^n}v_n$.

التمرين السابع عشر :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 2 \end{cases}$ ، $n \in \mathbb{N}$

1) عين u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) نفرض أن $u_0 = 1/2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

أ- عين قيمة λ حتى تكون المتتالية (v_n) يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

جـ- أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_{2n+1}$ ثم استنتج بدلالة n المجموع

$S'_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_{2n+1}$

د- أحسب بدلالة n المجاميع :

$T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots\dots + v_n^2$ و

$T'_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots\dots + \frac{1}{v_n}$

و الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots\dots \times v_n$.

تمارين حول الوسطين الحسابي و الهندسي :

التمرين الثامن عشر :

عين ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن :

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{3}$ و $a+b+c=9$

التمرين التاسع عشر :

عين ثلاث أعداد حقيقية α ، β ، γ حدود متتابعة من متتالية حسابية علما أن :

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=83$ و $\alpha+\beta+\gamma=15$

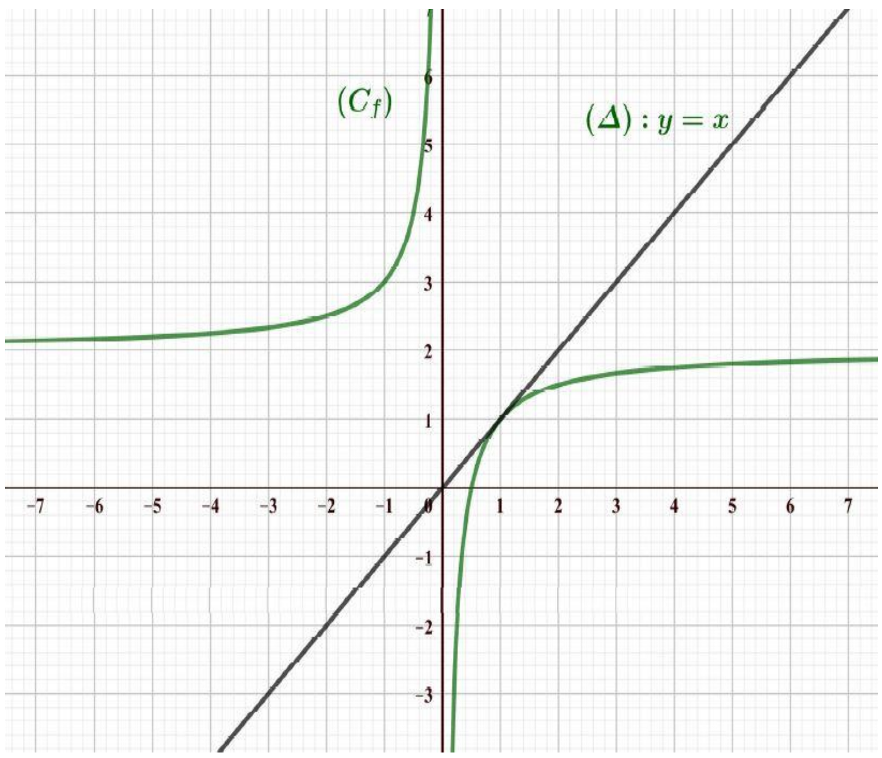
التمرين العشرون :

عين ثلاث أعداد حقيقية α ، β ، γ حدود متتابعة من متتالية هندسية علما أن :

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{7}{8}$ و $\alpha\times\beta\times\gamma=64$

التمرين الواحد و العشرون (نموذجي للمراجعة) :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{2x-1}{x}$ و المستقيم (Δ) الذي $y=x$ معادلة له كما هو موضح في الشكل الموالي :



نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n-1}{u_n}$.

1) مثل بيانيا على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها) .

2) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n}$ ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي $v_n=3+\frac{1}{u_n-1}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{1}{n+1}+1$. استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

جـ- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

د- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$$S_n=v_0+v_1+\ldots\ldots+v_n$$

حلول مقترحة للتمارين :

حل التمرين الأول :

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث : $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\ u_1\times u_2\times u_3=216\end{cases}$

1) أ- حساب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية ثم استنتاج u_1 :

حسب خاصية الوسط الهندسي نكتب $u_1\times u_3=u_2^2$ و منه ينتج $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\ u_2^3=216\end{cases}$ معناه $\begin{cases}u_1+2u_2+u_3=32\\ u_2=6\end{cases}$ و منه $\begin{cases}u_1+u_3=20\\ u_2=6\end{cases}$. بما أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_n=u_1\times q^{n-1}$ فإنه ينتج $u_3=u_1\times q^2$ و $u_2=u_1\times q$ و منه نجد $\begin{cases}u_1+u_1\times q^2=20\\ u_1\times q=6\end{cases}$ معناه $\begin{cases}u_1(1+q^2)=20\\ u_1\times q=6\end{cases}$ و منه

$\frac{6}{q}=\frac{20}{1+q^2}$ معناه $6\left(1+q^2\right)=20q$ أي $6q^2-20q+6=0$ يكافئ $3q^2-10q+3=0$ ($\Delta=64$) و نجد $q=3$ أو $q=1/3$ ، لكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما و بالتالي $q\succ1$ ، إذن $q=3$.

و ينتج $u_1=6/q=6/3$ معناه $u_1=2$.

ب- كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$ فإن : $u_n=u_1\times q^{n-1}$ معناه $u_n=2\times3^{n-1}$.

جـ- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\times3^{n-1}\right)=+\infty$ لأن $q=3\succ1$ و نستنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

د- حساب بدلالة n المجموع $S_n=u_1+u_2+......+u_n$ ثم تعيين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=728$:

$S_n=2+2\times3+2\times3^2+......+2\times3^{n-1}$ معناه

$S_n=2\left(1+3+3^2+......+3^{n-1}\right)$ معناه

$S_n=2\left(\frac{1-3^n}{1-3}\right)$ و منه نجد $S_n=3^n-1$.

$S_n=728$ معناه $3^n=729$ و نجد $n=6$.

2) أ- حساب v_2 و v_3 :

$\begin{cases}v_2=\frac32v_1+u_1\\ v_3=\frac32v_2+u_2\end{cases}$ معناه $\begin{cases}v_2=\frac32\times2+2\\ v_3=\frac32v_2+u_2\end{cases}$ و منه

$\begin{cases}v_2=5\\ v_3=\frac32\times5+6\end{cases}$ معناه $\begin{cases}v_2=5\\ v_3=\frac{27}{2}\end{cases}$

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\in\mathbb{N}^*$: $w_n=\frac{v_n}{u_n}-\frac23$

إثبات أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac12$:

من أجل كل عدد طبيعي $n\ge1$ فإن $w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}-\frac23$ معناه

$w_{n+1}=\frac{\frac32v_n+u_n}{3\times u_n}-\frac23$ و منه $w_{n+1}=\frac{3v_n+2u_n}{6\times u_n}-\frac23$ أي

$w_{n+1}=\frac{3v_n+2u_n}{6\times u_n}-\frac{4\times u_n}{6\times u_n}$ و منه $w_{n+1}=\frac{3v_n-2u_n}{6\times u_n}$

معناه $w_{n+1}=\frac{3v_n}{6\times u_n}-\frac{2u_n}{6\times u_n}$ أي $w_{n+1}=\frac12\times\frac{v_n}{u_n}-\frac13$ أي

$w_{n+1}=\frac12\left(\frac{v_n}{u_n}-\frac23\right)$ معناه $w_{n+1}=\frac12w_n$ و نستنتج أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac12$.

جـ- كتابة w_n بدلالة n ثم استنتاج v_n بدلالة n :

$v_1=2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\ge2$ فإن :

$v_n=u_n\left(w_n-\frac23\right)$ حيث $w_n=w_1\times\left(\frac12\right)^{n-1}$ و

$w_1=\frac{v_1}{u_1}-\frac23=\frac22-\frac23=\frac13$ ، إذن من أجل كل عدد طبيعي $n\ge2$:

$v_n=2\times3^{n-1}\left(\frac13\times\left(\frac12\right)^{n-1}-\frac23\right)$ أي

$v_n=\left(\frac32\right)^{n-2}-4\times3^{n-2}$.

حل التمرين الثاني :

1) حساب الأساس r لهذه المتتالية و الحد الأول u_1 :

من أجل كل عدد طبيعي $n\ge2$ فإن $u_n=u_2+(n-2)r$ و منه $\begin{cases}u_6+u_8+u_{10}+u_{12}=132\\ u_2+u_4=18\end{cases}$ تعني

$$\begin{cases}(u_2+4r)+(u_2+6r)+(u_2+8r)+(u_2+10r)=132\\ u_2+(u_2+2r)=18\end{cases}$$

معناه $\begin{cases}4u_2+28r=132\\ 2u_2+2r=18\end{cases}$. نضرب المعادلة (2) في -2 ثم بالجمع مع المعادلة (1) طرفا لطرف نجد $24r=96$ و منه $r=96/24$ أي $r=4$.

$2u_2+2r=18$ و منه $2u_2=10$ و منه $u_2=5$.

لدينا $u_2 - u_1 = r$ و منه $u_1 = u_2 - r$ و منه $u_1 = 5 - 4$ أي $u_1 = 1$.

2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن : $u_n = u_1 + (n-1)r$
معناه $u_n = 4n - 1$.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث :
$S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$

$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ معناه $S_n = \frac{n}{2}(1 + 4n - 1)$ و منه نجد $S_n = 2n^2$.

4) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $3S_n \leq 32$:

$3S_n \leq 32$ معناه $6n^2 \leq 32$ و منه $n^2 \leq 32/6$ معناه $n \leq 2.3094$ و بالتالي $n \in \{1,2\}$.

حل التمرين الثالث :

I- 1) إيجاد r أساس هذه المتتالية ثم استنتاج إتجاه تغيرها :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = u_0 + nr$ و منه

$\begin{cases} u_2 + u_4 = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} (u_0 + 2r) + (u_0 + 4r) = 4 \\ u_0 = -1 \end{cases}$ و منه

$2u_0 + 6r = 4$ أي $-2 + 6r = 4$ و منه $r = 1$.

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = r = 1 \succ 0$
فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

2) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = n - 1$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = \left(u_1 + \frac{1}{3}\right) + \left(u_2 + \frac{1}{3}\right) + \ldots\ldots + \left(u_n + \frac{1}{3}\right)$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}\right)$$

حيث $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ أي

$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = \frac{n}{2}(0 + n - 1)$ أي

$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = \frac{n(n-1)}{2}$ و من جهة أخرى :

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$ و منه $S_n = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{3}$ أي

$S_n = \frac{3n^2 - n}{6}$.

-II

1) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية حسابية :

تكون المتتالية (v_n) التي حدها الأول v_0 حسابية إذا و فقط إذا كان من أجل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} - v_n = r$ عدد ثابت .

$\alpha^2 - 3 = 1$ معناه $\alpha = -2$ أو $\alpha = 2$ ؛ إذن :

✓ إذا كان $\alpha = -2$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
$v_{n+1} - v_n = 2(-2)^2 + 2$ و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها هو 10 .

✓ إذا كان $\alpha = 2$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ،
$v_{n+1} - v_n = 2(2)^2 - 2$ و منه (v_n) متتالية حسابية أساسها هو 6 .

2) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية :

تكون المتتالية (v_n) التي حدها الأول v_0 هندسية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث من أجل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} = q \times v_n$.

إذن تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا و فقط إذا كان : $2\alpha^2 - \alpha = 0$

$2\alpha^2 - \alpha = 0$ يكافئ $\alpha(2\alpha - 1) = 0$ يكافئ $\alpha = 0$ أو $\alpha = 1/2$.

إذن (v_n) هندسية إذا و فقط إذا كان $\alpha = 0$ أو $\alpha = 1/2$.

حل التمرين الرابع :

1) حساب v_0 ، v_1 :

$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} v_0 = 2 - 1 \\ v_1 = u_2 - 2 \end{cases}$ حيث

$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{3}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 = 5/2$ و منه

$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 1/2 \end{cases}$.

2) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$ و منه

$v_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1}$ أي $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ أي

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$ معناه $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ و بالتالي (v_n)

متتالية هندسية أساسها $1/2$.

3) التعبير عن الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه

$v_n = \frac{1}{2^n}$.

استنتاج المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{n-1}$

عدد الحدود في المجموع هو $n - 1 - 0 + 1 = n$ و منه

$S_n = v_0 \frac{1-q^n}{1-q}$ معناه $S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$ أي

$S_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

4) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_n - u_0$ ثم

استنتاج أن : $u_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 1$

من أجل كل عدد طبيعي n ، لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$ و بالتالي :

إذن نتحصل على : $\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_2 = u_3 - u_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$

$S_n = (\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + (u_3 - \cancel{u_2}) + \ldots\ldots + (u_n - \cancel{u_{n-1}})$

و منه ينتج $S_n = u_n - u_0$ و هو المطلوب .

لدينا $u_n = S_n + u_0$ حيث $u_0 = 1$ و منه نجد :

$u_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 1$.

5) حساب $\lim S_n$ ثم استنتاج $\lim u_n$:

بما أن $0 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n + v_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n + 1 = 3$.

حل التمرين الخامس :

1) إثبات أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4}$ معناه

$w_{n+1} = \frac{4u_n + 8v_n - 3u_n - 9v_n}{12}$ و منه $w_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{12}$ أي

$w_{n+1} = \frac{1}{12}(u_n - v_n)$ و بالتالي $w_{n+1} = \frac{1}{12}w_n$ ، إذن (w_n)

متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{12}$ و حدها الأول $w_0 = u_0 - v_0$

معناه $w_0 = 11$. إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$.

2) إثبات أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة :

تكون (t_n) ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n

، $t_{n+1} = t_n$ حيث $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1}$ و منه

$t_{n+1} = 3\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) + 8\left(\frac{u_n + 3v_n}{4}\right)$ أي

$t_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$ معناه $t_{n+1} = 3u_n + 8v_n$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $t_{n+1} = t_n$ و منه نستنتج أن (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$.

و من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 36 + 8$ معناه $t_n = 44$.

3) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$:

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{-2u_n+2v_n}{3}$ معناه

$u_{n+1}-u_n=\frac{-2(u_n-v_n)}{3}$ أي $u_{n+1}-u_n=-\frac{2w_n}{3}$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$ إذن

$w_n\succ 0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ و منه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ،

$-\frac{2w_n}{3}\prec 0$ أي $u_{n+1}-u_n\prec 0$ و نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{u_n-v_n}{4}$ معناه

$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{4}w_n$ ، بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n\succ 0$ فإن $v_{n+1}-v_n\succ 0$ و نستنتج أن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

4) تعيين كلا من u_n و v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $3u_n+8v_n=44$

و كذلك $u_n-v_n=w_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$ و منه نتحصل على :

$\begin{cases}3u_n+8v_n=44\\ u_n-v_n=11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n\end{cases}$ ، نضرب المعادلة (2) في 8 ثم

بالجمع طرفا لطرف مع المعادلة (1) ينتج

$11u_n=88\times\left(\frac{1}{12}\right)^n+44$ معناه $u_n=8\times\left(\frac{1}{12}\right)^n+4$.

لدينا $v_n=u_n-w_n$ و منه

$v_n=8\times\left(\frac{1}{12}\right)^n-11\times\left(\frac{1}{12}\right)^n+4$ إذن من أجل كل

$n\in\mathbb{N}$ فإن : $v_n=4-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n$.

5) استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$:

بما أن $0\prec\frac{1}{12}\prec 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n=0$ و بالتالي

إذن؛ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=4$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=4$

حل التمرين السادس :

I- 1) حساب r ، u_0 و u_2 :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n=u_0+nr$ و منه

$\begin{cases}u_1-u_4=-6\\ u_1+u_5=28\end{cases}$ يعني $\begin{cases}(u_0+r)-(u_0+4r)=-6\\ (u_0+r)+(u_0+5r)=28\end{cases}$ أي

$\begin{cases}-3r=-6\\ 2u_0+6r=28\end{cases}$ و منه $\begin{cases}r=2\\ 2u_0+6r=28\end{cases}$ و منه

$\begin{cases}r=2\\ 2u_0=28-12\end{cases}$ إذن $\begin{cases}r=2\\ u_0=8\end{cases}$ و نجد $u_2=u_0+2r$

أي $u_2=8+2\times2$ و منه $u_2=12$.

2) كتابة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n=2n+8$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n :

عدد الحدود في المجموع هو $n-0+1=n+1$ و نجد

$S_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)=\frac{n+1}{2}(8+8+2n)$ أي

$S_n=\frac{(n+1)(2n+16)}{2}$ و منه $S_n=(n+1)(n+8)$.

4) تعيين قيمة n حتى يكون $S_n\geq 2586$:

$S_n\geq 2586$ يكافئ $(n+1)(n+8)\geq 2586$ معناه

$n^2+9n-2578\geq 0$.

من أجل كل عدد حقيقي x ندرس إشارة ثلاثي الحدود $A(x)$ حيث $A(x)=x^2+9x-2578$ $(\Delta=10393)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

حيث $x_1\approx-55.47$ و $x_2\approx 46.47$

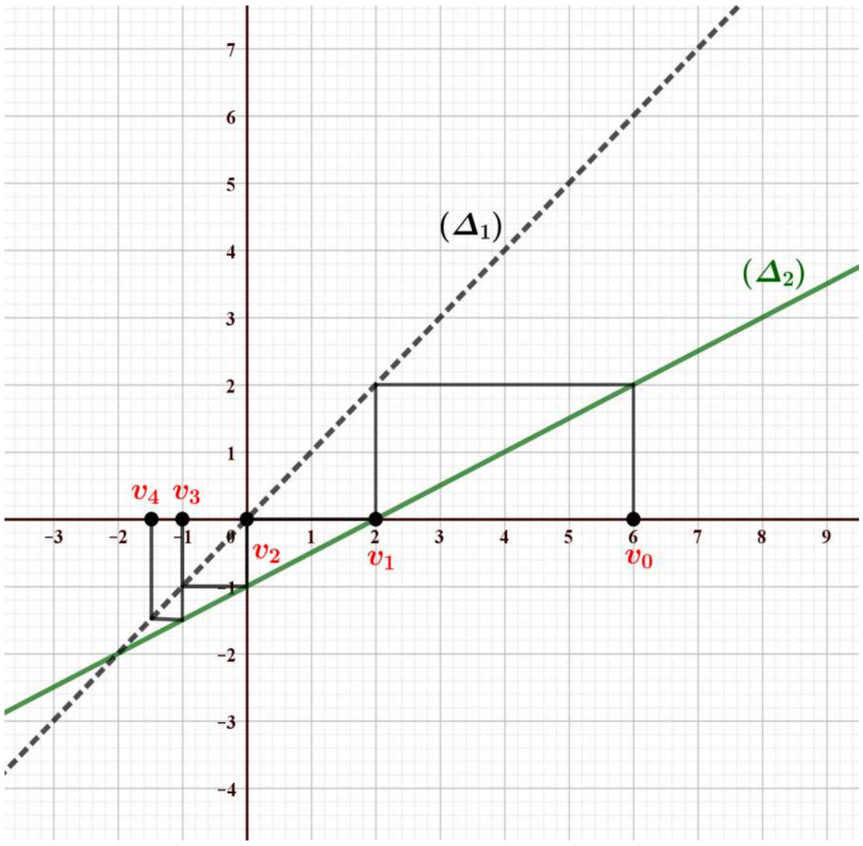
إذن $S_n\geq 2586$ إذا و فقط إذا كان $n\geq 47$.

II- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_0=6$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{v_n}{2}-1$

1) إنشاء (Δ_1) و (Δ_2) .

2) أ- تمثيل على محور الفواصل الحدود v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 :



ب- بما أن $v_4 < v_3 < v_2 < v_1 < v_0$ إذن نخمن بأن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و (v_n) متقاربة نحو -2 .

3) أ- تعيين قيمة α حتى تكون (w_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n ،

$w_{n+1} = \alpha v_{n+1} - 2 = \alpha\left(\frac{v_n}{2}-1\right)-2$ أي

$w_{n+1} = \alpha\frac{v_n}{2} - \alpha - 2$ و منه $w_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha v_n - 2\alpha - 4)$

أي $w_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha v_n - 2 - 2\alpha - 2)$ معناه

$w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n - \alpha - 1$ ، إذن تكون المتتالية (w_n) هندسية و أساسها $1/2$ إذا و فقط إذا كان $-\alpha - 1 = 0$ معناه $\alpha = -1$.

ب- كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (w_n) بدلالة n ثم استنتاج v_n بدلالة n :

من أجل $\alpha = -1$ فإن المتتالية (w_n) و من أجل كل عدد طبيعي n فإن $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ حيث $w_0 = (-1)v_0 - 2 = -8$ و منه $w_n = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

د- إثبات صحة التخمينين السابقين :

بما أن $0 \prec q = \frac{1}{2} \prec 1$ و $w_0 = -8 \prec 0$ فإن المتتالية (w_n) متزايدة على $\mathbb{N}$. و من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$v_n = -w_n - 2$ ، إذن بما أن المتتالية (w_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ فإن المتتالية (v_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ و منه نجد

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(-w_n - 2) = -2$ إذن المتتالية (v_n) متقاربة نحو -2 و منه صحة التخمينين السابقين .

4) حساب المجموعين T_n و R_n :

عدد الحدود في المجموع T_n هو $n+1$ و نكتب :

$$T_n = (-w_0 - 2) + (-w_1 - 2) + \ldots\ldots + (-w_n - 2)$$

$T_n = -(w_0 + w_1 + \ldots\ldots + w_n) + (n+1)(-2)$ معناه

$T_n = -w_0 \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + (n+1)(-2)$ أي

$T_n = 8 \times 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(-2)$ و منه

$$T_n = 16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 2(n+1)$$

و نكتب :

$$R_n = w_0^2 + (w_0 \times q)^2 + (w_0 \times q^2)^2 + \ldots\ldots + (w_0 \times q^n)^2$$

أي $R_n = w_0^2\left(1 + q^2 + (q^2)^2 + (q^2)^3 + \ldots\ldots + (q^2)^n\right)$

حيث $1 + q^2 + (q^2)^2 + (q^2)^3 + \ldots\ldots + (q^2)^n$ هو مجموع $n+1$ حدا متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها q^2 و منه نجد :

$R_n = w_0^2 \dfrac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2}$ حيث $w_0 = -8$ و $q = 1/2$ ؛ إذن

ينتج $R_n = 64 \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$ أي $R_n = 64 \times \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

معناه $R_n = \frac{256}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

• حساب الجداء $P_n = w_0 \times w_1 \times \ldots\ldots \times w_n$:

$$P_n = w_0 \times (w_0 \times q) \times (w_0 \times q^2) \times \ldots\ldots \times (w_0 \times q^n)$$

معناه :

$$P_n = \underbrace{w_0 \times w_0 \times w_0 \times \ldots\ldots \times w_0}_{n+1\ fois} \times \underbrace{q \times q \times q \times \ldots\ldots \times q}_{n\ fois}$$

معناه $P_n = w_0^{n+1} \times q^n$ حيث $w_0 = -8$ و $q = 1/2$ ؛ إذن

$P_n = \frac{(-8)^{n+1}}{2^n}$ و منه $P_n = \frac{(-2^3)^{n+1}}{2^n} = (-1)^{n+1}\frac{2^{3n+3}}{2^n}$ ،

إذن $P_n = (-1)^{n+1} 2^{2n+3}$.

III- حساب بدلالة n المجموع S'_n :

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $x_n = \frac{8}{2^n}$ و $y_n = 2n+8$

إذن $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{8}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{2^n}\right) = \frac{1}{2}x_n \\ y_{n+1} = 2(n+1)+8 = 2n+8+2 = y_n + 2 \end{cases}$

المتتالية (x_n) هندسية أساسها $1/2$ و المتتالية (y_n) حسابية أساسها 2 حيث من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$a_n = x_n + y_n$.

إذن $S'_n = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) + \ldots\ldots + (x_n + y_n)$ أي

و $S'_n = (x_0 + x_1 + \ldots\ldots + x_n) + (y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_n)$

منه نجد $S'_n = x_0 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{n+1}{2}(y_0 + y_n)$ حيث

$\begin{cases} x_0 = \frac{8}{2^0} = 8 \\ y_0 = 2(0)+8 = 8 \end{cases}$ و منه

معناه $S'_n = 16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{n+1}{2}(8+2n+8)$

$$S'_n = 16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n+8)$$

حل التمرين السابع :

1) تعيين q أساس المتتالية (u_n) و حدها الأول u_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = u_0 \times q^n$ و منه

$u_2 = u_0 \times q^2$ و $u_5 = u_0 \times q^5$ و منه $\begin{cases} u_0 \times q^2 = 2 \\ u_0 \times q^5 = 27/4 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} u_0 = 2/q^2 \\ u_0 \times q^5 = 27/4 \end{cases}$ و منه $2q^3 = 27/4$ أي $q^3 = 27/8$ و

منه نجد $q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ أي $q = \frac{3}{2}$.

بما أن $u_0 = 2/q^2$ فإن $u_0 = 4 \times \frac{2}{9}$ و منه $u_0 = \frac{8}{9}$.

2) كتابة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = u_0 \times q^n$ و منه

$u_n = \frac{8}{9} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$. بما أن $q = \frac{3}{2} \succ 1$ فإن

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

و نستنتج أن المتتالية (u_n) متباعدة .

3) حساب المجموعين :

عدد الحدود في المجموع S_n هو $2n+1$ و نكتب :

$S_n = u_0 \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{3}{2}}$ معناه $S_n = -2 \times \frac{8}{9}\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1}\right)$

أي $S_n = -\frac{16}{9}\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1}\right)$.

$$S'_n = \frac{1}{\frac{8}{9}} + \frac{1}{\frac{8}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^1} + \frac{1}{\frac{8}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\frac{8}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

و منه

$$S'_n = \frac{9}{8} + \frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{9}{8}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

معناه $S'_n=\frac{9}{8}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ حيث

$1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ يمثل مجموع $n+1$ حدا متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول يساوي 1

$S'_n=\frac{9}{8}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right)$ معناه $S'_n=\frac{9}{8}\times3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$ و

منه $S'_n=\frac{27}{8}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

4) حساب المجموع T_n :

بما أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=u_0\times q^n$ حيث u_0 و q أعداد حقيقية موجبة تماما فإنه ينتج :

$$T_n=\sqrt{u_0}+\sqrt{u_0\times q}+\sqrt{u_0\times q^2}+\dots\dots+\sqrt{u_0\times q^n}$$

معناه

$$T_n=\sqrt{u_0}+\sqrt{u_0}\times\sqrt{q}+\sqrt{u_0}\times\sqrt{q^2}+\dots\dots+\sqrt{u_0}\times\sqrt{q^n}$$

معناه $T_n=\sqrt{u_0}\left(1+\sqrt{q}+\sqrt{q^2}+\dots\dots+\sqrt{q^n}\right)$ أي

$T_n=\sqrt{u_0}\left(1+\sqrt{q}+\sqrt{q}^2+\dots\dots+\sqrt{q}^n\right)$ حيث

$1+\sqrt{q}+\sqrt{q}^2+\dots\dots+\sqrt{q}^n$ يمثل مجموع $n+1$ حدا متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $\sqrt{q}$ و حدها الأول 1 و منه

$T_n=\sqrt{u_0}\left(\frac{1-\sqrt{q}^{n+1}}{1-\sqrt{q}}\right)$ أي $T_n=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)}^{n+1}}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$

و منه $T_n=\frac{4}{3}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}-1\right)$.

حل التمرين الثامن :

1) تعيين الأساس r لهذه المتتالية ثم u_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=u_0+nr$ و منه :

$\begin{cases}u_3=15\\u_2\times u_4=189\end{cases}$ يعني $\begin{cases}u_0+3r=15\\(u_0+2r)(u_0+4r)=189\end{cases}$

معناه $\begin{cases}u_0=15-3r\\(u_0+2r)(u_0+4r)=189\end{cases}$ و منه نجد

$(15-r)(15+r)=189$ أي $225-r^2=189$ و منه $r^2=36$ ، إذن $r=-6$ أو $r=6$.

إذا كان $r=-6$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1}-u_n=r=-6\prec0$ و بالتالي (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و هذا مرفوض لأن المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

إذن $r=6$.

و منه $u_0=15-3\times6$ معناه $u_0=-3$.

2) كتابة بدلالة n عبارة الحد العام u_n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=6n-3$.

3) حساب بدلالة n المجموع S :

عدد الحدود في المجموع S هو $n-1-0+1=n$

و بالتالي $S=\frac{n}{2}(u_0+u_n)$ أي $S=\frac{n}{2}(-3+6n-3)$ و منه نجد $S=\frac{n}{2}(6n-6)$ أي $S=3n^2-3n$.

4) تعيين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S=240$:

$S=396$ معناه $3n^2-3n=396$ يكافئ $3n^2-3n-396=0$ يكافئ $n^2-n-132=0$

$(\Delta=529)$ و نجد $n=\frac{1+\sqrt{529}}{2}$ أي $n=12$.

أو $n=\frac{1-\sqrt{529}}{2}$ أي $n=-11$ مرفوض لأن $-11\notin\mathbb{N}$.

حل التمرين التاسع :

I- 1) تعيين الحد الأول u_0 و الأساس r للمتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=u_0+nr$

و منه $\begin{cases}u_{10}=16\\u_{15}=41\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}u_0+10r=16\\u_0+15r=41\end{cases}$ و بطرح المعادلتين طرفا لطرف ينتج $5r=25$ و منه $r=5$.

و منه $u_0 = 16 - 10r = 16 - 50$ معناه $u_0 = -34$.

2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 5n - 34$

3) تعيين الحد الذي رتبته 10 للمتتالية (u_n) :

بما أن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن الحد الأول دليله 0 و بالتالي الحد الذي رتبته 10 هو الحد الذي دليله 9 أي u_9 حيث $u_9 = 5 \times 9 - 34$ و منه $u_9 = 11$.

4) نبين أن العدد 101 حد من حدود المتتالية (u_n) :

العدد 101 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه يوجد عدد طبيعي n حيث $u_n = 101$:

$u_n = 101$ تكافئ $5n - 34 = 101$ معناه $5n = 135$ و منه $n = 27$. إذن $u_{27} = 101$ و بالتالي العدد 101 حد من حدود المتتالية (u_n) .

II- 1) تعيين الحد الأول v_0 و الأساس q للمتتالية (v_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \times q^n$

و منه $\begin{cases} v_3 = 24 \\ v_5 = 96 \end{cases}$ تعني $\begin{cases} v_0 \times q^3 = 24 \\ v_0 \times q^5 = 96 \end{cases}$ معناه

و منه $\begin{cases} v_0 = 24/q^3 \\ v_0 \times q^5 = 96 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} v_0 = 24/q^3 \\ 24/q^2 = 96 \end{cases}$ $\begin{cases} v_0 = 24/q^3 \\ q^2 = \dfrac{24}{96} \end{cases}$

أي $\begin{cases} v_0 = 24/q^3 \\ q^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$. $q^2 = \dfrac{1}{4}$ تكافئ $q = -\dfrac{1}{2}$ أو $q = \dfrac{1}{2}$

و بما أن المتتالية (v_n) حدودها موجبة تماما فإن $q = \dfrac{1}{2}$.

و منه نجد $v_0 = \dfrac{24}{q^3} = 8 \times 24$ معناه $v_0 = 192$.

2) كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 192 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ أي

$v_n = \dfrac{192}{2^n}$.

3) تعيين الحد الذي رتبته 7 للمتتالية (v_n) :

بما أن المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ فإن الحد الأول دليله 0 و بالتالي الحد الذي رتبته 7 هو الحد الذي دليله 6 أي v_6 حيث

$v_6 = \dfrac{192}{2^6} = \dfrac{192}{64}$ أي $v_6 = 3$.

4) نبين أن العدد 12 حد من حدود المتتالية (v_n) :

العدد 12 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه يوجد عدد طبيعي n حيث $v_n = 12$:

$v_n = 12$ تكافئ $\dfrac{192}{2^n} = 12$ معناه $2^n = \dfrac{192}{12}$ معناه $2^n = 16$ أي $2^n = 2^4$ و منه $n = 4$.

إذن $v_4 = 12$ و بالتالي العدد 12 حد من حدود المتتالية (v_n)

حل التمرين العاشر :

1) تعيين الأساس r للمتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$ معناه $u_n = 13 + nr$ و بالتالي $3u_3 - u_5 = 38$ تعني $3(13+3r) - (13+5r) = 38$ معناه $-12 + 4r = 0$ و منه نجد $r = 3$.

2) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 13 + 3n$

3) تعيين قيمة n حتى يكون العدد 2017 حدا من حدود المتتالية (u_n) :

العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) معناه يوجد عدد طبيعي n حيث $u_n = 2017$:

$u_n = 2017$ يكافئ $13 + 3n = 2017$ و منه $3n = 2004$ و منه نجد $n = 668$. إذن $u_{668} = 2017$ و بالتالي العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) .

4) حساب المجموع S :

عدد الحدود في المجموع S هو $582 - 0 + 1 = 583$ حيث

$S=3u_0+3u_1+3u_2+\ldots\ldots+3u_{582}$

$=3(u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_{582})$

$=3\times\frac{583}{2}(u_0+u_{582})$

مع $u_{582}=13+3\times 582$ معناه $u_{582}=1759$ و منه

$S=\frac{1749\times 1772}{2}$ أي $S=1549614$.

5) أ- تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$v_n=u_{2n-1}=13+3(2n-1)$ معناه $v_n=10+6n$.

ب- من أجل كل $n\geq 1$ ، حساب $v_{n+1}-v_n$ مع الإستنتاج :

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$v_{n+1}-v_n=[10+6(n+1)]-[10+6n]$ و منه

$v_{n+1}-v_n=6$ (عدد ثابت موجب تماما) .

المتتالية (v_n) حسابية أساسها 6 و حدها الأول $v_1=16$.

و بما أن $v_{n+1}-v_n=6\succ 0$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}^*$.

حل التمرين الحادي عشر :

1) حساب u_5 ثم u_0 ثم كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

نكتب $u_5=u_3+2r$ و منه $u_3=u_5-2r$ معناه

$u_3=u_5+10$ و نكتب $u_7=u_5+2r$ معناه $u_7=u_5-10$

إذن $u_3{}^2+u_5{}^2+u_7{}^2=875$ تعني

$(u_5+10)^2+u_5{}^2+(u_5-10)^2=875$ معناه

$3u_5{}^2+200=875$ و منه $3u_5{}^2=675$ معناه $u_5{}^2=225$

و منه $u_5=-15$ مرفوض لأن (u_n) حدودها موجبة تماما أو

$\boxed{u_5=15}$.

لدينا $u_5=u_0+5r=15$ معناه $u_0-25=15$ و منه نجد

$\boxed{u_0=40}$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=40-5n$

2) حساب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+\ldots\ldots+u_n$

عدد الحدود في المجموع S_n هو $n-0+1=n+1$

إذن $S_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$ معناه

$S_n=\frac{n+1}{2}(40+40-5n)$ و منه نجد :

$$S_n=\frac{(n+1)(80-5n)}{2}$$

3) تعيين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $8S_n\leq 945$:

$8S_n\leq 945$ يكافئ $4(n+1)(80-5n)\leq 945$ معناه

$-20n^2+300n-625\leq 0$ تكافئ

$4n^2-60n+125\geq 0$. من أجل كل عدد حقيقي x نضع

$A(x)=4x^2-60x+125$ و نشكل جدول إشارة ثلاثي

الحدود $A(x)$ حيث بوضع $A(x)=0$ نجد :

$x_1=\frac{60+\sqrt{1600}}{8}$ أي $x_1=12.5$

$x_2=\frac{60-\sqrt{1600}}{8}$ أي $x_2=2.5$.

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن $4n^2-60n+125\geq 0$ إذا و فقط إذا كان $n\leq 2.5$ أو

$n\geq 12.5$ معناه : $n\in\{0,1,2\}$ أو $n\in\{13,14,15,\ldots\}$

و نكتب $n\in\{0,1,2\}\cup\{13,14,15,\ldots\}$.

حل التمرين الثاني عشر :

1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\dfrac{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}-1}{\dfrac{2u_n+2}{u_n+3}+2}$ و منه $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{u_n-1}{u_n+3}}{\dfrac{4u_n+8}{u_n+3}}$ و

منه $v_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{4u_n+8}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+2}\right)$ معناه $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $1/4$ و حدها الأول

$v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+2}=\dfrac{0-1}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$.

2) أ- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ معناه

$v_n=-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ و نكتب $v_n=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4^n}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^{2n}}$

معناه $v_n=-\dfrac{1}{2^{2n+1}}$.

ب- استنتاج عبارة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:.

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ و منه

$u_n-1=v_n(u_n+2)$ و منه $u_n-v_nu_n=2v_n+1$ معناه

$u_n(1-v_n)=2v_n+1$ و منه $u_n=\dfrac{2v_n+1}{1-v_n}$.

إذن $u_n=\dfrac{-\dfrac{1}{2^{2n}}+1}{1+\dfrac{1}{2^{2n+1}}}=\dfrac{\dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n}}}{\dfrac{2^{2n+1}+1}{2^{2n+1}}}$ و منه نجد

$u_n=\dfrac{2(2^{2n}-1)}{2^{2n+1}+1}$ أي $u_n=\dfrac{2^{2n+1}-2}{2^{2n+1}+1}$.

3) أ- حساب بدلالة n المجموع $S_n=v_0+v_1+......+v_n$:

عدد الحدود في المجموع S_n هو $n+1$.

$S_n=v_0\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{4}}$ و منه $S_n=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

معناه $S_n=-\dfrac{2}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

✓ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$:

بما أن $1<\dfrac{1}{4}<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=0$ و منه ينتج

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\dfrac{2}{3}$.

ب- التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$\dfrac{1}{u_n+2}=\dfrac{1}{3}(1-v_n)$

من أجل كل عدد طبيعي n :

$\dfrac{1}{3}(1-v_n)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{u_n-1}{u_n+2}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_n+2-u_n+1}{u_n+2}\right)$ و

منه نجد $\dfrac{1}{3}(1-v_n)=\dfrac{1}{u_n+2}$.

جـ- استنتاج بدلالة n المجموع T_n :

عدد الحدود في المجموع T_n هو $n+1$.

$$T_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+......+\frac{1}{u_n+2}$$
$$=\frac{1}{3}(1-v_0)+\frac{1}{3}(1-v_1)+......+\frac{1}{3}(1-v_n)$$
$$=\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+......+\frac{1}{3}\right)}_{n+1\ fois}-\frac{1}{3}(v_0+v_1+......+v_n)$$

و منه $T_n=\dfrac{n+1}{3}-\dfrac{1}{3}S_n$ ، إذن :

$$T_n=\frac{n+1}{3}+\frac{2}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

حل التمرين الثالث عشر :

1) تعيين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا كان

$\alpha=u_0=u_1=...=u_n=u_{n+1}=...$ و منه نجد

$4\alpha=\alpha+9$ معناه $3\alpha=9$ و منه $\alpha=3$.

إذن من أجل $\alpha=3$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

2) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :

$u_1=\frac{u_0+9}{4}=\frac{4+9}{4}=\frac{13}{4}$ و نجد كذلك $u_2=\frac{49}{16}$ و $u_3=\frac{193}{64}$.

3) أ- تعيين العدد الحقيقي β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=u_{n+1}+\beta=\frac{1}{4}(u_n+9)+\beta$ و منه نكتب

$v_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n+4\beta+9)=\frac{1}{4}(u_n+\beta)+\frac{3\beta+9}{4}$ ، إذن

$v_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+\frac{3\beta+9}{4}$ ، و بالتالي (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ إذا و فقط إذا كان $\frac{3\beta+9}{4}=0$ معناه $3\beta+9=0$ و منه نجد $\beta=-3$.

حساب الحد الأول : $v_0=u_0+\beta=4-3$ معناه $v_0=1$.

ب- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ معناه $v_n=\frac{1}{4^n}$.

و بما أن $0\prec\frac{1}{4}\prec 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}=0$.

و منه فالمتتالية (v_n) متقاربة نحو 0 .

جـ- استنتاج عبارة u_n بدلالة n ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=v_n-\beta$ و بالتالي من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $u_n=\frac{1}{4^n}+3$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

و المتتالية (u_n) متقاربة نحو 3 .

4) حساب بدلالة n المجموعين S_n و T_n :

$$\begin{aligned}S_n&=u_0+u_1+\ldots+u_n\\&=4+\left(\frac{1}{4}+3\right)+\left(\frac{1}{4^2}+3\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4^n}+3\right)\\&=4+\underbrace{(3+3+\ldots\ldots+3)}_{n\ fois}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\end{aligned}$$

معناه :

$$S_n=4+3n+\frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right)=4+3n+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$\begin{aligned}T_n&=v_0+4v_1+16v_2+\ldots+4^nv_n\\&=v_0+4(v_0\times q)+4^2(v_0\times q^2)+\ldots+4^n(v_0\times q^n)\\&=v_0+4\left(v_0\times\frac{1}{4}\right)+4^2\left(v_0\times\frac{1}{4^2}\right)+\ldots+4^n\left(v_0\times\frac{1}{4^n}\right)\end{aligned}$$

و منه $T_n=\underbrace{v_0+v_0+v_0+\ldots+v_0}_{n+1\ fois}$ أي $T_n=(n+1)v_0$

و منه نجد $T_n=n+1$.

5) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$P_n=v_0\times v_1\times\ldots\ldots\times v_n=\frac{1}{2^{n(n+1)}}$$

$$\begin{aligned}P_n&=v_0\times v_1\times\ldots\ldots\times v_n\\&=v_0\times(v_0\times q)\times(v_0\times q^2)\times\ldots\times(v_0\times q^n)\\&=\underbrace{(v_0\times v_0\times\ldots v_0)}_{n+1\ fois}\times(q\times q^2\times\ldots\times q^n)\\&=v_0^{\,n+1}\times q^{1+2+\ldots\ldots+n}\\&=q^{1+2+\ldots\ldots+n}\end{aligned}$$

لأن $v_0=1$ و $1+2+\ldots\ldots+n$ هو مجموع n حدا متعاقبة لمتتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول يساوي 1 و منه نجد :

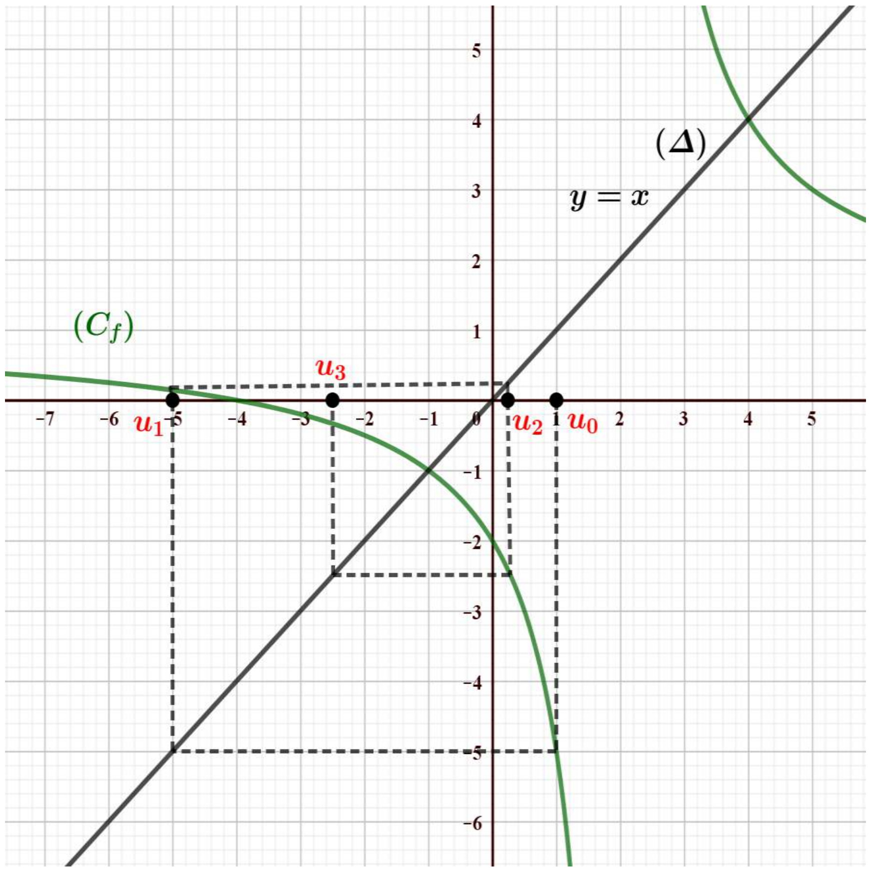
$1+2+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ و بالتالي نتحصل على :

$P_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ معناه $P_n=\frac{1}{2^{n(n+1)}}$.

حل التمرين الرابع عشر :

1) أ- تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مع إظهار خطوط الرسم :

ب- **التخمين** : المتتالية (u_n) متقاربة نحو -1 .



2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-4}$

أ- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=-\dfrac{2}{3}v_n$

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-4}=\dfrac{\dfrac{u_n+4}{u_n-2}+1}{\dfrac{u_n+4}{u_n-2}-4}$

معناه $v_{n+1}=\dfrac{\dfrac{2u_n+2}{u_n-2}}{\dfrac{-3u_n+12}{u_n-2}}=\dfrac{2u_n+2}{-3u_n+12}=-\dfrac{2(u_n+1)}{3(u_n-4)}$

و منه $v_{n+1}=-\dfrac{2}{3}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $-2/3$ و حدها الأول $v_0=\dfrac{u_0+1}{u_0-4}=\dfrac{1+1}{1-4}$ أي $v_0=-\dfrac{2}{3}$.

ب- تعيين عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ و منه

$v_n=-\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ معناه $v_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

جـ- برهان التخمين السابق بحساب $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$:

بما أن $-1<-\dfrac{2}{3}<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0$.

إذن المتتالية (v_n) متقاربة نحو 0 .

و من جهة أخرى $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-4}$ إذن $v_n(u_n-4)=u_n+1$ و

منه $u_n(v_n-1)=4v_n+1$ و منه $u_n=\dfrac{4v_n+1}{v_n-1}$ ، إذن

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4v_n+1}{v_n-1}=-1$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

و منه صحة التخمين السابق .

3) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\dfrac{4\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-1}$

4) حساب المجموع S :

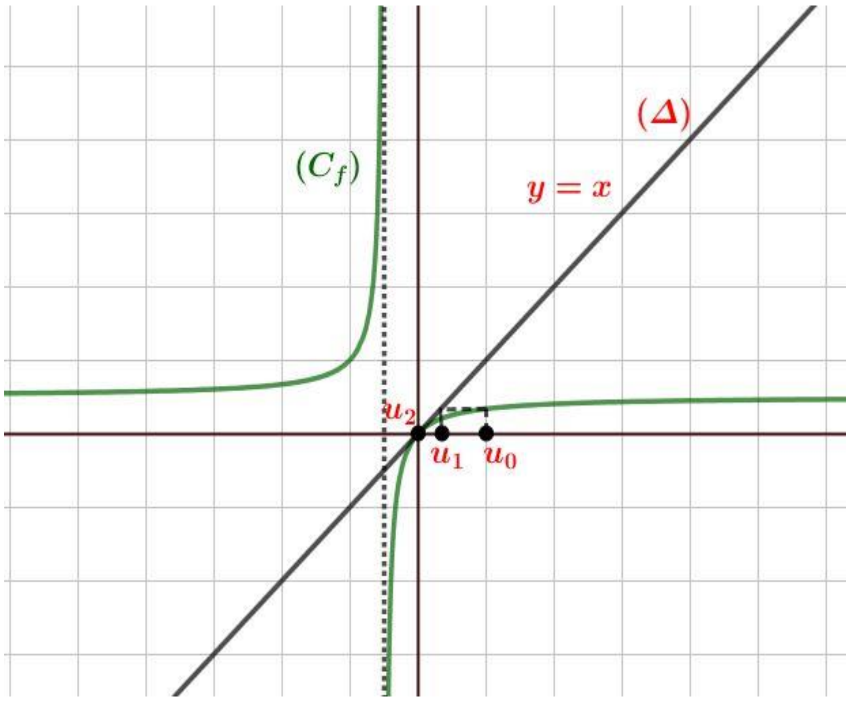
عدد الحدود في المجموع S هو $99-0+1=100$

$S=v_0+v_1+\ldots\ldots+v_{99}=v_0\dfrac{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{100}}{1+\dfrac{2}{3}}$ و منه

$$S=\frac{2}{5}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{100}-1\right)$$

حل التمرين الخامس عشر :

1) أ- تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 (مع إظهار خطوط الرسم) :



ب- التخمين حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

نلاحظ أن $u_2 < u_1 < u_0$ ، إذن نخمن بأن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

و (u_n) متقاربة حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) أ- حساب الحدود v_0 ، v_1 و v_2 :

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = 1 \text{ و } v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\dfrac{u_0}{2u_0+1}} = \frac{2u_0+1}{u_0} = 3$$

$$\text{و } v_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{1}{\dfrac{u_1}{2u_1+1}} = \frac{2u_1+1}{u_1} = 5 \text{ لأن } u_1 = \frac{1}{3} .$$

ب- إثبات أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\dfrac{u_n}{2u_n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n+1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

و منه $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_n}{u_n}$ معناه من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1} - v_n = 2$ و بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 .

جـ- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 + nr$ معناه

$v_n = 2n+1$ و نجد من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2n+1} .$$

د- حساب كلا من $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1) = +\infty$ و نستنتج أن المتتالية (v_n) متباعدة .

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$ و نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0 .

3) حساب المجموعين S_n و S :

$$S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \ldots\ldots + \frac{1}{u_n}$$
$$= v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$$

عدد الحدود في المجموع $n+1$ و نكتب :

$S_n = \dfrac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$ معناه $S_n = \dfrac{n+1}{2}(2n+2)$ و منه نجد $S_n = (n+1)^2$.

عدد الحدود في المجموع S هو $2022 - 0 + 1 = 2023$

$$S = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots\ldots + u_{2022} v_{2022}$$
$$= u_0 \times \frac{1}{u_0} + u_1 \times \frac{1}{u_1} + \ldots\ldots + u_{2022} \times \frac{1}{u_{2022}}$$
$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots\ldots + 1}_{2023 \text{ fois}}$$

و منه نجد $S = 2023$.

حل التمرين السادس عشر :

1) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

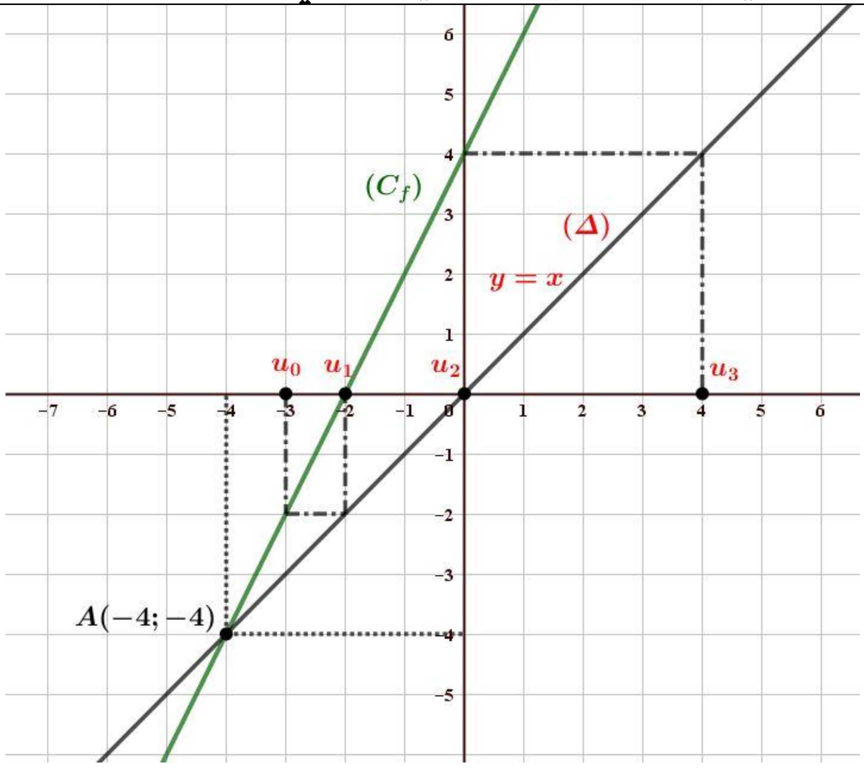
تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$ إذا كان :

$$\alpha = u_0 = u_1 = \ldots = u_n = u_{n+1} = \ldots$$

و منه نجد $\alpha = 2\alpha + 4$ معناه $\alpha = -4$.

إذن من أجل $\alpha = -4$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

2) أ- رسم كلا من (C_f) و (Δ) :



ب- تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مع إبراز خطوط الرسم :

تعيين الحدود حسابيا :

$$\begin{cases} u_1 = 2u_0 + 4 = 2(-3) + 4 = -2 \\ u_2 = 2u_1 + 4 = 2(-2) + 4 = 0 \\ u_3 = 2u_2 + 4 = 2(0) + 4 = 4 \end{cases}$$

جـ- نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ و (u_n) متباعدة حيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية مع تعيين أساسها و حدها الأول v_0 :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = (2u_n + 4) + 4$ معناه

$v_{n+1} = 2u_n + 8 = 2(u_n + 4)$ معناه $v_{n+1} = 2v_n$ و بالتالي

(v_n) متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول هو

$v_0 = u_0 + 4 = -3 + 4$ معناه $v_0 = 1$.

ب- التعبير عن v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 \times 2^n$ معناه $v_n = 2^n$.

حيث $u_n = v_n - 4$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n = 2^n - 4$$

جـ- حساب كلا من $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و استنتاج أن (v_n) و (u_n) متتاليتان متباعدتان :

بما أن $q = 2 > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ و كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - 4) = +\infty$ و بالتالي (v_n) و (u_n) متتاليتان متباعدتان . **(صحة التخمين)**

د- دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 4 - 2^n + 4$ معناه

$u_{n+1} - u_n = 2^n(2-1)$ و منه $u_{n+1} - u_n = 2^n > 0$ ، إذن

المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$. **(صحة التخمين)**

4) أ- حساب المجموع S_n ثم استنتاج المجموع S'_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n \\ &= v_0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \end{aligned}$$

و منه $S_n = 2^{n+1} - 1$.

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n \\ &= (v_0 - 4) + (v_1 - 4) + \ldots\ldots + (v_n - 4) \\ &= (v_0 + v_1 + \ldots + v_n) - \underbrace{(4 + 4 + \ldots + 4)}_{n+1 \ fois} \end{aligned}$$

و منه $S'_n = (2^{n+1} - 1) - 4(n+1)$ معناه :

$$S'_n = 2^{n+1} - 4n - 5$$

ب- حساب المجموع T_n :

من أجل كل عدد طبيعي n نلاحظ أن $\frac{u_n}{v_n} = 1 - \frac{4}{v_n}$ و منه

$$T_n=\frac{u_0}{v_0}+\frac{u_1}{v_1}+\ldots\ldots+\frac{u_n}{v_n}$$
$$=\left(1-\frac{4}{v_0}\right)+\left(1-\frac{4}{v_1}\right)+\ldots\ldots+\left(1-\frac{4}{v_n}\right)$$
$$=\underbrace{(1+1+\ldots\ldots+1)}_{n+1\ fois}-4\left(\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right)$$

و منه $T_n=n+1-4\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$ معناه

حيث $T_n=n+1-4\left(1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ يمثل مجموع $n+1$ حدا متعاقبة

من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول 1 و منه نجد

$T_n=n+1-4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$ معناه

$T_n=n+1-8\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ أي $T_n=n-7+\frac{8}{2^{n+1}}$ و نكتب

$T_n=n-7+\frac{1}{2^{n-2}}$.

جـ حساب بدلالة n المجموع C_n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=2^n$ و بالتالي نجد :

$$C_n=5v_0+\frac{5}{2}v_1+\frac{5}{2^2}v_2+\ldots+\frac{5}{2^n}v_n$$
$$=5\times1+\frac{5}{2}\times2+\frac{5}{2^2}\times2^2+\ldots+\frac{5}{2^n}\times2^n$$
$$=\underbrace{5+5+5+\ldots\ldots+5}_{n+1\ fois}$$

لأن عدد الحدود في المجموع C_n هو $n-0+1=n+1$

و منه نجد $C_n=5(n+1)$.

حل التمرين السابع عشر :

1) تعيين u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا كان :

$$u_0=u_1=\ldots\ldots=u_n=u_{n+1}=\ldots$$

إذن نجد $u_0=\frac{1}{5}u_0+2$ معناه $\frac{4}{5}u_0=2$ و منه $u_0=5/2$.

إذن من أجل $u_0=5/2$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

2) أ- تعيين قيمة λ حتى تكون المتتالية (v_n) يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 :

من أجل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\lambda=\left(\frac{1}{5}u_n+2\right)-\lambda=\frac{1}{5}(u_n+10-5\lambda)$$

معناه $v_{n+1}=\frac{1}{5}(u_n-\lambda-4\lambda+10)=\frac{1}{5}(v_n-4\lambda+10)$

إذن تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $1/5$ إذا و فقط إذا كان $-4\lambda+10=0$ معناه $\lambda=5/2$.

و حدها الأول $v_0=u_0-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0\times q^n$ معناه

$v_n=-2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$ و نكتب $v_n=-\frac{2}{5^n}$.

جـ- حساب بدلالة n المجموع S_n :

عدد الحدود في المجموع S_n هو $2n+1-0+1=2n+2$

إذن $S_n=v_0\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}}{1-\frac{1}{5}}=-2\times\frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+2}\right)$ أي

$$S_n=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{5^{2n+2}}-1\right)$$

✓ استنتاج المجموع S'_n :

$$S'_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{2n+1}$$
$$= (v_0+\lambda)+(v_1+\lambda)+\ldots\ldots+(v_{2n+1}+\lambda)$$
$$= (v_0+v_1+\ldots\ldots+v_{2n+1}) + \underbrace{(\lambda+\lambda+\ldots\ldots+\lambda)}_{2n+2\ fois}$$
$$= S_n + \underbrace{(\lambda+\lambda+\ldots\ldots+\lambda)}_{2n+2\ fois}$$

و منه $S'_n = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5^{2n+2}}-1\right)+(2n+2)\lambda$ حيث $\lambda = 5/2$

و منه نجد $S'_n = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{5^{2n+2}}-1\right)+5(n+1)$.

د- حساب بدلالة n المجاميع :

$$T_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$$
$$= v_0^2 + (v_0\times q)^2 + (v_0\times q^2)^2 + \ldots + (v_0 \times q^n)^2$$
$$= v_0^2 + v_0^2\times q^2 + v_0^2 \times (q^2)^2 + \ldots + v_0^2 \times (q^2)^n$$
$$= v_0^2\left(1+q^2+(q^2)^2+\ldots\ldots+(q^2)^n\right)$$

$1+q^2+(q^2)^2+\ldots\ldots+(q^2)^n$ هو مجموع $n+1$ حدا متعاقبة من متتالية هندسية أساسها q^2 و حدها الأول يساوي 1

إذن $T_n = v_0^2\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2} = 4\frac{1-\left(\frac{1}{25}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{25}}$ معناه

$$T_n = \frac{25}{6}\left(1-\left(\frac{1}{25}\right)^{n+1}\right)$$

$$T'_n = \frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}$$
$$= \frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_0\times q}+\frac{1}{v_0\times q^2}+\ldots+\frac{1}{v_0\times q^n}$$
$$= \frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_0}\times\frac{1}{q}+\frac{1}{v_0}\times\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{v_0}\times\frac{1}{q^n}$$
$$= \frac{1}{v_0}\left(1+\frac{1}{q}+\left(\frac{1}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{q}\right)^n\right)$$

$1+\frac{1}{q}+\left(\frac{1}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{q}\right)^n$ هو مجموع $n+1$ حدا متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{q}=5$ و حدها الأول يساوي 1 و

منه نجد $T'_n = \frac{1}{v_0}\left(\frac{1-5^{n+1}}{1-5}\right) = \frac{1}{8}\left(1-5^{n+1}\right)$.

✓ حساب الجداء $P_n = v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\ldots\times v_n$:

$$P_n = v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\ldots\times v_n$$
$$= v_0\times(v_0\times q)\times(v_0\times q^2)\times\ldots\times(v_0\times q^n)$$
$$= \underbrace{(v_0\times v_0\times\ldots\ldots\times v_0)}_{n+1\ fois}\times(q\times q^2\times\ldots\times q^n)$$

و منه $P_n = v_0^{n+1}\times q^{1+2+\ldots\ldots+n}$ حيث $v_0=-2$ و المجموع $1+2+\ldots\ldots+n$ يمثل مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية (n حد) أساسها 1 و حدها الأول يساوي 1 و منه $1+2+\ldots\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ، إذن :

$$P_n = \frac{(-2)^{n+1}}{5^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

حل التمرين الثامن عشر :

الوسط الحسابي : في متتالية حسابية مجموع حدين طرفين يساوي ضعف الحد الوسط .

لتكن a ، b ، c حدودا متتابعة من متتالية حسابية و منه $a+c=2b$ ، إذن :

$\begin{cases} a+b+c=9 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{3}\end{cases}$ تعني $\begin{cases} 3b=9 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{3}\end{cases}$ معناه

$\begin{cases} b=3 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{3}\end{cases}$ معناه $\begin{cases} b=3 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=2\end{cases}$ معناه

$\begin{cases} b=3 \\ \frac{a+c}{ac}=2\end{cases}$ حيث $a+c=2b=6$ و بالتالي نجد

$\begin{cases} b=3 \\ \dfrac{6}{ac}=2 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} b=3 \\ ac=3 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} b=3 \\ a(6-a)=3 \end{cases}$ و منه

$\begin{cases} b=3 \\ -a^2+6a-3=0 \end{cases}$.

مميز المعادلة $-a^2+6a-3=0$ هو $\Delta=24$

و منه نجد $a=3-\sqrt{6}$ أو $a=3+\sqrt{6}$

✓ إذا كان $a=3-\sqrt{6}$: نجد $c=6-(3-\sqrt{6})$

معناه $c=3+\sqrt{6}$ و منه

$$(a,b,c)=(3-\sqrt{6},3,3+\sqrt{6})$$

✓ إذا كان $a=3+\sqrt{6}$: نجد $c=6-(3+\sqrt{6})$

معناه $c=3-\sqrt{6}$ و منه

$$(a,b,c)=(3+\sqrt{6},3,3-\sqrt{6})$$

حل التمرين التاسع عشر :

لتكن α ، β ، γ حدودا متتابعة من متتالية حسابية و منه $\alpha+\gamma=2\beta$ ، إذن :

$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=15 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=83 \end{cases}$ تعني $\begin{cases} 3\beta=15 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=83 \end{cases}$ معناه

$\begin{cases} \beta=5 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=83 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \beta=5 \\ \alpha^2+\gamma^2=58 \end{cases}$ حيث

$\gamma=2\beta-\alpha=10-\alpha$ و منه نجد

$\begin{cases} \beta=5 \\ \alpha^2+(10-\alpha)^2=58 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \beta=5 \\ 2\alpha^2-20\alpha+42=0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} \beta=5 \\ \alpha^2-10\alpha+21=0 \end{cases}$.

مميز المعادلة $\alpha^2-10\alpha+21=0$ هو $\Delta=16$

و منه نجد $\alpha=3$ أو $\alpha=7$

✓ إذا كان $\alpha=3$: نجد $\gamma=10-3=7$ معناه

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(3,5,7)$$

✓ إذا كان $\alpha=7$: نجد $\gamma=10-7=3$ معناه

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(7,5,3)$$

حل التمرين العشرون :

الوسط الهندسي : في متتالية هندسية جداء حدين طرفين يساوي مربع الحد الوسط .

لتكن α ، β ، γ حدودا متتابعة من متتالية هندسية و منه $\alpha\times\gamma=\beta^2$ ، إذن :

$\begin{cases} \alpha\times\beta\times\gamma=64 \\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{7}{8} \end{cases}$ تعني $\begin{cases} \beta^3=64 \\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{7}{8} \end{cases}$ معناه

$\begin{cases} \beta=4 \\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{7}{8} \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \beta=4 \\ \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{5}{8} \end{cases}$ معناه

$\begin{cases} \beta=4 \\ \dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha\gamma}=\dfrac{5}{8} \end{cases}$ حيث $\alpha\gamma=\beta^2=16$ و منه نجد

$\begin{cases} \beta=4 \\ \alpha+\gamma=10 \end{cases}$.

بما أن $\begin{cases} \alpha+\gamma=10 \\ \alpha\gamma=16 \end{cases}$ فإن α و γ حلان للمعادلة من الدرجة الثانية التالية (راجع الأعمال الموجهة لمحور كثيرات الحدود) : $x^2-10x+16=0$

مميز المعادلة هو $\Delta=36$.

و نجد $x=2$ أو $x=8$

✓ إذا كان $\alpha=2$ فإن $\gamma=10-2=8$ و منه نجد

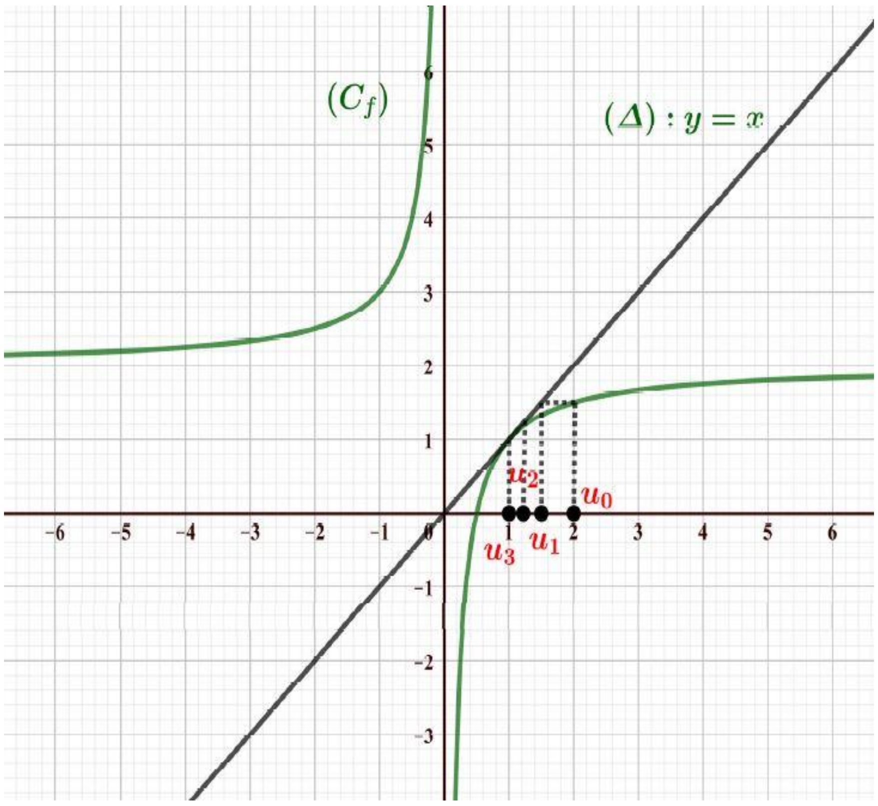
$$(\alpha,\beta,\gamma)=(2,4,8)$$

✓ إذا كان $\alpha=8$ فإن $\gamma=10-8=2$ و منه نجد

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(8,4,2)$$

حل التمرين الواحد و العشرون (للمراجعة) :

1) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 على محور الفواصل :



2) **التخمين** : $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ و المتتالية (u_n) متقاربة نحو 1 .

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n = \frac{2u_n-1}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n}$ ، من المعطيات نعلم أن $u_n > 1$ و بالتالي إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من إشارة البسط $-u_n^2+2u_n-1$:

نلاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$-u_n^2+2u_n-1 = -(u_n-1)^2$ و منه $u_{n+1}-u_n < 0$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

4) أ- من أجل كل عدد طبيعي n ،

$v_{n+1}-v_n = 3+\frac{1}{u_{n+1}-1} - 3 - \frac{1}{u_n-1}$ معناه

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n}-1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{2u_n-1-u_n}{u_n}} - \frac{1}{u_n-1}$$

معناه $v_{n+1}-v_n = \frac{u_n-1}{u_n-1} = 1$ عدد ثابت و بالتالي المتتالية (v_n) حسابية أساسها 1 و حدها الأول

$v_0 = 3+\frac{1}{u_0-1} = 3+1$ معناه $v_0 = 4$.

ب- كتابة عبارة الحد العام :

من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0 + nr$ معناه

$v_n = n+4$. و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$v_n = 3+\frac{1}{u_n-1}$ و منه $v_n - 3 = \frac{1}{u_n-1}$ و منه

$u_n - 1 = \frac{1}{v_n-3}$ و منه $u_n = 1+\frac{1}{v_n-3}$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 1+\frac{1}{n+4-3}$ معناه

$u_n = 1+\frac{1}{n+1}$.

و منه نجد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$ أي أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 1 . **(صحة التخمين)**

جـ- دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

طريقة 1 : من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}-u_n = 1+\frac{1}{(n+1)+1} - 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$$

معناه $u_{n+1}-u_n = \frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}$

من أجل كل عدد طبيعي n ، $(n+2)(n+1) > 0$ و بالتالي

$u_{n+1}-u_n < 0$ ، إذن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

طريقة 2 : نلاحظ أن $u_n = g(n)$ حيث g هي الدالة

المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 1+\frac{1}{x+1}$ و هي

متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ لأن g قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و من أجل كل $x \geq 0$ ،

$g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ ، إذن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

(صحة التخمين) .

د- حساب بدلالة n المجموع S_n :

عدد الحدود في المجموع S_n هو $n-0+1 = n+1$

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$$
$$= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

معناه $S_n = \frac{n+1}{2}\left(4+1+\frac{1}{n+1}\right)$ و منه

$$S_n = \frac{5(n+1)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(5n+6)$$

تقول الحكمة :

"إذا سعيت نحو أهدافك ، أهدافك بدورها ستسعى نحوك"

كتابة الأستاذ : حناش نبيل

لا تنسونا من صالح دعائكم ...