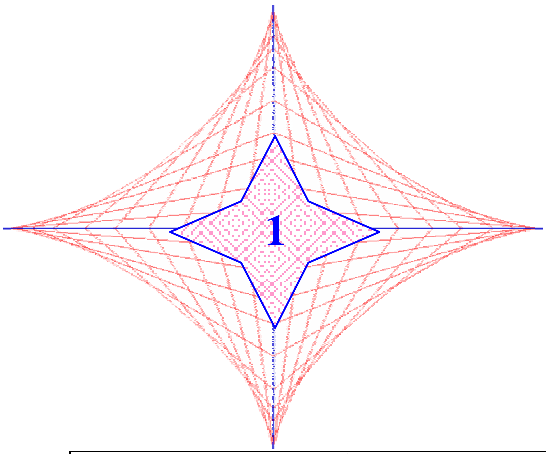
النسب المئوية والمؤشرات



الباب 1: النسب المئوية والمؤشرات

1. نسبة الجزء إلى الكلّ.
2. النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى.
3. التطورات و النسب المئوية.
4. المؤشرات.

- **الكفاءات المستهدفة :**

شعبة تسيير واقتصاد	شعبة آداب
- التمييز بين التغيّر المطلق و التغيّر النسبي. - حساب نسبة مئوية. - إرجاع زيادة أو تخفيض إلى شكل ضرب. - حساب وترجمة مؤشر تطور ظاهرة (سعر، سكان، إنتاج، ...). - التعبير بنسبة مئوية على زيادة أو تخفيض. - تعيين نسبة التطوّر الإجمالية بمعرفة نسبتين متتاليتين للتطوّر.	- التمييز بين التغير المطلق و التغير النسبي. - معرفة حساب نسبة مئوية. - معرفة تحويل زيادة أو نقصان نسبة مئوية إلى ضرب. - معرفة حساب وتفسير مؤشر نمو ظاهرة(سعر، إنتاج، عدد السكان،...). - التعبير عن زيادة أو نقصان بنسبة مئوية. - تحديد نسبة النمو الإجمالي بمعرفة نسبتي نمو متتابعتين.

- **جدول تمفصل الأجزاء**

أنشطة	معارف		طرائق
1	1. نسبة الجزء إلى الكلّ	• نسبة الجزء إلى الكلّ .	1
2	2. النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى	• النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى.	
3	3. التطورات و النسب المئوية	• التعبير عن زيادة أو تخفيض. • التطوّر المطلق و التطوّر النسبي.	

		• المعامل الضربي. • التطوّرات المتعاقبة.	2
4	4. المؤشرات	• المؤشرات.	3 4 5

• **توجيهات لتنفيذ الأنشطة**

استبيان متعدد الإجابات

يهدف هذا الاستبيان إلى تقويم مكتسبات التلاميذ حول مفهوم النسبة المئوية وبالأخصّ الحساب على النسب المئوية. يسمح هذا النشاط بذكر بعض الأخطاء الشائعة المتعلقة بهذا المفهوم قصد تفاديها .

الأنشطة التمهيدية

نشاط 1: نسبة الجزء إلى الكلّ

يهدف هذا النشاط إلى تمكين التلميذ من حساب نسب مئوية مختلفة وتوظيف النسبة المئوية لحساب بعض القيم. ومن خلال المثال الملموس المقترح يستنتج التلميذ تعريف نسبة الجزء إلى الكلّ.

نشاط 2: النسبة المئوية لنسبة مئوية أخرى

يرمي هذا النشاط إلى جعل التلميذ يستنتج، من خلال مثال بسيط، الخاصية التي تسمح بحساب نسبة مئوية لنسبة مئوية أخرى.

نشاط 3: التطوّر والنسبة المئوية

يهدف هذا النشاط إلى تمكين التلميذ من استنتاج الخاصية التي تسمح بإيجاد النسبة المئوية لتطوّر إجمالي الناتجة عن تطوّرات متعاقبة.

نشاط 4: المؤشرات

يهدف هذا النشاط إلى تمكين التلميذ من الوصول إلى تعريف المؤشر وبالتالي استغلال هذا المؤشر لحساب النسبة المئوية لتطوّر ظاهرة ما.

- **تمارين ومسائل:**

1. صحيح أو خاطئ

أ) صحيح ه) خاطئ

ب) صحيح و) خاطئ

ح) صحيح ك) خاطئ

د) خاطئ ل) صحيح

نسبة الجزء إلى الكلّ

.7

	أقل من 18 سنة	من 18 إلى 60 سنة	أكثر من 60 سنة	المجموع
ذكور	9,07	32,76	8,57	50,4
إناث	10,91	31,24	7,44	49,6
المجموع	19,98	64	16,01	100

ملاحظة: النتائج مدوّرة إلى 0,01.

.16

1) الدستور: $L_1*17/100$.

2) القيم : 213,52، 820,42، 1336,2، 1087,2، 1734,0، 4367,3.

نسب مئوية لنسب مئوية

.18

$$\frac{53\times17}{100}\%=9{,}01\%$$

.21

المعامل الضربي الإجمالي هو:

$$1{,}1\times1{,}08\times1{,}06=1{,}2593$$

إذن النسبة المئوية للزيادة الإجمالية هي: $25{,}93\ \%$.

.24

$$\frac{18\times49}{100}\%=8{,}82\%$$

.25

أ) $\frac{25\times18}{100}\%=4{,}5\%$ ،

ب) $\frac{1}{10}\times40\%=4\%$ ،

ج) $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\%\approx16{,}67\%$ ،

د) $\frac{3}{4}\times\frac{8}{10}\%=60\%$

ه) $12\times\frac{5}{36}\%\approx1{,}67\%$

و) $20\times\frac{4}{5}\%\approx16\%$.

التطوّرات والنسب المئوية

.27

أ) $125\times1{,}06=132{,}50$.

ب) $125\times0{,}92=115$

.28

1) 200%.

2) 40%.

3) -50%.

.29

أ) 1,25 ، ب) 0,6 ، ج) 0,968 ، د) 3.

.30 14% ، $2{,}8\%$ ، $-1{,}2\%$ ، -63% ، -20% ، 224%.

2) الدستور: $=(C2-1)\times100$

.31

1,35 ، 1,4 ، 1,072 ، 0,91 ، 1,001 ، 0,82.

.33

- تخفيض *4 %* متبوع بتخفيض *6 %* يوافق المعامل الضربي قدره : $0,96\times0,94=0,9024$
أي تخفيض إجمالي قدره $9,76\%$.
- تخفيض *6 %* متبوعا بتخفيض *4 %* يوافق تخفيضا إجماليا قدره $9,76\%$.
- تخفيض *5 %* متبوعا بتخفيض *5 %* يوافق المعامل الضربي قدره : $0,95\times0,95=0,9025$
أي تخفيض إجمالي قدره $9,75\%$.

إذن الطريقة الأكثر فائدة بالنسبة إلى الزبائن هي الطريقة الأخيرة أي تخفيض *10 %*.

.38

1) الدستور: L_2-L_1.
القيم: -16 ، 18 ، 15 ، -20 ، -35.
2) الدستور: L_3/L_1
التطورات النسبية: $-0,1026$ ، 0,0756 ، 0,125 ، $-0,0769$ ، 0,0462.
3) الدستور: L_2/L_1.
المعاملات الضربية: 0,8974 ، 1,0756 ، 1,125 ، 0,9231 ، 0,9538.

.40

1) الدستور: $=B2/A2$.
المعاملات الضربية: 1,1258 ، 1,0733 ، 0,8730 ، 1,2894.

النسب المئوية: $12,58\%$ ، $7,33\%$ ، $-12,70\%$ ، $20,94\%$.

المؤشرات

.42

السنة	1996	1997	1998	1999
القمح	100	22,19	76,43	50,39
الشعير	100	10,61	38,89	26,72

ملاحظة: النتائج مدوّرة إلى 0,01.

.44

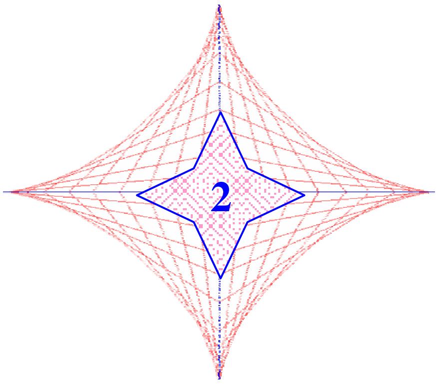
1) الدستور: $L_2/L_1(4)*100$.
المؤشرات: 240 ، 270 ، 120 ، 100 ، 180 ، 90.

مسائل

.49

1) $192=\frac{4800}{25}$.
السعر الوسطي للكتاب الواحد: 192 دينارا
2)
أ) المعامل الضربي الموافق لزيادة قدرها بـ 10% هو 1,1.
إذن السعر الوسطي للكتاب الواحد في سنة 2004 هو: $192\times1,1=211,20$.
$\frac{4800}{211,2}\approx22,7$ أي 22 كتابا.
ب) انخفضت القدرة الشرائية لرب العائلة.
3)
أ) $\frac{4800+600}{25}=216$. (216 كتابا).
ب) ازدادت القدرة الشرائية لرب العائلة.

الإحصاء



الباب 2: الإحصاء

1. السلاسل الزمنية. Œ
2. التمليس بالأوساط المتحركة .Œ
3. المدرجات التكرارية.
4. التباين و الانحراف المعياري.
5. الربعيات و العشريات و المخطط بالعلبة.
6. التجربة العشوائية و المحاكاة.

- **الكفاءات المستهدفة :**

شعبة تسيير و اقتصاد	شعبة آداب
- تمثيل سلسلة إحصائية منظمة في فئات مختلفة الأطوال بمدرج تكراري. - حساب انحراف معياري وترجمته. - حساب الربيعيات و العشريين الأول و التاسع لسلسلة إحصائية. - تمثيل سلسلة إحصائية بمخطط بالعلبة وترجمته. - مقارنة مخططات بالعلبة لسلاسل مختلفة.	- إنجاز محاكاة تجارب عشوائية بسيطة. - معرفة مفهوم تذبذب العينات. - حساب الانحراف المعياري لسلسلة إحصائية وتفسيره. - معرفة تحديد وتفسير الربيعيين الأدنى والأعلى Q_1 و Q_3. - إنشاء وتفسير مخطط بالعلبة. - تعيين الانحراف الربيعي لسلسلة إحصائية.

- **جدول تمفصل الأجزاء:**

أنشطة	معارف		طرائق
	.1 السلاسل الزمنية	• السلسلة الزمنية	
1	.2 التمليس بالأوساط المتحركة *.	• الأوساط المتحركة. • التمليس بالأوساط المتحركة .	1
2	3.المدرجات التكرارية	• المدرج التكراري	
		• الوسط.	3

3	4.التباين - الانحراف المعياري	• التباين. • الانحراف المعياري.	5
4	5. الربعيات- العشريات – المخطط بالعلبة	• الوسيط. • الربعيات والعشريات. • المخطط بالعلبة.	4 6
5	6. التجربة العشوائية- المحاكاة.	• التجربة العشوائية. • العينة. • محاكاة تجربة عشوائية.	7 8 9 10

- **توجيهات لتنفيذ الأنشطة :**

استبيان متعدد الإجابات:

يهدف هذا الاستبيان إلى تقويم مكتسبات التلاميذ حول المصطلحات الإحصائية والمؤشرات الإحصائية والتمثيلات البيانية المدروسة في السنة الأولى.

أنشطة تمهيدية :

نشاط 1: التمليس بالأوساط المتحركة.

يهدف هذا النشاط إلى مقاربة مفهوم التمليس بالأوساط المتحركة انطلاقا من مثال ملموس . يسمح للتلميذ من إدراك بعض النتائج الناجمة عن هذا التمليس..

نشاط 2: المدرجات التكرارية.

يرمي هذا النشاط إلى تمكين التلميذ من إنجاز مدرج تكراري لسلسة إحصائية معطاة في شكل فئات مختلفة الأطوال و منه استنتاج قواعد الإنشاء.

نشاط 3: التباين، الانحراف المعياري.

يرمي هذا النشاط إلى تمكين التلميذ من التعرف على معياري تشتت جديدين هما التباين والانحراف المعياري واستغلالهما لمقارنة سلسلتين إحصائيتين لهما نفس الوسط.

نشاط 4: الوسيط والربعيات.

يهدف هذا النشاط إلى التطرق إلى مفهوم الربعي ومن ثمة الانحراف الربعي الذي هو معيار تشتت أخر يسمح بتحليل سلسلة إحصائية وبمقاربة سلسلتين إحصائيتين بأكثر دقة. ويستغل هذا المفهوم في تمثيل سلسلة إحصائية بمخطط بالعلبة.

نشاط 5: التجربة العشوائية

يهدف هذا النشاط إلى تمكين التلميذ من إنجاز محاكاة لتجربة عشوائية ومن خلالها التطرّق إلى مفهوم تذبذب العيّنات. يعتبر هذا النشاط أساسا هاما لمقاربة مفهوم الاحتمال مقاربة تواترية.

- **تمارين ومسائل:**

1. صحيح أو خاطئ

أ) صحيح ه) صحيح

ب) صحيح و) صحيح

حـ) خاطئ ك) صحيح

د) خاطئ ل) صحيح

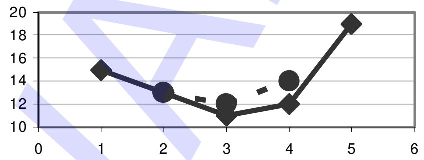
الأوساط المتحركة

.2

(1

الثلاثاء	الاثنين	الأحد	اليوم
14	12	13	القيمة (°)

(2



المدرجات التكرارية

.4

المدرج التكراري 2 .

.7

[45;60[	[40;45[	[35;40[	[30;35[	[20;30[
60	45	45	90	40

الوسط- التباين – الانحراف المعياري

.10

الوسط: $\overline{x} \approx 0,14$

التباين: $V \approx 3,24$

الانحراف المعياري: $\sigma \approx 1,80$

(النتائج مدوّرة إلى 0,01).

.15

تؤخذ مراكز الفئات كقيّم السلسلة ونجد:

الوسط: $\overline{x} \approx 9,05$

الانحراف المعياري: $\sigma \approx 4,45$.

الوسيط- الربعيات – المخطط بالعلبة

.17

السلسلة	Me	Q_1	Q_3
1	5,5	3	8
2	7	4	7
3	15	15	17

.19

السلسلة	Me	Q_1	Q_3
1	8	7	11
2	63	55	80

المحاكاة

.25

1) الوسط: $\overline{x} = 10,5$.

مسائل

.32

1) حسب خواص وسط سلسلة إحصائية

فإن: $\overline{y} = \overline{x} + b$

2) أ) لتوليد عينة من 50 عددا مأخوذة بصفة عشوائية من بين الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 و 20 نستعمل أحد الدستورين:

- بالحاسبة:

$$seq(randInt(1,20),X,1,50) \to L_1$$

- بالمجدول:

=ENT(ALEA()*(20-1)+1)

3) نلاحظ أن الأوساط الناتجة تقترب من 10,5.

.26

(1

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار	74	53	73	69	61	70
التواتر	0,184	0,132	0,183	0,173	0,152	0,176

(2

أ) 0,184.

ب) $0{,}132+0{,}173+0{,}176=0{,}481$.

جـ) $0{,}184+0{,}183+0{,}152=0{,}519$.

$$V'=\frac{\sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2}{N}=\frac{\sum\left[x_i+b-\left(\bar{x}+b\right)\right]^2}{N}$$

$$=\frac{\sum\left(x_i+b-\bar{x}-b\right)^2}{N}=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{N}=V$$

$$\sigma'=\sqrt{V'}=\sqrt{V}=\sigma$$

2) لتكن السلسلة الجديدة (z_i) حيث $z_i=ax_i$.

$\bar{z}$ ، V'' ، σ'' هي الوسط والتباين والانحراف المعياري للسلسلة (z_i).

حسب خواص وسط سلسلة إحصائية فإن: $\bar{z}=a\bar{x}$.

$$V''=\frac{\sum\left(z_i-\bar{z}\right)^2}{N}=\frac{\sum\left[ax_i-a\bar{x}\right]^2}{N}$$

$$=\frac{\sum a^2\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{N}=a^2\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{N}=a^2V$$

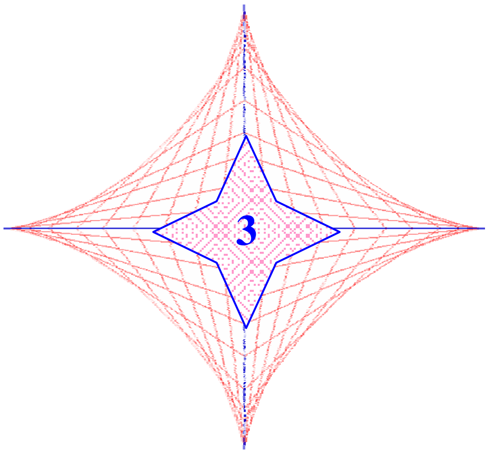
$$\sigma''=\sqrt{V''}=\sqrt{a^2V}=|a|\sqrt{V}=|a|\sigma$$

(3

الخاصية 1: إذا أضفنا نفس القيمة b إلى كل قيم سلسلة إحصائية فكل من تباينها وانحرافها المعياري لم يتغير..

الخاصية 1: إذا ضربنا كل قيم سلسلة إحصائية في نفس القيمة a فتباينها يضرب في مربع العدد a وانحرافها المعياري يضرب في القيمة المطلقة للعدد a.

عموميات على الدوال



الباب 3: عموميات على الدوال Œ

1. الدالة " مكعّب ".
2. العمليات على الدوال.
3. المنحنيات و التحويلات النقطية.
4. عناصر تناظر منحنيات.

- **الكفاءات المستهدفة :**
  - معرفة تغيرات الدالة " مكعّب ".
  - تمثيل الدالة " مكعّب " بيانيا.
  - تعريف مجموع وجداء وحاصل قسمة ومركب دالتين عدديتين.
  - استنتاج منحنيات دوال مرفقة انطلاقا من منحنيات دوال معطاة.
  - البرهان على أنّ نقطة هي مركز تناظر المنحني الممثل لدالة.
  - البرهان على أنّ مستقيم هو محور تناظر المنحني الممثل لدالة.
- **جدول تمفصل الأجزاء :**

أنشطة تمهيدية	معارف		طرائق
1	1. الدالة " مكعّب ".	- تعريف الدالة " مكعب". - خاصية. - دراسة تغيرات الدالة "مكعب". - التمثيل البياني.	1 2 3
2	2. العمليات على الدوال.	- مجموع دالتين. - فرق دالتين. - جداء دالتين. - جداء دالة بعدد حقيقي. - حاصل قسمة دالتين. - مركب دالتين.	4 5 6
3 4	3. المنحنيات و التحويلات النقطية.	- إنشاء المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto f(x+k)$.	7

		- إنشاء المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto f(x)+k$. - إنشاء المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto k.f(x)$. - إنشاء المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto -f(x)$. - إنشاء المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto f(-x)$.	
5	4. عناصر تناظر منحيات.	- تعريف الدالة الزوجية. - تعريف الدالة الفردية. - خواص. - محور تناظر منحن. - مركز تناظر منحن.	8 9

- **توجيهات لتنفيذ الأنشطة :**

استبيان متعدد الإجابات :

يهدف هذا الاستبيان إلى تقويم مكتسبات التلميذ حول العموميات على الدوال والدوال المرجعية المدروسة خلال السنة الأولى ثانوي جذع مشترك علوم وتكنولوجيا. بحيث يوضع التلميذ أمام وضعيات بسيطة يبرهن من خلالها على تحكمه في بعض المفاهيم والطرائق المدروسة مثل: التمييز بين مختلف الدوال المرجعية، تعيين صورة أو سابقة بدالة، تحديد زوجية دالة أو فرديتها وتعيين اتجاه تغيّر دالة مرجعية.

أنشطة تمهيدية :

نشاط 1: مقارنة مكعبي عددين حقيقيين

يهدف هذا النشاط إلى مقاربة اتجاه تغيّر الدالة " مكعّب " وذلك بالاعتماد على المتطابقة الشهيرة $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ودراسة إشارة العبارة a^3-b^3.

نشاط 2: العمليات على الدوال

يهدف هذا النشاط إلى إدراج العمليات على الدوال من خلال العمليات على العبارات الجبرية المعرفة على مجموعة E، حيث E جزء من $\mathbb{R}$.

نشاط 3: الدوال المرفقة

الهدف من هذا النشاط هو استعمال المنحنى الممثل لدالة مرجعية لرسم المنحنى الممثل للدالة المرفقة من الشكل $x \mapsto f(x)+k$ حيث k عدد حقيقي معطى.

لذلك، نعتمد على انسحاب يطلب تعيين شعاعه في كلّ حالة لاستنتاج المنحنى الممثل للدالة.

نشاط 4: الدوال المرفقة

الهدف من هذا النشاط هو استعمال المنحنى الممثل لدالة مرجعية لرسم المنحنى الممثل للدالة المرفقة من الشكل $x \mapsto f(x+k)$ حيث k عدد حقيقي معطى.
لذلك، نعتمد أيضا على انسحاب يطلب تعيين شعاعه في كلّ حالة لاستنتاج المنحنى الممثل للدالة.

نشاط 5: عناصر تناظر منحن

الهدف من هذا النشاط هو التمهيد إلى دراسة عناصر تناظر منحن انطلاقا من دراسة طبيعة دالة (زوجية أو فردية) على مجموعة تعريفها.

- **تمارين ومسائل :**

.1
صحيح أو خاطئ
الجمل الصحيحة هي: 2؛ 5؛ 8.

.2
$f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$ ؛ $f(0)=0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ؛ $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$

.4
إذا كان $n>2$ فإنّ $n^3>8$.
إذا كان $n<-3$ فإنّ $n^3<-27$.
إذا كان $1 \le n \le 3$ فإنّ $1 \le n^3 \le 27$
إذا كان $-1<n$ فإنّ $-1<n^3$.

.6
1) أصغر عدد طبيعي n بحيث إذا كان $x \ge n$ فإنّ $x^3 \ge 10^6$ هو حلّ المعادلة $x^3 = 10^6$ أي $n = 10^2$.
2) أصغر عدد طبيعي n بحيث إذا كان $x \ge n$ فإنّ $x^3 \ge -10^9$ هو حلّ المعادلة $x^3 = 0$ أي $n=0$ (لأن $-10^9 < 0$ و $n^3 \ge 0$) .

.13
(1
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = -10x+14$
لتعيين الدوال المركبة الأخرى يعتمد

.8
- إذا كان $x \in [0;1]$ فإنّ
$0 \le x^3 \le x^2 \le x \le 1$.
- إذا كان $x \in [1;+\infty[$ فإنّ
$1 \le x \le x^2 \le x^3$.

.10
$f(x)+g(x) = 2x+1$ ؛ $D = \mathbb{R}$
$-g(x) = x-1$ ؛ $D = \mathbb{R}$
$f(x)-g(x) = 4x-3$ ؛ $D = \mathbb{R}$
$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{-x+1}$ ؛ $D = \mathbb{R} - \{1\}$
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-2}{-x+1}$ ؛ $D = \mathbb{R} - \{1\}$
وبالمثل، نعيّن الدوال المطلوبة في الحالات الأخرى وكذا مجموعة تعريف كلّ منها. يكفي للتلميذ الاعتماد على تعاريف العمليات على الدوال وخواص العمليات الجبرية المعرفة على $\mathbb{R}$.
$f(1+h) = h^2+1$ و $f(1-h) = h^2+1$
أي $f(1+h) = f(1-h)$.

التلميذ على تعريف الدالة المركبة لدالتين على أن يحترم ترتيب الدالتين.

.17

f هي الدالة " مربع ".

1) h تفكك كما يلي:

$$x \xrightarrow{f} x^2 \xrightarrow{g} 3x^2 \xrightarrow{h} 3x^2-1$$

حيث:

$g(x)=3f(x)$ و $h(x)=g(x)-1$

في الحالات الأخرى، نعيّن الدوال المرجعية التي يمكن الاعتماد عليها لتفكيك الدالة ثمّ نتحقق من صحة التفكيك.

.19

2) (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$.

(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{i}$.

3) g معرفة على المجال $[-3;3]$.

h معرفة على المجال $[-1;5]$.

.38

1) نكتب $f(x)$ على الشكل النموذجي وهو $f(x)=(x-1)^2+1$.

2) من أجل كلّ عدد حقيقي x حيث $x=1+h$، العدد $1-h$ عدد حقيقي. لدينا:

وبالتالي يكون المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر المنحنى (C_f).

.49

1) f متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

على المجال $[0;+\infty[$، $x^2 \geq 0$ و $2x \geq 0$ وبالتالي، من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب، $f(x) \geq 0$.

2) g معرفة على $[0;+\infty[$ بالدستور $g(x)=-1+\sqrt{x+1}$.

g متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

من أجل كلّ عدد موجب x، $\sqrt{x+1} \geq 1$. إذن $-1+\sqrt{x+1} \geq 0$ وبالتالي، من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب، $g(x) \geq 0$.

3)

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g(x^2+2x)$$
$$= -1+\sqrt{x^2+2x+1}$$
$$= -1+\sqrt{(x+1)^2}$$

إذن

$$(g \circ f)(x) = -1+\sqrt{(x+1)^2}$$

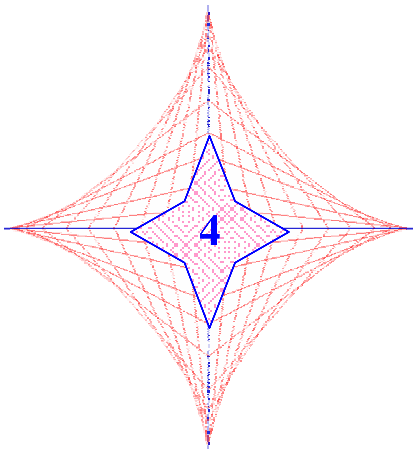
بما أنّ $x \geq 0$ فإنّ $x+1 \geq 0$.

وبالتالي $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$.

منه $(g \circ f)(x) = -1+x+1 = x$

إذن الدالة $g \circ f$ معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $(g \circ f)(x) = x$.

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية



الباب 4: المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

1. ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.
2. المعادلات من الدرجة الثانية.
3. المتراجحات من الدرجة الثانية.
4. حلّ، بيانيا، معادلات ومتراجحات من الدرجة الثانية.

- **الكفاءات المستهدفة :**

شعبة تسيير واقتصاد	شعبة آداب
- تمثيل دالة من الشكل: $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ مع $a \neq 0$ وإنشاء جدول تغيرّاتها. - استعمال التمثيل البياني لثلاثي الحدود لاستنتاج وجود حلول المعادلة أو المتراجحة من الدرجة الثانية المرفقة.	- إنشاء التمثيل البياني للدالة: $x \mapsto ax^2+bx+c$ - تحديد جذور ثلاثي الحدود وإشارته. - حلّ معادلة من الدرجة الثانية باستعمال التمثيل البياني للدالة: $x \mapsto ax^2+bx+c$ - حلّ معادلة من الدرجة الثانية جبريا.

- **جدول تمفصل الأجزاء :**

أنشطة تمهيدية	معارف		طرائق
	1. ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية	- الدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية. - الشكل النموذجي لثلاثي الحدود من الدرجة الثانية.	1
1 2		- التمثيل البياني لدالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية. - تغيرات دالة ثلاثي الحدود	2

		من الدرجة الثانية.	
4	2. المعادلات من الدرجة الثانية		4
	3. المتراجحات من الدرجة الثانية		
5	4. حلّ معادلات ومتراجحات من الدرجة الثانية بيانيا		5
3	5. حلّ مشكلات باستعمال معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية بيانيا		3

- **توجيهات لتنفيذ الأنشطة :**

استبيان متعدد الإجابات :

تتعلق الأسئلة بالمكتسبات القبلية حول العبارات الجبرية والمعادلات.

أنشطة تمهيدية :

نشاط1: صورة قطع مكافئ بانسحاب »

الهدف من هذا النشاط استنتاج التمثيل البياني لدالة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية باستعمال التمثيل البياني للدالة " مربع".

نشاط 2: دراسة دالة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية

الهدف من هذا النشاط دراسة دالة كثير حدود من الدرجة الثانية واستعمال التمثيل البياني لثلاثي الحدود لاستنتاج وجود حلول معادلة أو متراجحة الدرجة الثانية.

نشاط 3: حلّ مشكلة باستخدام معادلة من الدرجة الثانية

الهدف من هذا النشاط هو حلّ مشكلة بنمذجتها باستعمال معادلة من الدرجة الثانية.

نشاط 4: الصيغ المختلفة لثلاثي الحدود

الهدف من هذا النشاط هو كتابة عبارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية بصيغ مختلفة واختيار الصيغة الأنسب لحلّ معادلة.

نشاط 5: التحقق من حلّ معادلة بحاسبة بيانية

الهدف من هذا النشاط هو استعمال حاسبة بيانية لتمثيل دالة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية واستعماله للتحقق من حلّ معادلة.

- **تمارين ومسائل :**

.1

أصحيح أم خاطئ

أ) خاطئ
ب) صحيح
ج) خاطئ
د) خاطئ
هـ) خاطئ
و) صحيح
ز) خاطئ
ي) صحيح

الشكّل النموذجي لثلاثي الحدود

.2

أ) x^2-6x+9
ب) $x^2-6x=(x-3)^2-9$
حـ) $(x-3)^2-7$.

.3

أ) $x^2+4x+3=(x-2)^2-1$
ب) $x^2-5x-1=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$
حـ) $-3x^2+x+1=-3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{12}$
د) $4x^2-x+1=4\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{17}{16}$

.6

أ) $(x-7)(x-3)$
ب) $(x-0,7)(x+0,7)$
حـ) $\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
د) $-x^2-5x-60$

الدوال ثلاثي الحدود

.12

$a=-1$ و $c=3$.

.13

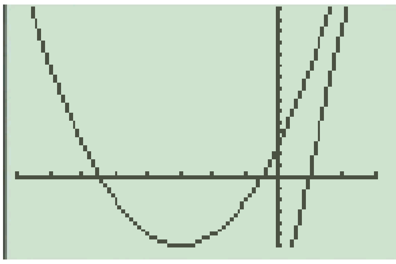
الدالة الممثلة كما على الشكل هي الدالة $x\xrightarrow{g}x^2+3x$.

.15

1) باستعمال حاسبة بيانية نحصل على المنحنيين التاليين الممثلين للدالتين f و g حيث:

$x\xrightarrow{f}13x-12$

و $x\xrightarrow{g}x^2+6x+3$



2) لمعرفة الوضع النسبي للمنحنيين، نختار نوافذ مناسبة ونضع التخمين أنّ المنحنيين لا يتقاطعان.

3) نتحقق حسابيا بحلّ المعادلة $x^2+6x+3=13x+12$ ...

المعادلات من الدرجة الثانية

.18

أ) $x=\frac{11}{4}$ أو $x=-1$

.19

أ) $\Delta = 169$. $x_1 = -3$ أو $x_2 = \frac{4}{3}$

د) $\Delta = 0$. $x_0 = \frac{1}{5}$

ج) $\Delta = 27$. $x_1 = -\sqrt{3}$ أو $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

هـ) $\Delta = 6,25$. $x_1 = -\frac{1}{2}$ أو $x_2 = 2$

.22

لحلّ المعادلة $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ ، نضع $y = x^2$.

المعادلة تصبح $y^2 - 2y - 8 = 0$.

مميّز هذه المعادلة هو $\Delta = 36$. فهي تقبل حلّين متمايزين هما $y_1 = -2$ (وهو حلّ مرفوض) أو $y_2 = 4$.

ونستنتج حلول المعادلة $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

.23

أ) مجموعة حلول المعادلة: $\left\{ -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right\}$

ب) المعادلة لا تقبل حلولا.

إشارة ثلاثي الحدود

.26

1. أ) $(-2;0)$ ، $(1;0)$

ب) $(0;-2)$.

ج) $(-1;-2)$ ، $(1;0)$.

2. نتحقق من النتائج بقراءة بيانية.

.37

.27

بقراءة بيانية، نستنتج أنّ المنحنيين يتقاطعان في النقطتين $M_1(-1;4)$ و $M_2(1,5;2,5)$.

ونتحقق من النتائج حسابيا بحلّ المعادلة $x^2 - x + 2 = 3x^2 - 2x - 1$ ، أي $2x^2 - x - 3 = 0$ حيث نجد أنها تقبل حلّين هما -1 و $1,5$.

ثم بالتعويض في إحدى معادلتي المنحنيين نجد النقطتين $M_1(-1;4)$ و $M_2(1,5;2,5)$.

.28

حلول $f(x) \leq g(x)$ توافق فواصل نقط المنحني (C_f) الواقعة أسفل نقط المنحني (C_g): $[2;4]$.

لدينا $f(x) \leq g(x)$ تكافئ $x^2 - 4x + 4 \leq -x^2 + 8x - 12$ أي $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ ....

حلول المتراجحة المفروضة هي $[2;4]$.

.29

ب) حلول المتراجحة $f(x) < 0$: $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]1;2[$.

حلّ معادلات أو متراجحات من الدرجة الثانية بيانيا.

.33

ب) $x \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$

أ) صحيح.

ب) صحيح.

.41

أ) 4 حلول.

ب) نحلّ المعادلة

$(x^2+3x+2)(x^2-4x+3)=0$ ...

مسائل

.45

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

.46

نضع L طول و l عرض المستطيل (L و l عددان حقيقيان موجبان).

لدينا: $\begin{cases} L=l+7 \\ l(l+7)=60 \end{cases}$

نجد $l=5m$ و $L=12m$.

.48

x عدد حقيقي موجب. نضع $A(x)$ مساحة الجزء المظلل .

لدينا $A(x)=x^2+5x$.

نحلّ المتراجحة $x^2+5x>6$ ...

.50

1. $C_M(x)=\frac{1}{27}x^2-\frac{10}{3}x+150$

2. $C_M(9)=123$

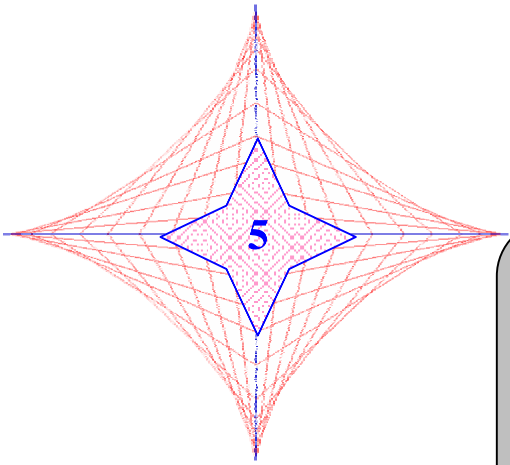
$C_M(x)=C_M(9)$ تكافئ

$$\frac{1}{27}x^2-\frac{10}{3}x+150=123$$

نحلّ المعادلة $x^2-90x+729=0$ حيث $x>0$ ...

3. $x=45$

الإشتقاق



الباب 5: الاشتقاق

1. العدد المشتق.
2. معادلة المماس لمنحن عند نقطة منه.
3. الدوال المشتقة.
4. عمليات على الدوال المشتقة.
5. الدالة المشتقة واتجاه التغيّر.
6. القيم الحدية لدالة. Œ
7. التقريب التآلفي المماسي لدالة. Œ

- **الكفاءات المستهدفة :**

شعبة تسيير واقتصاد	شعبة آداب
- مقاربة مفهوم العدد المشتق على مثال. - معرفة العدد المشتق للدوال المرجعية المقررة من أجل قيمة معينة x_0. - ترجمة العدد المشتق بيانيا. - تعيين المعادلة المبسطة لمماس. - إنشاء المماس عند نقطة A للمنحنى الممثل لدالة مرجعية مقررة. - تعريف الدالة المشتقة لدالة قابلة للاشتقاق على مجال. - حساب مشتق مجموع وجداء وحاصل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق. - حساب مشتق دالة كثير حدود ودالة ناطقة من الشكل: $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$. - الربط بين اتجاه تغيّر دالة وإشارة مشتقها. - تعيين القيم الحدية لدالة قابلة للاشتقاق على مجال. - تعيين التقريب التآلفي لدالة عند قيمة انطلاقا من أثلة بسيطة.	- تعيين العدد المشتق لدالة مرجعية مقررة. - تعيين معادلة المماس لمنحنى الدالة " مربع ". - تعيين معادلة لمماس منحني دالة مرجعية. - تعيين العدد المشتق لدالة f عند x_0. - التعرّف على قابلية اشتقاق دالة عند x_0. - تعيين الدوال المشتقة للدوال المرجعية: $x \mapsto k$ ؛ $x \mapsto ax+b$ $x \mapsto x^2$ ؛ $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ - حساب مشتقة مجموع دالتين ومشتقة جداء دالتين ومشتقة مقلوب دالة ومشتقة الدالة " قوة ". - استعمال إشارة المشتقة لتحديد اتجاه تغيّر دالة على مجال.

- **جدول تمفصل الأجزاء :**

أنشطة تمهيدية	معارف		طرائق
1 2	1. العدد المشتق.	- النهاية عند 0. - نسبة تزايد دالة بين عددين حقيقيين. - العدد المشتق عند a.	1 2 3 4 5
3	2. معادلة المماس لمنحن عند نقطة منه.		6
4	3. الدوال المشتقة.	- قابلية الاشتقاق لدالة على مجال. - الدالة المشتقة لدالة. - الدوال المشتقة لدوال مألوفة.	
	4. عمليات على الدوال المشتقة.	- الدالة المشتقة لمجموع دالتين. - الدالة المشتقة لجداء دالتين. - الدالة المشتقة لمقلوب دالة. - الدالة المشتقة لحاصل قسمة دالتين. - الدالة المشتقة لدالة كثير حدود. - الدالة المشتقة لدالة تناظرية.	
	5. الدالة المشتقة واتجاه التغيّر		7
	6. القيم الحدية لدالة.		8
	7. التقريب التآلفي المماسي لدالة.	- تعريف. - تقريب n زيادة متتابعة.	9 10

- **توجيهات لتنفيذ الأنشطة :**

استبيان متعدد الإجابات :

يهدف الاستبيان متعدد الإجابات إلى تقويم بعض المكتسبات المتعلقة بمفهوم الاشتقاق.
يشكل مفهوم نهاية دالة عند عدد x_0 العنصر الأساسي في بناء مفهوم العدد المشتق لدالة عند x_0 ، فيكون ربط هذا المفهوم بمعامل توجيه المماس لمنحن عند نقطة منه مناسبة للانتقال من المجال العددي إلى المجال الهندسي.

أنشطة تمهيدية :

نشاط 1: حساب معامل توجيه مستقيم

يهدف هذا النشاط إلى مقاربة مفهوم العدد المشتق لدالة عند عدد x_0. فهو يمثل معامل توجيه المماس للمنحنى الممثل للدالة عند النقطة التي فاصلتها x_0.

تسمح القراءة البيانية لإحداثيات نقط والبحث عن معامل توجيه مستقيم انطلاقا من نقطتين متمايزتين منه للتلميذ بالربط بين نسبة تزايد دالة بين عددين حقيقيين ومفهوم معامل توجيه هذا المستقيم.

نشاط 2: حساب جبري

يهدف هذا النشاط إلى مقاربة مفهوم العدد المشتق لدالة من خلال حساب نسبة تزايد هذه الدالة بين العددين x_0 و x_0+h.

عند حساب النسب المطلوبة، يتوصل التلميذ إلى كتابتها على أبسط شكل لها وهذا ما يسهّل حساب نهايتها عندما يؤول h إلى 0.

نشاط 3: مستقيمات قاطعة لمنحن تشمل نقطة

يهدف هذا النشاط إلى دراسة معامل توجيه كلّ مستقيم يقطع المنحنى الممثل لدالة في نقطتين متمايزتين.إنّ دراسة قيم معامل التوجيه هذا القاطع وبالخصوص عندما تكون النقطتان قريبتين جدا من بعضهما يبرز الوضع " النهاية " للقاطع وهو ما يُعبّر عن مفهوم المستقيم المماس للمنحني عند نقطة منه.

نشاط 4: مفهوم السرعة اللحظية

يهدف هذا النشاط إلى دراسة وضعية ذات دلالة وهي الوضعية التي توظف مفهوم المسافة ومفهوم السرعة المتوسطة. فتغيّر السرعة بين لحظتين يسمح بتوظيف مفهوم نسبة التزايد ومفهوم النهاية عند الصفر.

- **تمارين ومسائل :**

1. صحيح أو خاطئ

الجمل الصحيحة هي: 1؛ 3؛ 4؛ 8؛ 9.

.6

1) f معرفة عند كلّ من الأعداد 0 ؛ 1؛ -2.

إذن $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{3}$ ؛ $\lim_{x\to 1} f(x)=-\frac{5}{3}$

$\lim_{x\to -2} f(x)=\frac{13}{3}$.

2) h عدد حقيقي غير منعدم.

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-2$$

.10

تزايد الإنتاج خلال 5 سنوات (أي من بداية 2001 إلى نهاية 2005) هو $64\,300-41000$ أي $23\,300$.

إذن التزايد المتوسط السنوي للإنتاج هو $\frac{23\,300}{5}$ أي 4660 جهازا.

عدد الأجهزة التي ستُنتج في السنة 2008 هو $64\,300+3\times 4660$ أي $78\,280$ جهازا.

.13

4) $f(x)=3x^2-3$ ؛ $a=2$

و $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ و $f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{39}{8}$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=3(x+2) \text{ مع } x\neq 2$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}3(x+2)=12$$

إذن العدد المشتق للدالة f عند 2 هو العدد $f'(2)$ حيث $f'(2)=12$.

.26

1) معادلة المماس (T) هي $y=-2x$.

2) هذا المماس يشمل مبدأ المعلم لأنّ إحداثيي النقطة O تحقق معادلة (T).

.32

4) $f'(x)=3+\frac{1}{\sqrt{x}}$

5) $f'(x)=6x^2-6x$

6) $f'(x)=-10x+2$

.42

$f(x)=2x^2-7x+11$

1) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=4x-7$.

2) اتجاه تغيّر الدالة f يتعلق بإشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

إذن f متزايدة على المجال $\left[\frac{7}{4};+\infty\right[$

ومتناقصة على المجال $\left]-\infty;\frac{7}{4}\right]$.

3) يُعطى جدول تغيرات f مع اعتبار $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

المماس عند النقطة ذات الإحداثيين

.52

$g(x)=x^3+3x$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و $g'(x)=3x^2+3$.

من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $g'(x)>0$.

إذن الدالة g لا تقبل قيمة حدية على $\mathbb{R}$.

.56

1) جدول تغيّرات f يكون كالآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) التقريب التآلفي المماسي للدالة f هو الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x)=8x-6$

3) $f(1{,}099) ;\ 2{,}79$

.57

$f(x)=2x^2+3x-1$

1) حلّ المعادلة $f'(x)=1$

لدينا $f'(x)=1$ يعني $4x+3=1$

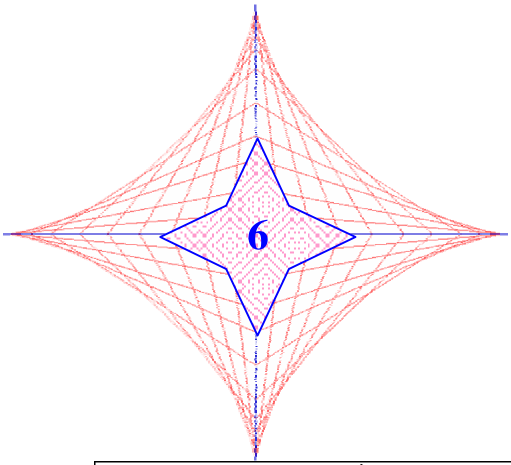
إذن $x=-\dfrac{1}{2}$ ؛ $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$

المماس عند النقطة ذات الإحداثيين $\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$ معامل توجيه يساوي 1 .

2) حلّ المعادلة $f'(x)=3$

$(0;-1)$ يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x+5$.

السلوك التقاربي



الباب 6:
السلوك التقاربي Œ

1. نهايات دوال مألوفة
2. العمليات على النهايات
3. المستقيمات المتقاربة

- **الكفاءات المستهدفة :**

شعبة تسيير واقتصاد	شعبة آدب
- تفسير وجود مستقيم مقارب يوازي أحد حاملي المحورين واستعماله في التمثيل البياني. - تفسير وجود مستقيم مقارب مائل واستعماله في التمثيل البياني..	

- **جدول تمفصل الأجزاء :**

أنشطة تمهيدية	معارف		طرائق
1 2 3 4	1. نهايات دوال مألوفة	• نهايات الدالة"مربع" • نهايات الدالة "مكعب" • نهايات الدالة"الجذر التربيعي" • نهايات الدالة "مقلوب"	
	2. العمليات على النهايات	• نهاية مجموع دالتين. • نهاية جداء دالتين. • نهاية مقلوب دالتين. • نهاية الدالة كثير الحدود عند $-\infty$ أو $+\infty$.	1 2 3

	3. المستقيمات المقاربة	• نهاية الدالة التناظرية عند $-\infty$ أو $+\infty$. • المستقيم المقارب لمحور التراتيب. • المستقيم المقارب لمحور الفواصل. • المستقيم المقارب المائل التراتيب.	4 5

• **توجيهات لتنفيذ الأنشطة :**

استبيان متعدد الإجابات :

يهدف هذا الاستبيان إلى تقويم مكتسبات التلاميذ حول مفاهيم تغيرات دالة والنهايات عند العدد 0 وكذا الأوضاع النسبية لمستقيم ومحوري الإحداثيات أو مبدأ المعلم. فالأسئلة المطروحة تسمح للتلميذ باسترجاع بعض المعارف المكتسبة والتي تعتبر مكتسبات قبلية لهذا الباب.

الأنشطة التمهيدية :

نشاط 1: دراسة بعض الدوال بجوار $+\infty$.

يهدف هذا النشاط إلى مقاربة مفهوم نهاية دالة عند $+\infty$ وذلك من خلال دراسة قيم دالة عن طريق القراءة البيانية لتراتيب نقط المنحنى الممثل لها في جوار $+\infty$، وهو ما يجعل التلميذ يصيغ بنفسه بعض التعابير المتعلقة بالنهايات.

نشاط 2: النهاية غير المنتهية بجوار $+\infty$.

يهدف هذا النشاط إلى دراسة نهاية كل من الداتين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ عند $+\infty$. بالقراءة البيانية لتراتيب النقط عندما تكون الفاصلة كبيرة بقدر الإمكان، يتوصل التلميذ إلى التعبير عن بعض النصوص المتعلقة بنهاية كل من الدالتين المذكورتين.

نشاط 3:

أ) النهاية غير المنتهية بجوار $+\infty$.

ب) النهاية غير المنتهية بجوار العدد 0 عن اليمين.

يهدف هذا النشاط إلى مقاربة نهاية دالة "مقلوب" عند $+\infty$ و بجوار العدد 0. فمن خلال القراءة البيانية لتراتيب نقط المنحنى الممثل لدالة "مقلوب" وباستعمال المتباينات، يتوصل التلميذ إلى تحديد نهاية الدالة "مقلوب" عند $+\infty$ وبجوار العدد 0 عن اليمين.

- **تمارين ومسائل :**

1. صحيح أو خاطئ

1) صحيح
2) خاطئ
3) خاطئ
4) صحيح
5) صحيح
6) خاطئ
7) صحيح
8) خاطئ
9) خاطئ
10) خاطئ

2. يطبق التلميذ نهايات الدوال المألوفة والعمليات على النهايات لحساب نهايات الدوال المقترحة.

10. $\lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x).g(x)=+\infty$.

11. $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

12. $\lim_{x\to-\infty} f(x)+g(x)=-\infty$.

17. $\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x)=-\infty$

$\lim_{\substack{x\to3 \\ >}} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to3 \\ >}} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

22. $y=3$ ، $y=6$ هما معادلتا المستقيمين المقاربين الموازيين لمحور الفواصل.

$x=0$ هي معادلة المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

26.

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x)=+\infty$

2) $a=1$ ، $b=0$ ، $c=-2$.

3) $x=-1$ هي معادلة المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب.

$y=x$ هي معادلة المستقيم المقارب المائل.

4) الوضع النسبي للمنحنى والمستقيم المقارب المائل يتعلق بإشارة $f(x)-x$.

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$f(x)-x$	+	-
النتائج	المنحنى فوق المستقيم المقارب المائل	المنحنى تحت المستقيم المقارب المائل

35.

1) $a=7$ و $b=60$ ، $f(x)=7+\dfrac{20}{x+7}$

2) أ) f متناقصة على المجال $[0;+\infty[$.
إذن عدد السكان يتناقص.

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=7$. إذن عندما يزداد عدد السنوات، فإن عدد السكان يؤول إلى 7 ملايين نسمة.

ج) حل المعادلة $f(x)=8$ هو 5.

أي في سنة 1985، يبلغ عدد السكان 8 ملايين نسمة. و بما أن الدالة f متناقصة على المجال $[0;+\infty[$، فإن عدد السكان في سنة 2020 يقل عن 8 ملايين نسمة.

	.36

1) $f(x)=x+2+\dfrac{10}{x}$

$a=1$ ، $b=2$ ، $c=10$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$

إذن سلوك f هو سلوك الدالة التآلفية

$g: x \mapsto x+2$.

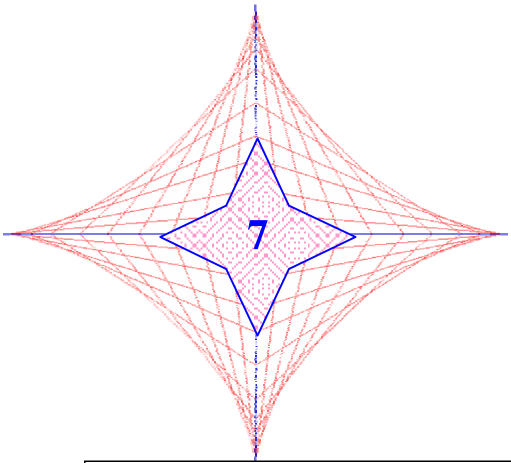
3) إذا كانت كلفة الإنتاج صغيرة (قريبة من الصفر)، فإن الكلفة المتوسطة تكون أكبر فاكبر.

4) الجدول التالي يلخص تغيرات f.

x	0		$\sqrt{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\left(\sqrt{10}+1\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) يمكن استعمال حاسبة بيانية لرسم المنحنى الممثل للدالة f ، مع اختيار نافذة مناسبة.

المتتاليات العددية



الباب 7: المتتاليات العددية

1. عموميات. Œ
2. المتتاليات الحسابية.
3. المتتاليات الهندسية.

- **الكفاءات المستهدفة :**

شعبة تسيير و اقتصاد	شعبة آداب
- تعريف متتالية عددية و استعمال الكتابات و التعابير المناسبة. - معرفة طرق توليد متتالية. - حساب الحدّ من المرتبة n لمتتالية. - تعريف متتالية حسابية أو هندسية و التعرّف عليها تبعا لطريقة توليدها ووصفها باستعمال التعبير المناسب. - حساب الحدّ من المرتبة n لمتتالية حسابية أو هندسية بمعرفة حدّها الأوّل و أساسها. - معرفة اتجاه تغيّر متتالية حسابية أو هندسية. - حساب مجموع n حدا متتابعة لمتتالية حسابية أو هندسية.	- التعرف على متتالية حسابية أو متتالية هندسية. - معرفة و استعمال خاصية ثلاثة حدود متتابعة في متتالية. - معرفة و استعمال الوسط الحسابي، الوسط الهندسي. - حساب مجموع n حدا الأولى لمتتالية. - تحديد اتجاه تغير متتالية حسابية أو هندسية. - دراسة وضعيات يؤول حلها إلى دراسة متتاليات حسابية أو إلى متتاليات هندسية.

- **جدول تمفصل الأجزاء :**

أنشطة تمهيدية	معارف		طرائق
1	1. عموميات	1. مفهوم متتالية 2. طرق توليد متتالية 3. التمثيل البياني لمتتالية 4. اتجاه تغيّر متتالية	1 2
2	2. المتتاليات الحسابية	1. تعريف 2. حساب الحدّ العام u_n 3. مجموع حدود متتابعة 4. التمثيل البياني 5. اتجاه التغيّر	3 4
3	3. المتتاليات الهندسية	1. تعريف 2. حساب الحدّ العام u_n 3. مجموع حدود متتابعة 4. اتجاه التغيّر	5 6
	4. نمذجة وضعيات باستعمال متتاليات.		

- **توجيهات لتنفيذ الأنشطة :**

استبيان متعدد الإجابات :

الهدف من الاستبيان قياس درجة تحكم التلميذ في بعض المفاهيم المرتبطة بالمتتاليات العددية. تخصّ الأسئلة المقترحة العمل على الأسس و الكتابات بأدلة وكذا إتمام انتظامات أعداد.

أنشطة تمهيدية :

نشاط1: تطوّر سكان »

إنّ الوضعية المقترحة مألوفة والهدف منها هو جعل التلميذ يدرك فائدة الأداة الرياضية المتمثلة في المتتاليات العددية لحلّ المشكلة المقترحة.

نشاط 2: المتتاليات الحسابية

الهدف من هذا النشاط معالجة وضعية مألوفة تتمثل في إيداع مبلغ من المال بفائدة بسيطة باستعمال المتتاليات الحسابية.

نشاط 3: المتتاليات الهندسية

تعدّ الوضعية المقترحة إحدى الوضعيات المعروفة قديما. الهدف من هذا النشاط هو جعل التلميذ ينمذج الوضعية ويحلّها باستعمال المتتاليات الهندسية. وهي فرصة يستعمل من خلالها المجدول للإجابة عن بعض الأسئلة المطروحة.

- **تمارين ومسائل :**

.1

أصحيح أم خاطئ

أ) خاطئ.　　ك) خاطئ.

ب) خاطئ.　　ل) خاطئ.

ج) صحيح　　و) صحيح.

د) خاطئ　　ي) صحيح.

هـ) خاطئ.

عموميات

.2

$u_{n+1}=2n^2+n+1$ ؛ $u_{n+3}=2n^2+9n+2$

؛ $u_{2n+1}=8n^2+2n+1$

$u_n-1=2n^2-3n+1$

.3

أ) 0، 2 ، 4 ، 6، 8، 10، 12 ...

ب) -2، $0{,}5$، 3، $5{,}5$، 8، $10{,}5$، 13...

ج) 1، 5، 25، 125، 625، 3125، 15625 ...

.7

$u_1=-0{,}5$ ؛ $u_2=-0{,}429$ ؛ $u_3=-0{,}416$ ؛ ...

.9

أ) الشكل 2 هو التمثيل البياني للمتتالية التي حدّها العام $u_n=3n-7$.

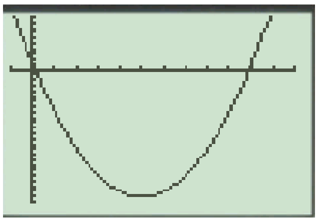
ب) الشكل 1 هو التمثيل البياني للمتتالية التي حدّها العام $u_n=2^n$.

.22

.15 (1

(u_n) معرفة بعلاقة من الشكل $u_n=f(n)$ حيث f هي الدالة $x\mapsto f(x)=x^2-10x+1$

2) باستعمال حاسبة، نحصل على التمثيل البياني الآتي للدالة f :



3) من دراسة تغيرات f نستنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

المتتاليات الحسابية

.18

أ) $u_1=-0{,}875$ ، $u_2=-0{,}75$ و $u_3=-0{,}625$.

ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{8}$

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية، أساسها $r=\frac{1}{8}=0{,}125$.

.19

أ) $u_1=11$ ، $u_2=8$ ، $u_3=5$ و $u_{25}=-61$.

ب) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n=14-3n$.

2) الأعداد a، b، c بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها r. نضع $a=b-r$ و $c=b+r$ ونعوّض في الجملة المفروضة.

نحصل على $\begin{cases} r=3 \\ b^2=64 \end{cases}$ ونستخلص...

.24

1) $r=7$.

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=1+7n$.

3) $n=86$.

4) $S=26\,274$.

.25

.1 من أجل كلّ n من $\mathbb{N}^*$، $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ (أي $a=1$ و $b=-1$)

.2

$$S=u_1+u_2+...+u_n$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

المتتاليات الهندسية

.29

أ) الأعداد $\frac{2}{7}$، $\frac{8}{21}$، $\frac{32}{63}$، $\frac{128}{189}$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية.

ب) الأعداد $\frac{5}{2}$، $\frac{10}{3}$، $\frac{20}{3}$ ليست حدودا متتابعة لمتتالية هندسية.

.32

أ) $u_1=24$، $u_2=12$، $u_3=6$.

ب) من أجل كلّ عدد طبيعي غير منعدم n،

$u_n=48\times(0,5)^n$

.34

$\alpha=24$

.37

نضع $u_n=\frac{3}{5^n}=3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول 3 وأساسها $q=\frac{1}{5}$.

بما أن $0<q<1$ فإنّ (u_n) متتالية متناقصة تماما.

.39

2) S_n هو مجموعحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأوّل 1 .

$$1+2+2^2+...+2^n=1\times\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=2^{n+1}-1$$

مسائل

.43

مدة الإيداع هي 16 شهرا.

.46

1. $u_n = 25000 \times (1,05)^n$

و $v_n = 25000 + 3300 \times n$

2. باستعمال مجدول، نجد:

من أجل $1 \leq n < 36$ فإنّ $v_n > u_n$.

من أجل $n \geq 36$ فإنّ $u_n > v_n$

بمعنى أنّ الإيداع بالكيفية الأولى يكون أفيد لمدة تقل عن 36 سنة والإيداع بالكيفية الثانية يكون أفيد لمدة تساوي أو تزيد عن 36 سنة.

.49

1. أ) $h_1 = 1,60\,m$ ، $h_2 = 1,28\,m$ ، $h_3 = 1,024\,m$.

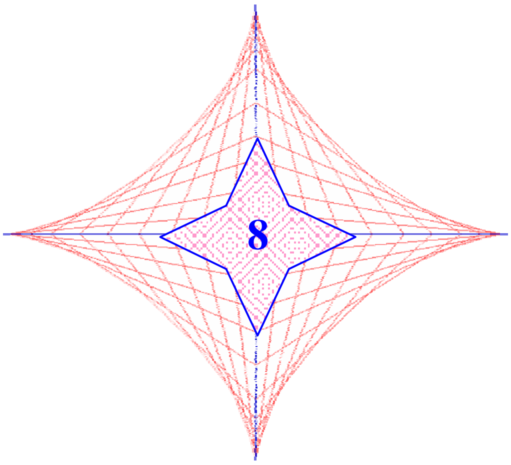
ب) $h_{n+1} = 0,8 \times h_n$.

(h_n) متتالية هندسية حدها الأول 2 وأساسها $0,8$.

ج) من أجل كلّ n ، $h_n = 2 \times (0,8)^n$.

2. $n = 8$.

الجمل الخطية



الباب 8: الجمل الخطية Œ

1. المعادلات الخطية لمجهولين.
2. جمل معادلتين خطيتين لمجهولين.
3. جمل ثلاث معادلات خطية لثلاثة مجاهيل.
4. المتراجحات الخطية .

- **الكفاءات المستهدفة :**

- حلّ جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل.
- ترجمة متراجحة خطية ذات مجهولين بتجزئة المستوي.
- حلّ جملة متراجحتين خطيتين ذات مجهولين بيانيا.

- **جدول تمفصل الأجزاء :**

أنشطة تمهيدية	معارف	طرائق
1	1. المعادلات الخطية لمجهولين	1
2	2. جمل معادلتين خطيتين لمجهولين	2
	3. جمل ثلاث معادلات خطية لثلاثة مجاهيل	
3	4. المتراجحات الخطية	3

- **توجيهات لتنفيذ الأجزاء :**

استبيان متعدد الإجابات :

يهدف هذا الاستبيان إلى التأكّد من مدى تحكم التلميذ في بعض المعارف المتعلقة بالموضوع والتي تعتبر أساسية لبناء معارف جديدة. وتتعلق هذه المعارف بالمستقيم (معرفة معادلته المبسطة، معامل توجيه، تمثيل، تعيين نقط التقاطع مع أحد المحورين، الأوضاع النسبية لمستقيمين، ...).

أنشطة تمهيدية :

نشاط1: جملة معادلتين خطيتين لمجهولين

يمثل هذا النشاط إحدى المشكلات القديمة التي طرحها ليونارد أولر في كتابه "عناصر الجبر"، المنشور سنة 1774.

تكون معالجة هذا النشاط بتطبيق منهجية حلّ متمثلة في الخطوات التالية:

- اختيار المجاهيل.
- ترييض المشكلة.
- حلّ المشكلة
- الإجابة على المشكلة.

نشاط 2: القطع المكافئ المار بثلاث نقاط

يمثل هذا النشاط إحدى التطبيقات الممكنة لحلّ جمل لثلاث معادلات خطية.

فلتعيين معادلة القطع المكافئ المار بثلاث نقط، نبدأ بإعطاء الشكل العام للمعادلة $y = ax^2 + bx + c$ وبتعويض بإحداثي كلّ نقطة من النقط المفروضة والتي تحقق المعادلة ، نحصل على معادلة خطية للمجاهيل a ، b ، c.

نشاط 3: تجزئة المستوي

يتكوّن هذا النشاط من جزأين: يتعلق الجزء الأوّل بتجزئة المستوي بمستقيم حيث يُطلب من التلميذ تعيين كلّ جزء بالتعبير عنه بمتراجحة أو معادلة ويتعلق الجزء الثاني بالتعبير عن جزء من المستوي بجملة متراجحات خطية.

- **تمارين ومسائل :**

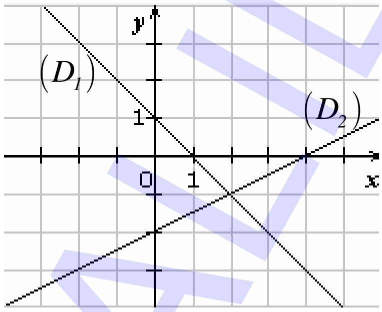
.1

أصحيح أم خاطئ

أ) خاطئ
ب) صحيح
ح) خاطئ
د) صحيح
ه) خاطئ

المعادلات الخطية لمجهولين

.3



.4

المستقيم (D_4).

.6

$A(1;1)$ ؛ $C(2;4)$.

جمل معادلتين خطيتين ذات مجهولين

.7

أ) $(1;2)$
ب) $(-1;2)$

.15

$(13;-11)$

.16

الجملة ليس لها حلّ.

جمل ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل.

.18

أ) $(0;1;3)$
ب) $(14;1,5)$

.22

$a=3$ ، $\alpha=\frac{7}{6}$ ، $\beta=-\frac{1}{12}$.

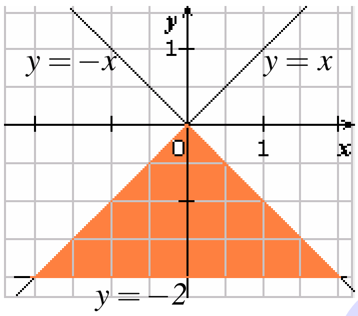
.25

$a=2$ ، $b=-1$ ، $c=-3$.

جمل متراجحات خطية

.33

أ)



مسائل

.35

223 و 75.

.36

75..

.39

نحصل على الجملة:

$$\begin{cases} x = 100 + \frac{1}{10}(y - 100) \\ x = 200 + \frac{1}{10}(y - 200 - x) \end{cases}$$

أي $\begin{cases} 11x - y = 1800 \\ 10x - y = 900 \end{cases}$

هناك 9 أبناء وكلّ منهم أخذ 900 دينار.

.40

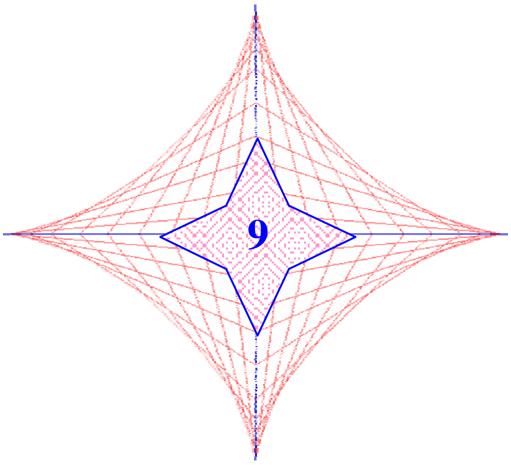
باستعمال الترميز المعطى، نجد:

$\begin{cases} 2x + y = 8\pi \\ x + y = 16 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = 8\pi - 16 \\ y = 32 - 8\pi \end{cases}$

.42

الرصيد المشترك هو $20\,453,57$ دينارا.

الإحتمالات



الباب 9: الاحتمالات

1. مفردات الاحتمالات
2. الاحتمالات

- **الكفاءات المستهدفة :**

شعبة تسيير واقتصاد	شعبة آداب
- تعريف قانون الاحتمال. - تعريف نموذج ملائم لتجربة عشوائية في حالات بسيطة. - تعيين احتمال حادثة انطلاقا من قانون احتمال. - حساب كلّ من احتمال الحادثة المضادة لحادثة واتحاد وتقاطع حادثتين.	- تعيين مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية. - حادثة بسيطة، حادثة مركبة. - العمليات على الأحداث (الحادثة ، التقاطع، المتممة). - معرفة قانون الاحتمال على مجموعة منتهية. - معرفة حساب احتمال حادثة (حالة تساوي الاحتمالات). - حساب احتمال الحادثة العكسية واتحاد حادثتين وتقاطع حادثتين.

- **جدول تمفصل الأجزاء :**

أنشطة تمهيدية	معارف		طرائق
1	1. مفردات الاحتمالات	• الحادثة • الحوادث الخاصة • تقاطع حادثتين • الحادثتان المنفصلتان (غير	1

		متلائمتين) • اتحاد حادثتين • الحادثة المعاكسة.	
3 2	2. الاحتمالات	• قانون الاحتمال • قانون متساوي الاحتمال • الاحتمال و الحوادث	2 3 4

- **توجيهات لتنفيذ الأنشطة :**

استبيان متعدد الإجابات :

يهدف هذا الاستبيان إلى تحديد مكتسبات التلاميذ حول مفهوم التواتر الذي هو الركيزة الأساسية في المقاربة التواترية للاحتمالات.

أنشطة تمهيدية :

نشاط 1: الحوادث

يهدف هذا النشاط إلى جعل التلميذ يتمكن من تعيين مجموعة إمكانيات (نتائج) حادثة وكذا تعيين مجموعة إمكانيات لتقاطع و اتحاد حادثتين.

نشاط 2: الاحتمال و الجدول الإحصائي

يرمي هذا النشاط إلى تمكين التلميذ من مقاربة مفهوم احتمال حادثة كنسبة عدد الإمكانيات المواتية لهذه الحادثة على عدد الإمكانيات الممكنة و يكون تعيين عدد الإمكانيات (المواتية والممكنة) بالاعتماد على جدول توزيع تواترات.

نشاط 3: قانون احتمال

يهدف هذا النشاط إلى تمكين التلميذ من مقاربة مفهوم "قانون احتمال" وهذا بانجاز تجربة عشوائية ثم حساب تواترات حوادث، أولا، في حالة عينة صغيرة ثم في حالة عينة كبيرة باستعمال محاكاة. ويدرك التلميذ من خلال هذا النشاط أن التواتر التجريبي يؤول إلى التواتر النظري ومنه قانون الاحتمال المرفق إلى التجربة العشوائية.

- **تمارين ومسائل :**

1. صحيح أو خاطئ

أ) خاطئ و) صحيح
ب) صحيح ك) خاطئ
ح) صحيح ل) خاطئ
د) خاطئ ق) خاطئ
ه) صحيح ي) صحيح

الحوادث

3. $\{3;5\}$، $\{1;6\}$، $\{2;4\}$، $\{2;3\}$، $\{1;2\}$.
(توجد حوادث أخرى).

4. $\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

6. $A=\{1;3;5;7\}$، $B=\{3;4;5;6;7;8\}$.
أ) خطأ ، ب) صحيح، ح) خطأ.
د) خطأ ، ه) خطأ.

7.
- الحادثة العكسية للحادثة أ: $\{1;3;5\}$.
- الحادثة العكسية للحادثة أ: $\{1;2;3\}$

قانون الاحتمال

12. نحسب التواترات الموافقة لظهور الألوان الثلاث بعد أنجاز محاكاة ذات 5000 سحب، نحصل على الجدول التالي:

اللون x_i	أصفر	أخضر	أسود
التكرارت	1660	2499	841
التواترات	0,332	0,499	0,168

قانون الاحتمال الذي يمكن اختياره لارتكاب أقل خطأ ممكن هو القانون 3 لأن التوترات الناتجة من المحاكاة هي الأقرب من الاحتمالات المعطاة في هذا القانون.

17.
أ) $p(\{d\})=0{,}22$
ب) $p(\{a;c\})=0{,}63$
ج) $p(\overline{\{c\}})=0{,}6$.

الاحتمالات والجداول

31.

	إناث	ذكور	المجموع
ناجح	78	104	182
راسب	20	38	58
المجموع	98	142	240

1) أ) $p=\dfrac{104}{240}\approx 0{,}43$
ب) $p=\dfrac{98}{240}\approx 0{,}41$
ج) $p=\dfrac{58}{240}\approx 0{,}24$.
2) $p=\dfrac{104}{142}\approx 0{,}73$
3) $p=\dfrac{20}{58}\approx 0{,}34$.

34.
1) $p=\dfrac{450}{100}=0{,}45$.

1(13 أ) $p=\dfrac{5}{12}\approx 0,417$.

ب) $p=\dfrac{5}{16}\approx 0,313$.

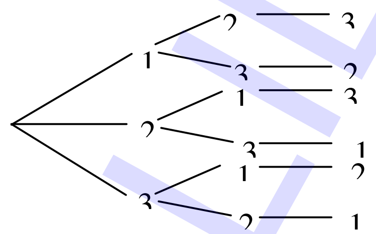
جـ) $p=\dfrac{13}{48}\approx 0,270$.

2) $p\approx 0,687$.

الاحتمالات والأشجار

.35

(1



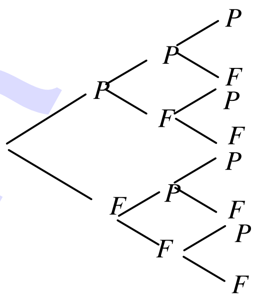
الأعداد: 123، 132، 213، 231، 312، 321.

2) أ) $p=\dfrac{2}{6}\approx 0,66$.

ب) $p=\dfrac{6}{6}=1$.

جـ) $p=\dfrac{2}{6}\approx 0,66$

.37



$p(A)=\dfrac{1}{8}=0,125$

. $p(B)=\dfrac{3}{8}=0,375$

2) $p=\dfrac{189}{1000}=0,189$.

3) $p=\dfrac{90}{450}=0,2$.

4) $p=\dfrac{90}{189}\approx 0,477$.

مسائل

.39

1) قانون الاحتمال:

x	0	1	2	3	4
p	0,8	0,02	0,04	0,06	0,08

2) $p(A)=0,98$.

$p(B)=0,12$.

.40

(1

أ) 13 384,60 دينارا.

ب) 12 285,70 دينارا.

جـ) 12 999,35 دينارا.

(2

$p(A)=\dfrac{260}{400}=0,65$

. $p(B)=\dfrac{40}{400}=0,1$

. $p(C)=\dfrac{20}{400}=0,05$