يجب أن تعمل في صمت، ولا يجب أن يكون الصمت عملا.

***: تمثل درجة الصعوبة**

التمرين رقم 01 *

لتكن (C) الدائرة المثلثية مرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. لتكن النقطتين A و B من الدائرة (C) حيث $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{12}$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{4}$.

عين قيسا للزوايا الموجهة :

1) $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA})$. 2) $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB})$. 3) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

طريقة: إذا كان عدد حقيقي α قيس لزاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$ فإنه يوجد عدد صحيح وحيد k حيث :

$-\pi<\alpha+2k\pi\leq\pi$ يكفي إيجاد k

إنطلاقا من هذا الحصر لإيجاد القيس الرئيسي لزاوية موجهة $(\vec{u},\vec{v})$

التمرين رقم 02 *

أوجد القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ التي قيسها α في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\alpha=2021rad$.

2) $\alpha=-\frac{189\pi}{4}$.

3) $\alpha=\frac{65\pi}{8}$.

4) $\alpha=\frac{2022\pi}{8}$

طريقة: إذا كان $\alpha'=\alpha+2k\pi$ نقول أن α و α' قيسان لنفس الزاوية أو قيسان لزاويتن متقايستين

التمرين رقم 03*

في كل حالة هل العددان A و B قيسان لزاوية موجهة لشعاعين ؟

$B=\frac{3\pi}{2}, A=-\frac{\pi}{2}$

$B=\frac{30\pi}{4}, A=\frac{3\pi}{4}$

$B=\frac{\pi}{6}, A=\frac{5\pi}{4}$

التمرين رقم 04 *

بدون استعمال الآلة الحاسبة عين القيم المضبوطة لكل من:

1) $\cos\frac{5\pi}{4}$. 2) $\sin\frac{201\pi}{4}$.

2) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$. 4) $\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$.

مبرهنة 1: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos x\\ \sin(\pi+x)=-\sin x\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos x\\ \sin(\pi-x)=\sin x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(-x)=\cos x\\ \sin(-x)=-\sin x\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$$

معادلات مثلثية.

$\cos a=\cos b$ معناه $a=b+2k\pi$ أو $a=-b+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

$\sin a=\sin b$ معناه $a=b+2k\pi$ أو $a=\pi-b+2k\pi$

المعادلات من الشكل $\cos x=a$ او $\sin x=a$

إذا كان $a<-1$ أو $a>1$ المعادلة لا تقبل حلولا.

التمرين رقم 05 **

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

1) $\sqrt{2}\cos x=-3$. 2) $\sqrt{2}\cos x-1=0$

3) $\sin x=-\frac{1}{2}$. 4) $\sin(x)=4$

5) $\cos^2(x)-2\cos(x)=-1$

لم أكن خائفا يوما من الفشل، ففي كل مرة يخرج شيء جيد من الفشل.

إذا لم نجد طريق النجاح فعلينا أن نبتكره

مبرهنة: في معلم مباشر متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ لتكن (C) الدائرة المثلثية. إذا كانت النقطة M غير منطبقة على O و كانت إحداثياها الديكارتية $(x;y)$ و إحداثياها القطبية (r,θ) فإن: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ؛ $x=r\cos\theta$ ؛ $y=r\sin\theta$

التمرين رقم 06 **

احسب الإحداثيات القطبية للنقط التالية المعرفة بإحداثياتها الديكارتية:

1) $A(-1;1)$ 2) $B(0;-3)$

3) $C\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) $D\left(3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$

5) $E\left(-\frac{3}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 6) $E\left(-1;\sqrt{3}\right)$

التمرين رقم 07 *

احسب الإحداثيات الديكارتية للنقط التالية المعرفة بإحداثياتها القطبية:

1) $A(1;0)$ 2) $B\left(2;\frac{\pi}{2}\right)$

3) $C\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$ 4) $D\left(5;-\frac{3\pi}{4}\right)$

5) $E\left(2\sqrt{2};\frac{5\pi}{4}\right)$ 6) $E\left(4;-\frac{7\pi}{6}\right)$

7) $G\left(\frac{7}{4};345\pi\right)$ 8) $H\left(\frac{1}{4};20\pi\right)$

نتائج: من أجل كل شعاعين غير معدومين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لدينا:

$\left(\vec{v},\vec{u}\right)=-\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ ،

$\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi$

$\left(-\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi$

$\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

التمرين رقم 08 **

بسط العبارة A في كل حالة مما يلي:

$$A=\sin x+\cos(\pi-x)+\cos(\pi+x)$$

$$A=\sin(\pi-x)+\cos(\pi-x)+\cos(\pi+2x)$$

$$A=\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(\pi-x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A=\tan(\pi-x)+\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)+\text{co}\tan(3x)$$

النجاح في المنزل أولا

دساتير التحويل المثلثية:

$$\cos(a+b)=\cos a\times\cos b-\sin a\times\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\times\cos b+\sin a\times\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\times\cos b+\cos a\times\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\times\cos b-\cos a\times\sin b$$

التمرين رقم 09 **

عبر بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ عن ما يلي:

1) $\sqrt{2}\cos\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)$, 2) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, 3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

4) $\sqrt{3}\cos\left(\frac{2x+5\pi}{10}\right)$, 5) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$, 6) $\cos\left(x+\frac{2\pi}{6}\right)$

التمرين رقم 10 ***

1-1) تحقق من أن: $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$.

2-1) احسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

2) احسب $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$ بطريقتين مختلفتين

1-3) تحقق من أن: $\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$

2-3) احسب $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$

1-4) تحقق من أن $\frac{7\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}$

2-4) تحقق من أن $\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}$

3-4) أثبت أن:

$$16\times\sin\frac{\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\sin\frac{7\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24}=1$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)+-3\sin\left(x-3\pi\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$$

الأستاذ: مزروح يوسف.........رقم الهاتف:0771-546-871.................... البريد الإلكتروني:mezrouh.youcef7@gmail.com

التمرين رقم 11 **

علما أن $\sin x = \frac{2}{3}$ و $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$

احسب $\cos x$ ، $\cos(\pi - x)$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ، $\sin(17\pi + x)$.

التمرين رقم 12 **

حل في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلة:

$$\cos 2x + 2\sin x \cos x = 0$$

حل في المجال $[0;\pi[$ المعادلة:

$$\cos 7x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

التمرين رقم 13 ****

1) احسب قيمة المجموع S_1 حيث

$$S_1 = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$$

2) احسب قيمة المجموع S_2 حيث

$$S_2 = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$

3) x عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث

$$\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

ا) احسب $\cos 2x$.

ب) استنتج قيمة x .

التمرين رقم 14 ****

عبر بدلالة $\sin x$ و $\cos x$ عن العبارات التالية:

1) $A = \cos^4 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x \sin^2 x$

2) $B = \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x$

3) $C = \cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \cos x \sin^2 x + \sin^3 x$

التمرين رقم 15 ****

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\cos x + \sin x = 1$.

2) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

3) $\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x = -1$

4) $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = m$ (ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m)

التمرين رقم 16 ***

حل في المجموعة $[0,2\pi[$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x ثم مثل الحلول على الدائرة المثلثية . في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $\sin x < -\frac{1}{2}$.

2) $\sqrt{2}\sin 4x - 1 \le 0$.

3) $2\sin 5x + \sqrt{3} \ge 0$.

4) $\sqrt{2}\sin 4x \le 1$

5) $2\cos x < 1$.

6) $\sqrt{2}\cos 3x + 2 \le 0$

7) $2\cos 2x - \sqrt{3} \ge 0$.

8) $\cos 4x - \frac{1}{2} > 0$.

التمرين رقم 17 ****

لتكن العبارة $E(x)$ حيث :

$$E(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$$

1) حلل العبارة $E(x)$ إلى جداء .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $E(x) = 0$.

3) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$$

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- بسط عبارة $f(x)$.

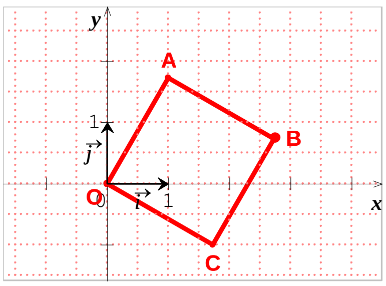
مسائل

المسألة رقم 01****

$(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد ومتجانس ومباشر

A النقطة ذات الإحداثيتين القطبيتين $\left(2\ ;\ \frac{\pi}{3}\right)$.

$OABC$ مربع حيث $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right) = -\frac{\pi}{2}$.



الهدف من التمرين حساب $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}$.

إذا ذهبت بحثا عن العسل فيجب أن تتوقع لدغ النحل

لا أحد يحتكر النجاح لنفسه، النجاح ملك لمن يدفع الثمن

1) باستعمال العلاقة : $\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ ، أحسب قيسا للزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)$.

2) أحسب الإحداثيتين القطبيتين ثم الإحداثيتين الديكارتيتين للنقطة C .

3) أحسب الإحداثيتين الديكارتيتين للنقطة A .

4) باستعمال العلاقة $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$. استنتج x_B و y_B الإحداثيتين الديكارتيتين للنقطة B .

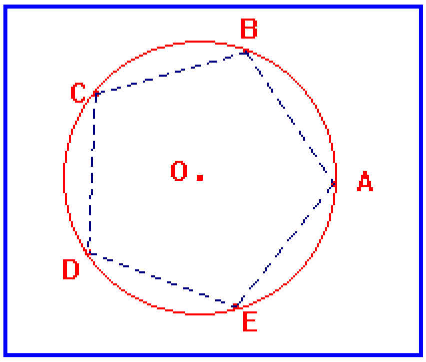
5) أحسب OB وقيس الزاوية الموجهة $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)$ استنتج الإحداثيتين القطبيتين للنقطة B .

6) استنتج القيمتين $\cos\frac{\pi}{12}$ ، $\sin\frac{\pi}{12}$.

المسألة رقم 02*****

(C) دائرة مثلثية منسوبة إلى معلم للمستوي متعامد ومتجانس و $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$

$ABCDE$ خماسي منتظم .



1) عين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\right)$ ، $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right)$.

2) بين أن النقط M من (C) التي تحقق:

$5\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=k.2\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$ هي رؤوس الخماسي $ABCDE$.

3) برهن أن المستقيم $(0A)$ محور تناظر الخماسي $ABCDE$ و أن مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B ، C ، D و E موجود على $(0A)$.

4) أثبت أن المستقيم $(0B)$ هو أيضا محور تناظر الخماسي $ABCDE$.

– ما هو موقع مركز ثقل الخماسي $ABCDE$ ؟

5) استنتج مما سبق أن:

$$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$$

6) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $4X^2+2X-1=0$

- تحقق من أن $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ هو حل لهذه المعادلة.
- استنتج قيمة العدد $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

نجاحك وسعادتك تكمن فيك.

إن النجاح لا يحتاج إلى أقدام بل إلى إقدام.