



المدة : 3 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

① لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = 8$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4}$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ثم استنتج تقاربها.

② لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 1 + \frac{a}{u_n}$

(أ) عين قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{3}$ ، يطلب تعيين حدها الاول.

(ب) نضع $a=1$ أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم بين أنه أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}$

(ج) أحسب بدلالة n المجموع : $s_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$ و المجموع $s'_n : s'_n = v_0 + 3v_1 + \dots + 3^n v_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ -1 ، 1 و 2 و خمسة كرات سوداء مرقمة بـ -1 ، 0 ، 1 ، 2 و 2 و كرتان خضراء مرقمتان بـ -1 ، 0 . نسحب عشوائيا ثلاث كرات في ان واحد من الكيس .

① أحسب احتمال الحوادث التالية :

" A الكرات المسحوبة مختلفة الالوان "

" B الكرات المسحوبة لها نفس الرقم "

" C مجموع ارقام الكرات المسحوبة معدوم "

② علما أن الكرات المسحوبة مختلفة الالوان ما احتمال أن تكون لها نفس الرقم ؟

③ هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ برر جوابك

④ ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بأكبر رقم تحمله الكريات المسحوبة .

(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب احتمال الحادثة : $X^2 + 2X \leq 0$

التمرين الثالث: ﴿ 04 نقاط ﴾

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول Z : $(\bar{z}-2-2i)(z^2-2z+2)=0$.
- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A, B, C و I والتي لواحقها على الترتيب $Z_A=1+i$ ، $Z_B=\bar{Z}_A$ ، $Z_C=2Z_B$ ، $Z_I=3$.
- أكتب على الشكل المثلثي العدد Z_A ثم استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين Z_B ، Z_C .
 - أحسب $|z_C - z_I|$ ، $|z_B - z_I|$ ، $|z_A - z_I|$ ماذا تستنتج؟
 - عن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا.
 - أكتب العدد $\frac{Z_C-3}{Z_A-3}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث IAC .
 - عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z في كل حالة:
- (أ) $|iz - 2 - 2i| = |z - 1 - i|$ (ب) $Z = 3 + ke^{\frac{\pi i}{3}}$ مع k يسمح \mathbb{R}_+^*

التمرين الرابع: ﴿ 07 نقاط ﴾

- (I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2(1 - 2\ln x)$.
- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - بين أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.89 \leq \alpha \leq 1.90$. ثم استنتج إشارة $g(x) + 1$.
- (II) الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.
- وليكن \mathcal{C}_f تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.
 - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(1+x^2)^2}$.
 - أستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ثم أعط حصر $f(\alpha)$.
 - بين أن المنحنى \mathcal{C}_f يقبل مماسا T عند نقطة ذات الترتيبة 0 ، ثم أكتب معادلة المماس T .
 - أحسب f أنشئ كلا من T والمنحنى \mathcal{C}_f .
 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}x + m$.
 - لتكن h دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1+(x+1)^2} + 2$ ، \mathcal{C}_h تمثيلها البياني.
- بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى \mathcal{C}_f إلى المنحنى \mathcal{C}_h ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{-5}{2u_n - 7}$

① (أ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 2$

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

② (أ) أثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{4}{5}(u_n - 1)$

(ب) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

③ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \frac{2u_n - 2}{2u_n - 5}$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

(ب) أكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n .

④ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{2u_0 - 5} + \frac{1}{2u_1 - 5} + \dots + \frac{1}{2u_n - 5}$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3، وأربع كريات سوداء مرقمة من 4 إلى 7 و ثلاث كريات مرقمة من 8 إلى 10 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب ثلاث كرات على التوالي دون إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

نعتبر الحوادث التالية: A "الكرات المسحوبة من الوان مختلفة"

B "الحصول على كرتين بيضاء على الاقل"

C "الكرات المسحوبة تحمل ارقاما فردية"

D "الكرات المسحوبة تحمل ارقاما تشكل حدودا متتابعة لمتتالية هندسية متزايدة تماما"

① بين أن $p(A) = \frac{19}{20}$ ثم أحسب $p(B)$ ، $p(C)$ ، و $p(D)$.

② بين أن : $p(C \cap D) = \frac{1}{720}$ ، ثم استنتج $p(C \cup D)$

③ علما أن الكرات المسحوبة تحمل أرقاما تشكل حدودا متتابعة لمتتالية هندسية متزايدة تماما ما احتمال أن تكون أرقامها فردية ؟

④ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

(أ) - عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) - أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم استنتج $E(1444X - 2023)$.



التمرين الثالث: ﴿ 04 نقاط ﴾

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح. عين الجواب الصحيح معلاً اختيارك :

① حل المعادلة (E) ذات المجهول Z حيث $z = \frac{6-z}{3-z}$ (E) هو :

أ $-2 - \sqrt{2}i$ ب $2 + \sqrt{2}i$ ج $1 - i$

② العدد المركب L حيث $L = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2022}$ هو عدد :

أ حقيقي موجب ب حقيقي سالب ج تخيلي صرف موجب

③ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى حيث $|iz - 1 - i| = 3$ المجموعة (Γ) هي :

أ دائرة نصف قطرها 3 ب دائرة نصف قطرها $\sqrt{3}$ ج دائرة نصف قطرها 3

ولاحقة مركزها $1 - i$ ولاحقة مركزها $1 + i$ ولاحقة مركزها $-1 + i$

④ الجذران التربيعيان للعدد المركب w حيث $w = -2 - 2i\sqrt{3}$ هما :

أ $1 + \sqrt{3}i$ و $1 - \sqrt{3}i$ ب $1 + \sqrt{3}i$ و $-1 - \sqrt{3}i$ ج $1 - \sqrt{3}i$ و $-1 + \sqrt{3}i$

التمرين الرابع: ﴿ 07 نقاط ﴾

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$ وليكن \mathcal{C}_f تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس O, \vec{i}, \vec{j} . $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$

① أ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

② بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

③ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب لـ \mathcal{C}_f عند $+\infty$ ، ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى

\mathcal{C}_f والمستقيم (Δ) .

④ عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

⑤ بين أن المنحنى \mathcal{C}_f يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

⑥ أحسب $f(0)$ و $f(3)$ ، ثم أنشئ كل من (Δ) ، (T) ، \mathcal{C}_f .

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

⑧ أ) بين أن الدالة G المعرفة بـ : $G(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x+1}$ على \mathbb{R}

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى \mathcal{C}_f والمستقيم (Δ) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني

﴿ مع تمنياتنا لكم بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا دورة جوان 2023 ﴾