نص التمرين:

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) تحقق من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ أن: $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty\,;1[$ و $]1\,;+\infty[$.

3) انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مقلوب، اشرح كيفية رسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسمه.

4) برهن أن النقطة $\Omega(1\,;2)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

5) أرسم -في نفس المعلم السابق- المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ الممثل للدالة g حيث: $g(x)=|f(x)|$.

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]\cup]1\,;+\infty[$ بـ : $h(x)=\sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$

أ- تحقق أن الدالة h مركبة من الدالة f ودالة مرجعية يطلب تعيينها.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة h على المجالين $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ و $]1\,;+\infty[$.

الحل المفصل:

1) التحقق من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ أن: $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$

الطريقة 1:

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$2+\frac{1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{2x-2+1}{x-1}=\frac{2x-1}{x-1}=f(x)$$

الطريقة 2:

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2x-2+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+1}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}$$

ومنه:

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty\,;1[$ و $]1\,;+\infty[$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$

لاحظ المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend right, "f=uov"'] & x-1 \arrow[r, "u"] & 2+\frac{1}{x} \end{tikzcd}$$

فنكتب: $f=uov=u[v(x)]$ حيث $u(x)=2+\frac{1}{x}$ و $v(x)=x-1$.

بما أن:

- الدالة v متزايدة تماما على المجالين $]-\infty\,;1[$ و $]1\,;+\infty[$.

لأن: v دالة تآلفية معاملها موجب من الشكل $x\longmapsto ax+b$ حيث $a>0$.

- والدالة u متناقصة تماما على المجالين $]-\infty\,;0[$ و $]0\,;+\infty[$.

لأن: u دالة مقلوب زائد عدد حقيقي من الشكل $x\longmapsto k+\frac{1}{x}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

مع: $u(]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[)\subset]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

فإن: الدالة $f=uov$ متناقصة تماما على المجالين $]-\infty\,;1[$ و $]1\,;+\infty[$.

مبرهنة:

v دالة رتيبة تماما على مجال I.

u دالة رتيبة تماما على مجال J حيث: $v[\mathrm{I}]\subset\mathrm{J}$.

- إذا كان للدالتين v و u نفس اتجاه التغير، تكون الدالة uov متزايدة تماما على I.

- إذا كان اتجاها تغير الدالتين v و u متعاكسين، تكون الدالة uov متناقصة تماما على I.

3) شرح كيفية رسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ انطلاقا من التمثيل البياني للدالة مقلوب:

لتكن F الدالة مقلوب المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $X \mapsto F(X) = Y = \frac{1}{X}$

و $(\mathcal{C}_F)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ومن أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $x \mapsto f(x) - 2 = y - 2 = \frac{1}{x-1}$

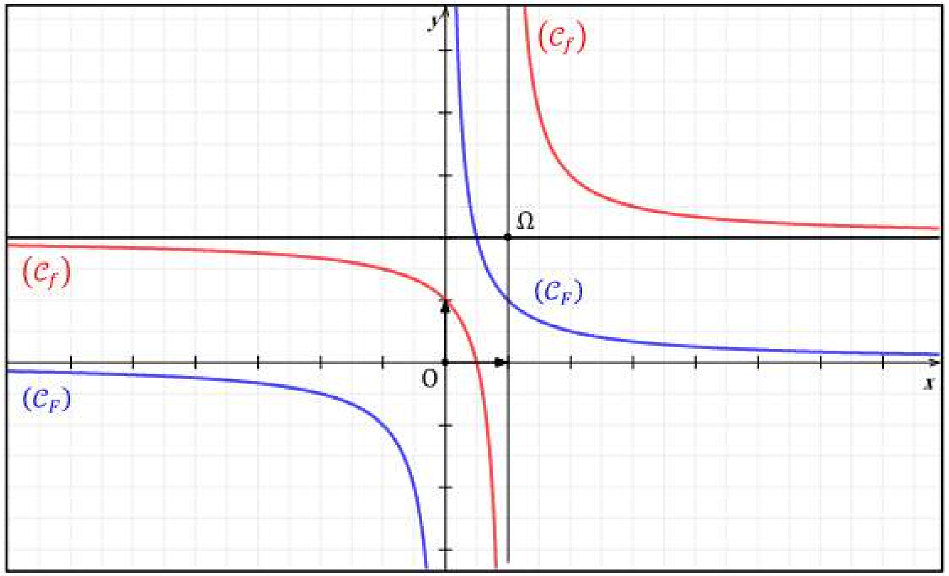
بوضع: $\begin{cases} X = x-1 \\ \text{و} \\ Y = y-2 \end{cases}$ حيث: $X \in \mathbb{R}^*$ أي: $\begin{cases} x = X+1 \\ \text{و} \\ y = Y+2 \end{cases}$ حيث: $x \in \mathbb{R}-\{1\}$

ينتج: $Y = \frac{1}{X}$ و $X \in \mathbb{R}^*$

<u>ومنه:</u>

المنحنى البياني $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f هو صورة المنحنى البياني $(\mathcal{C}_F)$ الممثل للدالة مقلوب $X \mapsto \frac{1}{X}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

رسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$:



4) نبرهن أن النقطة $\Omega(1\,;2)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:

<u>نعلم أن:</u>

الدالة مقلوب $X \mapsto F(X) = Y = \frac{1}{X}$ هي دالة فردية من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

<u>لأن:</u> من أجل X من $\mathbb{R}^*$ ومن أجل $(-X)$ من $\mathbb{R}^*$: $F(-X) = \frac{1}{-X} = -\frac{1}{X} = -F(X)$

<u>وبالتالي:</u>

مبدأ المعلم $O(0\,;0)$ مركز تناظر للمنحنى البياني $(\mathcal{C}_F)$ الممثل للدالة مقلوب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

<u>وبما أن:</u>

المنحنى البياني $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f هو صورة المنحنى البياني $(\mathcal{C}_F)$ الممثل للدالة مقلوب $X \mapsto \frac{1}{X}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V} = \vec{i} + 2\vec{j}$ (نتيجة السؤال **3**).

<u>فإن:</u>

النقطة $\mathbf{\Omega}(1\,;2)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

<u>ملاحظة:</u>

يمكن أن نتحقق أيضا من أجل x من $\mathbb{R}-\{1\}$ ومن أجل $(2-x)$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ من أن:

$$f(2-x) + f(x) = 4$$

$$f(2-x) + f(x) = 2 + \frac{1}{2-x-1} + 2 + \frac{1}{x-1} = 4 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 4$$

<u>ومنه:</u>

النقطة $\mathbf{\Omega}(1\,;2)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

تذكير:

$\omega(a\,;b)$ مركز تناظر لمنحنى دالة f إذا كان:

من أجل x من D_f و $(x-2a)$ من D_f:

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

5) رسم -في نفس المعلم السابق- المنحنى $(\mathcal{C}_{\mathrm{g}})$ الممثل للدالة $\mathrm{g}(x)=|f(x)|$:

نكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة حيث:

$$\mathrm{g}(x)=\begin{cases}-f(x)\;;\;f(x)\le 0\\+f(x)\;;\;f(x)\ge 0\end{cases}$$

نبحث عن إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

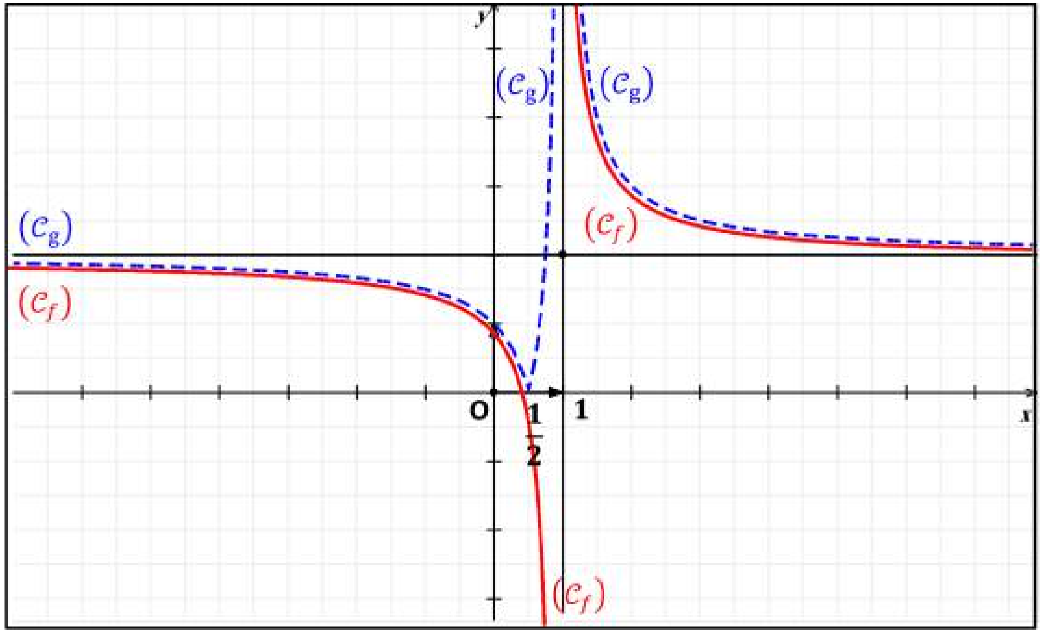
من جدول الإشارة أعلاه ينتج:

$$\mathrm{g}(x)=\begin{cases}-f(x)\quad;\quad x\in\left[\frac{1}{2}\,;1\right[\\+f(x)\quad;\quad x\in\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]\cup\left]1\,;+\infty\right[\end{cases}$$

ومنه:

- يكون المنحنى البياني $(\mathcal{C}_{\mathrm{g}})$ الممثل للدالة g منطبقا على المنحنى البياني $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f على المجال $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]\cup\left]1\,;+\infty\right[$ (لأن: $\mathrm{g}(x)=f(x)$).

- يكون المنحنى البياني $(\mathcal{C}_{\mathrm{g}})$ الممثل للدالة g نظيرا للمنحنى البياني $(\mathcal{C}_f)$ الممثل للدالة f بالنسبة إلى حامل محور الفواصل على المجال $\left[\frac{1}{2}\,;1\right[$ (لأن: $\mathrm{g}(x)=-f(x)$).



6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]\cup\left]1\,;+\infty\right[$ بـ: $h(x)=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x-1}}$

أ- نتحقق أن الدالة h مركبة من الدالة f ودالة مرجعية يطلب تعيينها:

لاحظ المخطط التالي:

$$x\xrightarrow{\;f\;}\frac{2x-1}{x-1}\xrightarrow{\;t\;}\sqrt{x}$$
$$h=t\circ f$$

ومنه:

الدالة h مركبة من الدالة f ودالة مرجعية t هي الدالة الجذر التربيعي $x\longmapsto\sqrt{x}$.

ب- نستنتج إتجاه تغير الدالة h على المجالين $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ و $]1 ; +\infty[$:

بما أن:

- الدالة f متناقصة تماما على المجالين $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ و $]1 ; +\infty[$.

أنظر نتيجة السؤال 2).

- والدالة الجذر التربيعي $t : x \longmapsto \sqrt{x}$ متزايدة تماما على المجال $[0 ; +\infty[$.

مع: $f\left(\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right] \cup]1 ; +\infty[\right) \subset [0 ; +\infty[$

فإن: الدالة $h = tof$ متناقصة تماما على المجالين $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ و $]1 ; +\infty[$.

أنظر المبرهنة في الصفحة رقم **1**.