الإشتقاقية و تطبيقاتها

سنة ثانية ثانوي

الشعب :

تقني رياضي

رياضيات

علوم تجريبية

تجدون في المجلة :

- ملخص شامل
- تمارين مقترحة
- حل مفصل للتمارين المقترحة

إعداد الأستاذة : نرجس مرواني

السنة الدراسية : 2021-2022

كلمة

هذا العمل المتواضع موجه لتلاميذ سنة ثانية ثانوي شعبة :

تقني رياضي

رياضيات

علوم تجريبية

أقدمه لكم كصدقة جارية بإذنه تعالى على روح زميلنا الأستاذ :

محمد بعداش

اللهم ارحمه و اغفر له و اجعل جنة الفردوس منزله

1 الملخص

I الإشتقاقية

I العدد المشتق

القول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند x_0 معناه : $\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell \\ \text{أو} \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \end{cases}$ حيث ℓ عدد حقيقي.

- ◁ يسمى ℓ العدد المشتق للدالة f عند العدد x_0 ونرمز له بـ : $f'(x_0)$
- ◁ تسمى النسبة : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ بنسبة التزايد بين العددين x_0 و x_0+h

⚠ ملاحظة هـــــامّة

f غير قابلة للإشتقاق عند x_0 معناه: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$

- ◁ f قابلة للإشتقاق على D_f معناه قابلة للإشتقاق عند كل نقطة من D_f
- ◁ مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ و نرمز لها بـ f' حيث:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

II التفسير الهندسي للعدد المشتق

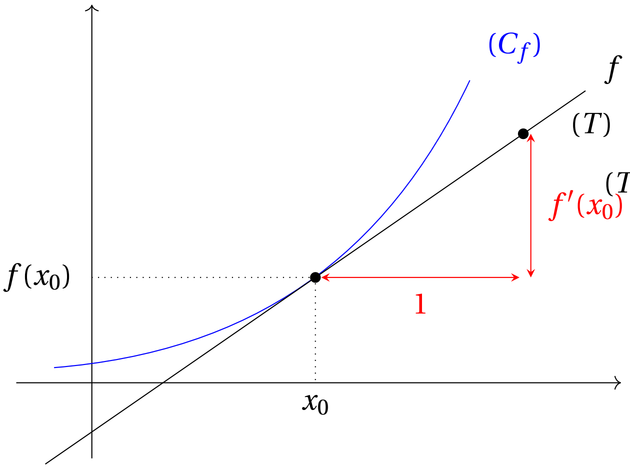
❶ مماس لمنحنى دالة:

f قابلة للاشتقاق عند x_0 معناه أن منحنى الدالة f يقبل مماس (T) عند x_0 حيث

* العدد المشتق $f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس (T) لمنحنى الدالة f عند x_0.

* معادلة المماس (T) عند x_0 هي

$$\boxed{(T) : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$$



❷ التقريب التآلفي:

أحسن تقريب تآلفي للدالة f عند الفاصلة x_0 هو معادلة المماس أي $\boxed{f(x) \simeq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$

كما توجد صيغة أخرى هي $\boxed{f(x_0+h) \simeq f'(x_0)h+f(x_0)}$

III مشتقات الدوال المألوفة

❶ مشتقة دالة تآلفية :

مبرهنة

كل دالة تآلفية معرفة بـ: $f:x\mapsto ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان، قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي : $\boxed{f':x\mapsto a}$

❷ مشتقة دوال القوى :

مبرهنة

كل دالة معرفة بـ: $f:x\mapsto ax^n$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و n عدد طبيعي غير معدوم ، قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f':x\mapsto nax^{n-1}}$

❸ مشتقة دالة مقلوب :

مبرهنة

الدالة : $f:x\mapsto\frac{1}{x}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f':x\mapsto-\frac{1}{x^2}}$

❹ مشتقة دالة جذر تربيعي :

مبرهنة

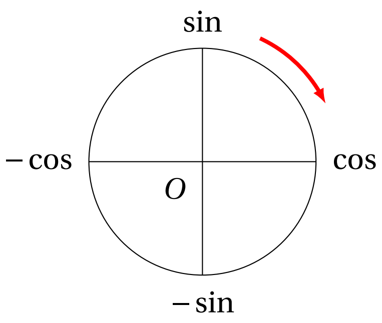
الدالة : $f:x\mapsto\sqrt{x}$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f':x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

❺ مشتقة الدالة sin و الدالة cos :

مبرهنة

◁ الدالة : $f:x\mapsto\sin(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f:x\mapsto\cos(x)}$

◁ الدالة : $f:x\mapsto\cos(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f:x\mapsto-\sin(x)}$



جدول ملخص

الدالة	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة
$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 0$
$x \longmapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto a$
$x \longmapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto 2x$
$x \longmapsto ax^n\,(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto nax^{n-1}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}\,(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}^*$	$x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto \cos x$
$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \longmapsto -\sin x$
$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$	$x \longmapsto -\frac{1}{\cos^2 x}$

IV العمليات على الدوال المشتقة

❶ مشتقة مجموع دالتين :

مبرهنة

f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$، الدالة $f+g$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\boxed{(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)}$

❷ مشتقة جداء دالتين:

مبرهنة

f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$، الدالة $f\times g$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي : $\boxed{(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)}$

❸ مشتقة جداء دالة بعدد:

مبرهنة

f دالة قابلة للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$، و λ عدد حقيقي، الدالة λf قابلة للإشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $\boxed{(\lambda\times f)'(x)=\lambda\times f'(x)}$

❹ مشتقة نسبة دالتين :

مبرهنة

f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال D من $\mathbb{R}$ و $g\neq 0$ الدالة $\frac{f}{g}$ قابلة للإشتقاق على D ودالتها المشتقة هي :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\times g(x)-g'(x)\times f(x)}{[g(x)]^2}}$$

❺ مشتقة مقلوب دالة :

مبرهنة

f دالة ق . إ على مجال D و لا تنعدم عليه، الدالة $\frac{1}{f}$ ق . إ على D و دالتها المشتقة : $\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}}$

❻ مشتقة الدالة $f\longmapsto u(ax+b)$:

مبرهنة

u دالة ق . إ على D وَ E مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $(ax+b)\in D$، الدالة $fx\rightarrow u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على D و دالتها المشتقة هي : $\boxed{f':x\rightarrow au'(ax+b)}$ حيث u' مشتقة الدالة u على E.

جدول ملخص

الدالة	مجالات قابلية الإشتقاق	الدالة المشتقة
$f+g$		$f'+g'$
$f.g$	يجب	$f'.g+f.g'$
$\lambda f\ (\lambda\in\mathbb{R})$		$\lambda f'$
$\dfrac{f}{g}$	أخذ شروط	$\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$
$\dfrac{1}{f}$		$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{1}{f^n}$	كل دالة	$-\dfrac{nf'}{f^{n+1}}$
$\sqrt{f}$		$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$
f^n	بعين	$n.f'.f^{n-1}$
$x\longmapsto f(ax+b)$		$x\longmapsto af'(ax+b)$
$x\longmapsto \sin(ax+b)$	الإعتبار	$x\longmapsto a\cos(ax+b)$
$x\longmapsto \cos(ax+b)$		$x\longmapsto -a\sin(ax+b)$

II تطبيقات الإشتقاقية

I إتجاه تغير دالة

مبرهنة

f دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال D و f' دالتها المشتقة:

◁ اذا كانت f' موجبة تماما على المجال D فان الدالة f متزايدة تماما على المجال D

◁ اذا كانت f' سالبة تماما على المجال D فان الدالة f متناقصة تماما على المجال D

◁ اذا كانت f' معدومة على المجال D فان الدالة f ثابتة على المجال D

II حصر دالة

f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال $[a,b]$.

◁ اذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a,b]$:

$$\boxed{f(a) \leq f(x) \leq f(b)}$$

◁ اذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ فإن من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a;b]$:

$$\boxed{f(b) \leq f(x) \leq f(a)}$$

III القيم الحدية المحلية لدالة

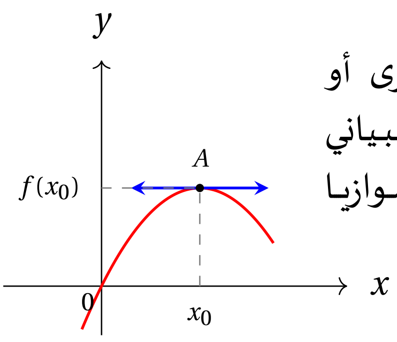
مبرهنة

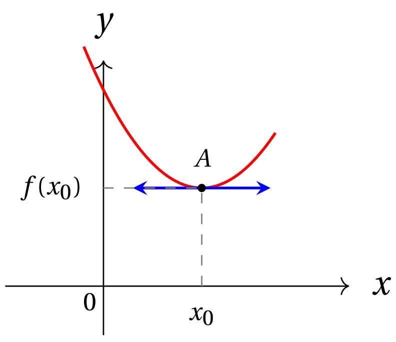
f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $[a;b]$ و x_0 عنصر من $[a;b]$، إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى f' عند x_0 و غيرت إشارتها فان $f(x_0)$ هي قيمة حدية محلية لـ f على المجال $[a;b]$.

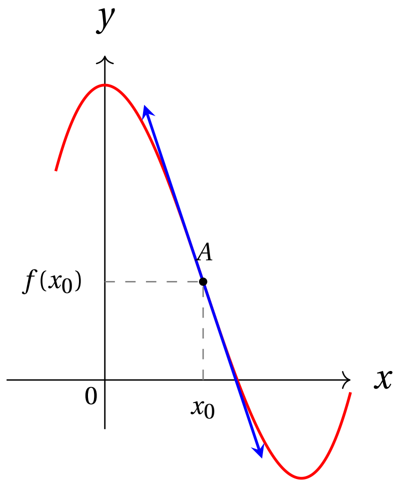
◁ إذا كانت $f'(x_0) = 0$ لا يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f لأنها قد تنعدم ولا تغير من إشارتها

IV التفسير البياني

إذا قبلت الدالة f قيمة حدية صغرى أو عظمى عند قيمة x_0 فإن التمثيل البياني يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل







V نقطة إنعطاف

النقطة $I(x_0; f(x_0))$ هي نقطة إنعطـاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة f إذا :

◁ كانت الدالة المشتقة الأولى f' تنعدم من أجل x_0 و لا تغير الإشارة عندها

التفسير البياني إذاكانت النقطة $I(x_0; f(x_0))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ فإن المماس يخترق منحنى الدالة عند النقطة I مغيرا وضعيته

III المقارنة بين دالتين

(C_f) التمثيل البياني للدالة f و (C_g) التمثيل البياني للدالة f، لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) نقوم بدراسة إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ حيث :

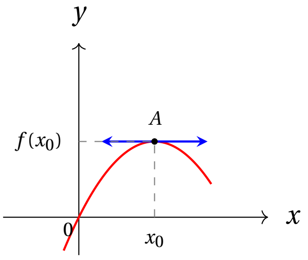
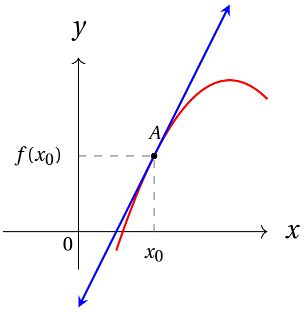
◁ إذا كان $f(x) - g(x) > 0$ على مجال I فإن (C_f) يقع فوق (C_g)

◁ إذا كان $f(x) - g(x) < 0$ على مجال I فإن (C_f) يقع تحت (C_g)

◁ إذا كان $f(x) - g(x) = 0$ على مجال I فإن (C_f) يقطع (C_g)

IV بعض الأسئلة الشائعة و كيفية الإجابة عليها

الصيغة (السؤال)	الإجابة
❶ أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0. (الصيغة العادية)	نكتب الدستور : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المعطاة.
❷ أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0	نحل المعادلة $f(x_0) = y_0$. وعند تعيين x_0 نكون قد عدنا إلى الحالة الأولى.
❸ بين أنه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) معامل توجيهه يساوي a.	نحل المعادلة $f'(x_0) = a$. وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا كذلك إلى الحالة الأولى.
❹ بين أنه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$.	نحل المعادلة $f'(x_0) = a$. وقد عدنا إلى الحالة الثالثة.
❺ بين أنه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$.	نحل المعادلة $af'(x_0) = -1$. وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا كذلك إلى الحالة الأولى.

العدد المشتق بيانيا هو معامل توجيه المماس عند x_0 حيث	
المماس موازي لحامل محور الفواصل معناه $f'(x_0)=0$	المماس مائل معناه $f'(x_0)=a$ حيث $a\neq 0$ علما أن $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
	

2 التمارين

1 **نص التمرين** **الحل** 16

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x^2+1$ و h عدد حقيقي غير معدوم

1) أحسب نسبة التزايد بين العددين -1 و $-1+h$.

2) إستنتج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند -1 و عين $f'(-1)$

3) أكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1

2 **نص التمرين** **الحل** 16

f دالة معرفة على المجال $[-3;+\infty[$ حيث $f(x)=\sqrt{3+x}$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي h غير معدوم فإن : $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

2) إستنتج ان f قابلة للإشتقاق عند 1 ثم فسر النتائج هندسيا.

3) أكتب معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f عند النقطة $A(1;2)$

4) عين التقريب التآلفي للدالة f بجوار القيمة 1 ثم أحسب القيم التقريبية لـ: $f(0,99)$ و $f(1,002)$

3 **نص التمرين** **الحل** 18

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي h غير معدوم فإن : $\dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

2) إستنتج ان f قابلة للإشتقاق عند 1.

3) عين التقريب التآلفي للعدد $f(1+h)$ ثم أحسب القيمة التقريبية للعدد : $\sqrt{4,0201}$

4 **نص التمرين** **الحل** 19

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالعبارة : $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) بيّن أنه من أجل كل x_0 من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{2}{(x_0+h+1)(x_0+1)}$$

ثم استنتج كلاً من $g'(0)$ ، $g'(3)$.

2) أكتب معادلتي المستقيمين (T_1) و (T_2) مماسي المنحنى (C_g) عند النقطتين $A(0;g(0))$ و $B(3;g(3))$ على الترتيب.

3) باستعمال التقريب التآلفي أحسب قيمة مقرّبة لـ: $g(0.001)$ ، $g(2.998)$.

5 نص التمرين الحل 20

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+2x-1$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) برهن باستعمال مفهوم العدد المشتق أن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عين دالتها المشتقة.

2) أكتب معادلة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(-2,-1)$.

3) بين أنه توجد نقطة M من المنحنى (C_f) يكون عندها معامل توجيه المماس هو 2 أكتب عندئذ معادلته .

4) بين أنه توجد نقطة N من المنحنى (C_f) يكون عندها المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=4x+1$.

6 نص التمرين الحل 21

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx-3$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) عين العددين a و b علما أن (C_f) يقبل مماس عند النقطة $A(2;-3)$ معامل توجيه هو 2

2) أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f

3) بين أن (C_f) يقبل مماس معامل توجيهه هو -2 عند نقطة يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلته

4) بين أن (C_f) يقبل مماس يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=-4x$ عند نقطة يطلب تعيين فاصلتها ثم أكتب معادلته

5) عين إحداثيات تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات

7 نص التمرين الحل 22

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+4$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f

2) أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها f.

3) ماذا تمثل كل النقطتين $A(0;4)$ و $B(2;0)$ بالنسبة للمنحنى (C_f)، فسر النتائج بيانيا.

8 نص التمرين الحل 23

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فان: $f'(x)=\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) هل تقبل الدالة f قيمة حدية محلية عند 0؟ علل .

9 نص التمرين الحل 24

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$ فان : $f(x)=x+4+\dfrac{4}{x-1}$.

2) بين أن الدالة المشتقة f' تعطى بالعبارة $f'(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$.

3) أدرس إتجاه تغير الدالة و شكل جدول تغيراتها. f.

4) استنتج انه توجد نقطتين من (C_f) يكون عندها المماس موازي لمحور الفواصل يطلب تعيينهما.

5) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+4$.

6) أثبت أن النقطة $\Omega(1;5)$ مركز تناظر (C_f).

10 نص التمرين الحل 27

لتكن الدالة f المعرفة وعلى المجال $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$، (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب الى المعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{2\}$: $f(x)=ax+b=\dfrac{c}{x-2}$

2) عين f' الدالة المشتقة للدالة f ثم استنتج إشارتها و شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أكتب معادلة للمماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى (C_f) عند النقطتين $A(1;-2)$ و $B(3;2)$.

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-2$.

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{x^2-4|x|+5}{|x|-2}$، (C_g) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب الى المعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) عين D_g

2) بين أن g زوجية

3) g يدون رمز القيمة المطلقة

4) إشرح كيفية رسم (C_g) إنطلاقا من (C_f) .

11 نص التمرين الحل 29

I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$: بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $f'(x)$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3) عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

4) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$

5) أثبت أنه من اجل كل $x\in D_f$ و $(-2-x)\in D_f$ فإن $f(-2-x)+f(x)=0$ ماذا تستنتج ؟.

6) عين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب ثم أنشئ يعناية (C_f) على المجال $[0;6]$

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\frac{x^2+2|x|+5}{|x|+1}$، (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين D_g

2) بين أن الدالة g زوجية.

3) إشرح كيفية رسم (C_g) إنطلاقا من (C_f)

4) أنشئ (C_g) في نفس المعلم السابق.

12 **نص التمرين** **الحل** 📄 **32**

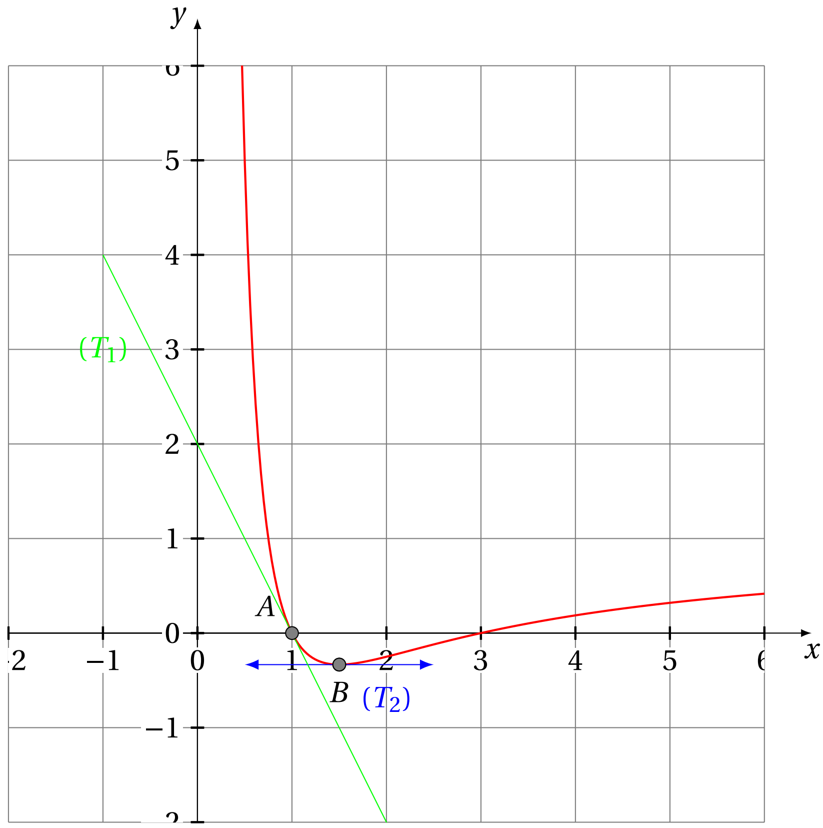
الدالة f معرفة و القابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2}$ حيث a , b و c أعداد حقيقية.

(C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب الى المعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

(T_1) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;0)$

(T_2) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة B ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$

كما هو مبين في الشكل :



I) بقراءة بيانية أجب على مايلي :

1) عين حلول المعادلة $f(x)=0$.

2) عين إشارة الدالة f.

3) عين إشارة الدالة المشتقة f'.

4) شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) عين : $f(1)$, $f(3)$, $f'(1)$, $f'\left(\frac{3}{2}\right)$.

6) باستعمال نتائج السؤال السابق (5) عين الاعداد الحقيقية a ، b و c

II) نفرض أن : $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}$.

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=1$.

III) لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=[f(x)]^2$

1) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ ثم استنتج إشارة $h'(x)$

2) شكل جدول تغيرات الدالة h

3 الحلول

☑ حل التمرين رقم 1 :

(1 **حساب نسبة التزايد بين العددين -1 و $-1+h$**

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{2(-1+h)^2+1-(2(-1)^2+1)}{h}$$
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{2(1+h^2+2h)+1-(3)}{h}$$
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{h^2-4h+3-(3)}{h}$$
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\frac{h(2h-4)}{h}$$
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=2h-4$$

(2 **إستنتاج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند -1**

بحساب النهاية نجد :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}2h-4=-4$$

و منه الدالة f تقبل الإشتقاق عند -1 حيث $f'(-1)=-4$

(3 **معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة -1**

$$y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$$

$$y=-4(x+1)+3$$

$$y=4x-1$$

☑ حل التمرين رقم 2 :

(1 **إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي h غير معدوم فإن : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$**

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{3+1+h}-\sqrt{4}}{h}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{4+h}^2-2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$

2) إستنتاج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 1

بحساب النهاية نجد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{4}$$

و منه الدالة f تقبل الإشتقاق عند 1 حيث : $f'(1)=\frac{1}{4}$

التفسير الهندسي : منحنى الدالة f يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا معامل توجيهه هو $\frac{1}{4}$

3) معادلة المماس (T) عند النقطة $A(1,2)$

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y=\frac{1}{4}(x-1)+2$$
$$y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$$

4) تعيين لتقريب التآلفي للدالة f بجوار القيمة 1

$$f(x_0+h)\simeq f'(x_0)h+f(x_0)$$
$$f(1+h)\simeq f'(1)h+f(1)$$
$$f(1+h)\simeq\frac{1}{4}h+2$$

القيمة التقريبية لـ $f(0,99)$:

لدينا $f(1+h)\simeq\frac{1}{4}h+2$ حيث نلاحظ أن $f(0.99)=f(1-0.01)$ ومنه :

$f(1-0,01)\simeq\frac{1}{4}(-0,01)+2\simeq 1,9975$ و منه $f(0,99)\simeq 1,9975$

كما يمكن التعويض في معادلة المماس و لدينا :

$$f(x) \simeq \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$
$$f(0,99) \simeq \frac{1}{4}(0.99) + \frac{7}{4}$$
$$f(0,99) \simeq 1,9975$$

القيمة التقريبية لـ : $f(1,002)$:

نلاحظ أن $f(1,002) = f(1+0,002)$ ومنه : $f(1+0,002) \simeq \frac{1}{4}(+0.002) + 2 \simeq 2,0005$ و منه $f(1,002) \simeq 2,0005$

كما يمكن التعويض في معادلة المماس و لدينا :

$$f(x) \simeq \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$$
$$f(1,002) \simeq \frac{1}{4}(1,002) + \frac{7}{4}$$
$$f(1,002) \simeq 2,0005$$

☑ حل التمرين رقم 3 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي h غير معدوم فإن : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+4}+2}$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{(1+h)^2+3}-\sqrt{4}}{h}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h^2+2h+4}-2}{h}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(\sqrt{h^2+2h+4}-2)(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^2+2h+4-4}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h+2}{(\sqrt{h^2+2h+4}+2)}$$

2) إستنتاج أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 1

بحساب النهاية نجد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h+2)}{(\sqrt{h^2+2h+4}+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

و منه الدالة f تقبل الإشتقاق عند 1 حيث $f'(1) = \frac{1}{2}$

3) تعيين التقريب التآلفي للعدد $f(1+h)$

$$f(x_0+h)\simeq f'(x_0)h+f(x_0)$$

$$f(1+h)\simeq f'(1)h+f(1)$$

$$f(1+h)\simeq \frac{1}{2}h+2$$

القيمة التقريبية لـ $\sqrt{4,0201}$:

نلاحظ أن $\sqrt{4,0201}=\sqrt{3+1,0201}=\sqrt{3+\sqrt{1,0201}^2}$ حيث $\sqrt{1,0201}=1,01$

و منه $\sqrt{4,0201}=\sqrt{3+(1,01)^2}=f(1,01)$

إذن

$$f(1,01)\simeq\frac{1}{2}h+2\simeq\frac{1}{2}(0,01)+2\simeq 2,005$$

و منه $\sqrt{4,0201}\simeq 2,005$

☑ حل التمرين رقم 4 :

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

1) إثبات أنه من أجل كل x_0 من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\dfrac{2}{(x_0+h+1)(x_0+1)}$:

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{\dfrac{2(x_0+h)}{x_0+h+1}-\dfrac{2x_0}{x_0+1}}{h}$$

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{\dfrac{2(x_0+h)(x_0+1)-2x_0(x_0+h+1)}{(x_0+h+1)(x_0+1)}}{h}$$

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{2(x_0+h)x_0+2(x_0+h)-2x_0(x_0+h)-2x_0}{h(x_0+h+1)(x_0+1)}$$

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{2x_0+2h-2x_0}{h(x_0+h+1)(x_0+h)}$$

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{2}{(x_0+h+1)(x_0+1)}$$

و عليه نستنتج أن من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن : $g'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{(x_0+h+1)(x_0+1)}$ أي : $g'(x_0)=\dfrac{2}{(x_0+1)^2}$

ومنه : $g'(0)=\dfrac{2}{(0+1)^2}$ أي : $g'(0)=2$ و $g'(3)=\dfrac{2}{(3+1)^2}$ أي : $g'(3)=\dfrac{1}{8}$

2) كتابة معادلتي المستقيمين (T_1) و (T_2) مماسا للمنحنى (C_g)

ا) عند النقطة $A(0;g(0))$:

$$(T_1): y=g'(0)(x-0)+g(0)$$

$$(T_1): y=2(x-0)+0$$

$$(T_1): y=2x$$

ب) عند النقطة $B(3;g(3))$:

$$(T_2): y = g'(3)(x-3)+g(3) = \frac{1}{8}(x-3)+g(3)$$
$$(T_2): y = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8} + \frac{6}{4}$$
$$(T_2): y = \frac{1}{8}x + \frac{9}{8}$$

3) حساب القيم التقريبية :

ا) $g(0.001) = g(0+0.001) \simeq g'(0)(0.001)+g(0) = 0.002$

ب) $g(2.998) = g(3-0.002) \simeq g'(3)(-0.002)+g(3) = 1.49975$

أو بتعويض مباشر في معادلتي المماس نجد

ا) $g(0.001) \simeq 2(0.001) = 0.002$.

ب) $g(2.998) \simeq \frac{1}{8}(2.998)+\frac{9}{8} = 1.49975$.

☑ حل التمرين رقم ◄ 5 :

1) إثبات أن الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

بما أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ فهي قابلة للإشتقاق عليها و لدينا :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2(x+h)+1-(x^2+2x+1)}{h}$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh+2x+2h+1-x^2-2x-1}{h}$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh+2h}{h}$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x+2)}{h}$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x+2$$

و منه f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x) = 2x+2$

2) كتابة معادلة المماس عند $A(-2,-1)$

$y = f'(-2)(x+2)+f(-2)$ حيث $f'(2) = 2(-2)+2 = -2$ و $f(-2) = (-2)^2+2(-2)-1 = -1$ و عليه

$$y = f'(-2)(x+2)+f(-2)$$
$$y = -2(x+2)-1$$
$$y = -2x-4-1$$
$$y = -2x-5$$

3) إثبات توجد نقطة M من المنحنى (C_f) يكون عندها معامل توجيه المماس هو 2

معامل توجيه المماس هو 2 معناه $f'(x)=2$ إذن نقوم بحل المعادلة $2x+2=2$ أي $2x=0$ و منه $x=0$

و عليه إحداثيات النقطة $M(0;f(0))$ حيث معادلة المماس هي

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=2x-1$$

4) إثبات توجد نقطة N من المنحنى (C_f) يكون عندها معامل توجيه المماس موازيا للمستقيم ذو المعادلة $y=4x+1$

مماس موازي للمستقيم ذو المعادلة $y=4x+1$ معناه للمماس و المستقيم نفس معامل التوجيه أي معامل توجيه المماس هو 4 معناه $f'(x)=4$ إذن نقوم بحل المعادلة $2x+2=4$ أي $2x=2$ و منه $x=1$

و عليه إحداثيات النقطة $N(1;f(1))$ حيث معادلة المماس هي

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y=4(x-1)+2$$
$$y=4x-2$$

☑ حل التمرين رقم 6 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx-3$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) تعيين العددين a و b

(C_f) يقبل مماس عند النقطة $A(2;-3)$ معامل توجيه هو 2 معناه $f(2)=-3$ و $f'(2)=2$

و لدينا $f(2)=4a+2b-3$ و منه نستنتج أن $4a+2b-3=-3$ أي $4a+2b=0\cdots(1)$

من جهة أخرى f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x)=2ax+b$ و لدينا $f'(2)=4a+b$ و منه نستنتج أن $4a+b=2\cdots(2)$

نقوم بحل الجملة $\begin{cases}4a+2b=0\cdots(1)\\ 4a+b=2\cdots(2)\end{cases}$ بالطرح طرف لطرف نجد $4a+2b-(4a+b)=0-2$

و منه $b=-2$ و بتعويض قيمة b في (1) نجد $4a=-2b$ أي $4a=4$ و منه $a=1$ و عليه $f(x)=x^2-2x-3$

2) حساب الدالة المشتقة f' للدالة f

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x)=2x-2$

3) إثبات أن (C_f) يقبل مماس معامل توجهه هو -2

معامل توجيه المماس هو -2 معناه $f'(x)=-2$ إذن نقوم بحل المعادلة $2x-2=-2$ أي $2x=0$ و منه $x=0$

و عليه (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه هو -2 عند النقطة ذات الفاصبة 0 معادلته هي

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = -2x - 3$$

إثبات أن (C_f) يقبل مماس يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = -4x$

مماس موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = -4x$ معناه للمماس و المستقيم نفس معامل التوجيه أي معامل توجيه المماس هو -4 معناه $f'(x) = -4$ إذن نقوم بحل المعادلة $2x - 2 = -4$ أي $2x = -2$ و منه $x = -1$

و عليه (C_f) يقبل مماسا معامل يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = -4x$ عند النقطة ذات الفاصبة -1 معادلته هي

$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(1)$$

$$y = -4(x+1) + 0$$

$$y = -4x - 4$$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات

مع حامل محور التراتيب نقوم بحساب $f(0)$ حيث $f(0) = -3$

ومنه $(C_f) \bigcap (yy') = \{(0;-3)\}$

مع حامل محور الفواصل نقوم بحل المعادلة $f(x) = 0$ أي $x^2 - 2x - 3 = 0$

حساب Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-2)^2 - 4(1)(-3)$$
$$\Delta = 16$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{2-4}{2}$$
$$x_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{2+4}{2}$$
$$x_2 = 3$$

$\Delta > 0$ إذا للمعادلة حلان مختلفان

ومنه $(C_f) \bigcap (xx') = \{(-1;0), (3;0)\}$

☑ حل التمرين رقم 7 :

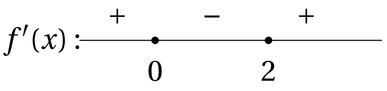
f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

(1 حساب f' الدالة المشتقة للدالة f

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x) = 3x^2 - 6x$

دراسة إشارة $f'(x)$

بوضع $f'(x) = 0$ أي $3x^2 - 6x = 0$ تكافئ $3x(x-2) = 0$ تكافئ $3x = 0$ أو $x - 2 = 0$ و منه $x = 0$ أو $x = 2$



إتجاه تغير الدالة

- ◁ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0]$
- ◁ الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;2]$
- ◁ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗	4	↘	0	↗	

2) عند النقطتين $A(0;4)$ و $B(2;0)$ منحنى الدالة f يقبل قيمتين حديتين محليتين هما 4 عند 0 و 0 عند 2

التفسير البياني

- ◁ منحنى الدالة (C_f) يقبل عند النقطة A مماسا موازيا لمحور الفواصل معادلته هي $y=4$
- ◁ منحنى الدالة (C_f) يقبل عند النقطة B مماسا موازيا لمحور الفواصل معادلته هي $y=0$

☑ حل التمرين رقم ◨ 8 :

1) **إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ فإن :** $f'(x) = \dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ و لدينا :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)-(1)(x^3)}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{3x^3-3x^2-x^3}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$$

2) دراسة إشارة $f'(x)$

المقام موجب تماما و منه إشارة المشتقة من إشارة البسط

حيث $x^2 \geq 0$ إذن إشارة البسط من إشارة ثنائي الحد $2x-3$

و لدينا $2x-3=0$ أي $x=\frac{3}{2}$

$f'(x):$	$-$	0	$-$	$\frac{3}{2}$	$+$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

إتجاه تغير الدالة

- ◁ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$
- ◁ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;\frac{3}{2}]$
- ◁ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\frac{3}{2};+\infty[$

3) جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	

4) الدالة f لاتقبل قيمة حدية محلية عند 0 لأن المشتقة لا تغير من إشارتها

☑ حل التمرين رقم ◂ 9 :

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-1}$

1) إثبات أنه من اجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ فان : $f(x)=x+4+\frac{4}{x-1}$

باستعمال القسمة الإقليدية نجد

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2\ \ +x & x+4 \\ \cline{1-1} 4x & \\ -4x+4 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

إذن من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$ فإن : $f(x) = x+4+\frac{4}{x-1}$

2) إثبات أن الدالة المشتقة f' تعطى بالعبارة $f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ و لدينا :

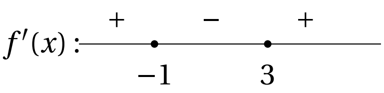
$$f'(x) = 1-\frac{4}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(x-1)^2-2^2}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

3) دراسة إتجاه تغير الدالة f

دراسة إشارة المشتقة

المقام موجب تماما و منه إشارة المشتقة من إشارة البسط

$(x-3)(x+1) = 0$ تكافئ $x-3=0$ أو $x+1=0$ أي $x=3$ أو
$x=-1$



x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

إتجاه تغير الدالة

- ◁ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$
- ◁ الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-1;1[$
- ◁ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;3]$
- ◁ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[3;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	‖	$\searrow$	9	$\nearrow$	

4) إثبات انه يوجد نقطتين من (C_f) يكون عندها المماس موازي لحامل محور الفواصل

يكون المماس موازي لحامل محور الفواصل إذا قبلت الدالة قيمة حدية محلية أي إذا انعدمت الدالة المشتقة عند قيمة ما و غيرت إشارتها مما سبق نجد أن (C_f) يقبل قيمتين حديتين محلتين هما 1 عند -1 و 9 عند 3 على الترتيب

تعيين معادلة للمماسين (T_1) و (T_2) :

معادلة المماس هي $(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$(T_1): y = f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$(T_2): y = f'(3)(x-3)+f(3)$

حيث $f'(-1)=0$ و $f(1)=1$ و عليه $(T_1): y=1$

حيث $f'(1)=0$ و $f(3)=9$ و عليه $(T_1): y=9$

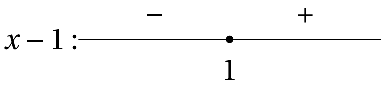
5) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم (Δ)

حساب الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y = x+4+\frac{4}{x-1}-(x+4) = \frac{4}{x-1}$$

دراسة إشارة الفرق $f(x)-y$:

البسط موجب تمام و عليه إشارة الفرق من إشارة المقام:



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		−	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

6) أثبت أن النقطة $\Omega(1;5)$ مركز تناظر (C_f)

باستخدام دساتير تغيير معلم نجد $\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+5 \end{cases}$ و عليه عبارة الدالة f في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

هي $Y+5 = X+1+4+\frac{4}{X+1-1} = X+5\frac{4}{X}$ ، أي $Y = X+\frac{4}{X}$ ، نسمي $F(X) = X+1\frac{4}{X}$

إثبات ان الدال $F(X)$ فردية :

$$F(X) = -X\frac{4}{-X} = -X-\frac{4}{X} = -(X+\frac{4}{X}) = -F(X)$$

و منه الدالة فردية و عليه النقطة $\Omega(1;5)$ مركز تناظر (C_f)

حل التمرين رقم 10 :

$$f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x-2} \qquad D_f=\mathbb{R}$$

(1 **تعيين الأعداد الحقيقية a، b و c :**

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+5 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x-2 \\ \cline{1-1} -2x+5 & \\ 2x-4 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

و منه $f(x)=x+2+\dfrac{1}{x-2}$ حيث $a=1$، $b=2$ و $c=1$

(2 **تعيين الدالة المشتقة f' للدالة f:**

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}-\{2\}$ حيث

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{x^2-4x+4-1}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

المقام موجب تمام و منه إشارة المشتقة من إشارة البسط : نقوم بحل المعادلة $x^2-4x+3=0$

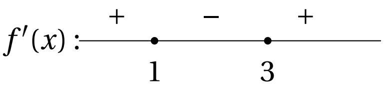
حساب Δ :

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(4)^2-4(1)(3)$$
$$\Delta=4$$

$\Delta>0$ إذن للمعادلة حلان مختلفان هما :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1=\frac{4-2}{2}$$
$$x_1=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1=\frac{4+2}{2}$$
$$x_2=3$$



جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

3) تعيين معادلة للمماسين (T_1) و (T_2) :

معادلة المماس هي $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ و عليه

$(T_1) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$(T_2) : y = f'(3)(x-3) + f(3)$

حيث $f'(1) = 0$ و $f(1) = -2$ و عليه $(T_1) : y = -2$

حيث $f'(1) = 0$ و $f(3) = 2$ و عليه $(T_1) : y = 2$

4) دراسة الوضع النسبي :

حساب الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = x - 2 + \frac{1}{x-2} - (x-2) = \frac{1}{x-2}$$

دراسة إشارة الفرق $f(x) - y$

البسط موجب تمام و عليه إشارة الفرق من إشارة المقام:

$x-2:$	$-$	2	$+$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	

1) تعيين D_g :

$$D_g = \{x / |x| - 2 \neq 0\}$$

$$D_g = \{x / |x| \neq 2\}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{2; -2\}$$

2) إثبات أن الدالة g زوجية. :

من أجل كل $x \in D_g$ أي $x \neq 2$ و $x \neq -2$ معناه $-x \neq 2$ و $-x \neq -2$ و منه $-x \in D_g$ و لدينا :

$$g(-x) = \frac{x^2 - 4|-x| + 5}{|-x| - 2}$$
$$g(-x) = \frac{x^2 - 4|x| + 5}{|x| - 2}$$
$$g(-x) = g(x)$$

و منه الدالة g زوجية

3) طريقة رسم (C_g) إنطلاقا من (C_f) :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2} ; x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 + 4x + 5}{-x - 2} ; x \leq 0 \end{cases}$$

و عليه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f) و بما أن الدالة زوجية فنتحصل على الجزء (C_g) لما $x \in]-\infty; 0]$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

☑ حل التمرين رقم 11 :

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$$

1) تعيين $f'(x)$:

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$ حيث

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x + 5)'(x + 1) - (x + 1)'(x^2 + 2x + 5)}{(x + 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x + 1) - (1)(x^2 + 2x + 5)}{(x + 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - x^2 - 2x - 5}{(x + 1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

2) دراسة إشارة $f'(x)$:

المقام موجب تمام و منه إشارة المشتقة من إشارة البسط :

$x^2 + 2x - 3 = 0$

حساب Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-5)$$
$$\Delta = 16$$

$\Delta > 0$ إذا للمعادلة حلان مختلفان

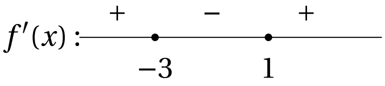
هما :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2}$$
$$x_1 = -3$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-2+4}{2}$$

$$x_2=1$$



x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

إتجاه تغير الدالة

◁ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-3]$

◁ الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-3;-1[$

◁ الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;1]$

◁ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-4	↘	‖	↘	4	↗	

3) **تعيين الأعداد الحقيقية a، b و c :**

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+5 & x+1 \\ \hline -x^2\ \ -x & x+1 \\ \hline x+5 & \\ -x-1 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

و منه $f(x)=x+1+\dfrac{4}{x+1}$ حيث : $a=1$، $b=1$ و $c=4$

4) **دراسة الوضع النسبي :** حساب الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=x+1+\frac{4}{x+1}-(x+1)=\frac{4}{x+1}$$

دراسة إشارة الفرق $f(x)-y$

البسط موجب تمام و عليه إشارة الفرق من إشارة المقام:

$x+1$: − (−1) +

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

5) **إثبات أنه من اجل كل $x \in D_f$ و $(-2-x) \in D_f$ فإن $f(-2-x)+f(x)=0$:**

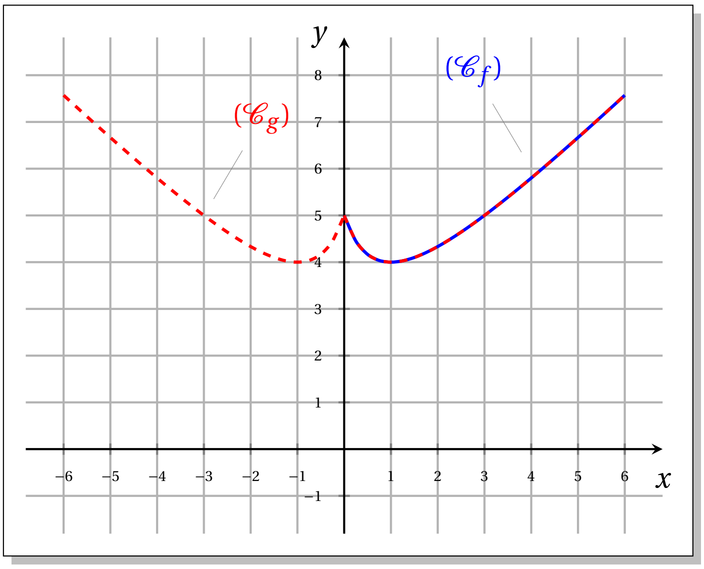
من اجل كل $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ معناه $x \neq -1$ و منه $-x \neq 1$ و منه $-2-x \neq -1$ و عليه $(-2-x) \in D_f$ و لدينا

$$f(-2-x)+f(x)=(-2-x)+1+\frac{4}{-2-x}+x+1+\frac{4}{x+1}$$
$$f(-2-x)+f(x)=-x-1-\frac{4}{x+2}+x+1+\frac{4}{x+1}$$
$$f(-2-x)+f(x)=-x-1-\frac{4}{x+2}+x+1+\frac{4}{x+1}$$
$$f(-2-x)+f(x)=0$$

و منه نستنتج ان النقطة $(-1;0)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

6) **تعيين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب :** $f(0)=5$ ومنه $(C_f)\bigcap(yy')=\{(0;5)\}$

7) **رسم C_f :**



8) تعيين D_g :

$$D_g = \{x / |x| + 1 \neq 0\}$$

$$D_g = \{x / |x| \neq -1\}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

9) إثبات أن الدالة g زوجية. :

من أجل كل $x \in D_g$ أي $-x \neq D_g$ و لدينا :

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(-x)^2 + 2|-x| + 5}{|-x| + 1} \\ &= \frac{x^2 + 2|x| + 5}{|x| + 1} \\ g(-x) &= g(x) \end{aligned}$$

و منه الدالة g زوجية

10) طريقة رسم (C_g) إنطلاقا من (C_f) :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} ; x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - 2x + 5}{-x + 1} ; x \leq 0 \end{cases}$$

و عليه من أجل كل $x \in [0;6]$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f) و بما أن الدالة زوجية فنتحصل على الجزء (C_g) لما $x \in [-6;0]$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

☑ حل التمرين رقم 12 :

$D_f =]0;+\infty]$ ، $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ حيث a , b و c أعداد حقيقية.

1) تعيين حلول المعادلة $f(x) = 0$:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل و منه : $\mathscr{S}\{1;3\}$

2) إشارة الدالة f :

x	0		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

3) إشارة الدالة المشتقة f':

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗	

4) **تعين : $f(1)$, $f(3)$, $f'(1)$, $f'(\frac{3}{2})$:**

◁ من البيان نجد $f(1)=f(3)=0$

◁ (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماس (T_1) معامل توجيهه a هو $f'(1)$ حيث $a=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

لدينا $A(0;2)$ و $B(1;0)$ نقطتين من (T_1) و منه $a=\frac{2-0}{0-1}=-2$ و عليه $f'(x)=-2$

◁ (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ مماس موازي لمحور الفواصل و عليه $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$

5) **تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c :**

لدينا $f(1)=0$ حيث $f(1)=a+b+c$ و عليه $a+b+c=0\cdots(1)$

و $f(3)=0$ حيث $f(3)=\frac{9a+3b+c}{9}$ و عليه $9a+3b+c=0\cdots(2)$

و $f'(1)=-2$ حيث f ق إ على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2ax+b)(x^2)-(2x)(ax^2+bx+c)}{(x^2)^2}\\
&= \frac{(2ax^3+bx^2)-(2ax^2+2bx+2cx)}{(x^2)^2}\\
&= \frac{-bx^2-2cx}{x^4}\\
f'(x) &= \frac{-bx+2c}{x^3}
\end{aligned}$$

أي $f'(1)=-b-2c$ و عليه $-b-2c=-2\cdots(3)$

من (3) نجد $b=-2c+2$

بتعويض قيمة b في (1) و (2) نجد

$$\begin{cases} a-2c+2+c=0\\ 9a+3+(-2c+2)+c=0\end{cases}$$ أي $$\begin{cases} (-5)\times(a-c+2)=0\times(-5)\\ 9a-5c+6=0\end{cases}$$ أي $$\begin{cases} -5a+5c-10=0\cdots(**)\\ 9a-5c+6=0\end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف نجد $4a-4=0$ و عليه $a=1$

بتعويض قيمة a في المعادلة $(*)$ نجد $a-c+2=0$ و عليه $c=3$

بتعويض قيمة c في (3) نجد $b=-2(3)+2$ أي $b=4$

نفرض $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$,

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

مما سبق $a=1$، $b=-4$ و $c=3$ و منه $f'(x)=\dfrac{4x-6}{x^3}$

دراسة إشارة $f'(x)$:

$f'(x)=0$ تكافئ $4x-6=0$ و $x^3\neq 3$ أي $x=\frac{3}{2}$ و $x\neq 0$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات :

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{3}$	↗	

حيث $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{3}$

2) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) :

$$f(x)-y=\frac{x^2-4x+3}{x^2}-1=\frac{x^2-4x+3-x^2}{x^2}=f(x)=\frac{-4x+3}{x^2}$$

البسط موجب تمام و عليه إشارة الفرق من إشارة المقام:

		$\frac{3}{4}$	
$-4x+3$:	$+$	●	$-$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $\left(\frac{3}{4};f(\frac{3}{4})\right)$	(C_f) تحت (Δ)	

1) **حساب $h'(x)$:**

h قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث $h'(x)=2\times f'(x)\times f(x)$

إشارة $h'(x)$:

x	0		1		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات :

x	0		1		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	0	↗	$\frac{1}{9}$	↘	0	↗	

✍للتواصل معنا تابعونا على مواقع التواصل الاجتماعي :

الأستاذة نرجس مرواني للرياضيات merouaninardjiss@gmail.com
profmerouani 0770349020