سلسلة تمارين رقم ①

◆ التمرين 01:

عين مجموعة تعريف الدالة f فيما يلي:

① $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$

② $f(x)=x^2-|x+1|$

③ $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$

④ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-|x|} & ; \ x\neq 0 \\ f(0)=-1 & ; \ x=0 \end{cases}$

⑤ $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x}{|x-1|}$

⑥ $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

⑦ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}}$

⑧ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$

⑨ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

⑩ $f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$

◆ التمرين 02:

عيّن مجموعة تعريف وعبارة الدوال: f، g، $f+g$، $f-g$، $f\times g$، $\frac{f}{g}$، $3f$، $-2g$ و $3f-2g$ في كل حالة مما يلي:

① $f(x)=x+1$ ، $g(x)=x^2+2x-3$

② $f(x)=1-\dfrac{3}{x+2}$ ، $g(x)=\dfrac{2x-3}{x+2}$

◆ التمرين 03:

اذكر إن كانت الدالتين f و g متساويتين في كل حالة مما يلي:

① $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{(x-3)^2}$ ، $g(x)=1+\dfrac{2}{x-3}$

② $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$ ، $g(x)=|x|+\sqrt{x+1}$

③ $f(x)=2x-1$ ، $g(x)=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2$

④ $f(x)=x+2$ ، $g(x)=\sqrt{(x+2)^2}$

⑤ $f(x)=x-1$ ، $g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x+1}$

⑥ $f(x)=x-\dfrac{1}{x-1}$ ، $g(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-1}$

⑦ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}$ ، $g(x)=\sqrt{x+1}-1$

◆ التمرين 04:

عين $f\circ g$ و $g\circ f$، بعد تعيين كل من D_f ، D_g ، $D_{f\circ g}$ و D_{gof} في كل حالة مما يلي:

① $f(x)=-4x$ ، $g(x)=3x$

② $f(x)=2x-2$ ، $g(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

③ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ، $g(x)=\sqrt{-x+1}$

④ $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ ، $g(x)=x^2$

⑤ $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، $g(x)=x^2+1$

⑥ $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ ، $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$

⑦ $f(x)=x+1$ ، $g(x)=\sin(x+1)$

⑧ $f(x)=x^2-4$ ، $g(x)=\dfrac{3}{x}$

◆ التمرين 05:

f ، g ، h و k دوال معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=2x \qquad g(x)=x^2$$
$$h(x)=x+1 \qquad k(x)=x^2+1$$

• أثبت ما يلي:

① $k=h\circ g$ ② $g\circ k=gk+k$

③ $f\circ k=2k$ ④ $k\circ h=g+2h$

⑤ $k\circ k=g^2+2k$ ⑥ $f+k=g\circ h$

◆ التمرين 06:

فكك الدالة f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما في كل حالة مما يلي:

① $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$ ② $f(x)=\sqrt{x-1}$

③ $f(x)=\cos(x+1)$ ④ $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

⑤ $f(x)=2\sqrt{x}+1$ ⑥ $f(x)=x^2-2x$

⑦ $f(x)=\left|\dfrac{x-1}{2}\right|$ ⑧ $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

⑨ $f(x)=(x+2)^2+1$ ⑩ $f(x)=2-\dfrac{3}{x+4}$

◆ التمرين 07:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax+b$ حيث a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$

① عرِّف الدالة f.

② عين الثنائية $(a;b)$ التي من أجلها يكون: $f=f\circ f$.

◆ التمرين 08:

f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}$

• بيّن أنّ: $(f\circ f)(x)=x$، ثم استنتج قيمة: $(f\circ f\circ f)(2)$

◆ التمرين 09:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

• بيّن أنّ: $(f\circ f\circ f\circ f)(x)=x$

◆ التمرين 10:

I) ادرس تغيرات الدوال التالية على المجال I :

①	$f(x) = 3x - 4$	$I = \mathbb{R}$
②	$g(x) = -5x + 7$	$I = \mathbb{R}$
③	$h(x) = x - \dfrac{1}{x}$	$I = \mathbb{R}_+^*$
④	$k(x) = \sqrt{3 - x}$	$I =]-\infty; 3]$
⑤	$u(x) = 2x^2 - 4$	$I = \mathbb{R}$
⑥	$v(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$I = \mathbb{R}^*$
⑦	$w(x) = x^2 + x$	$I = \mathbb{R}_+^*$

II) استنتج اتجاه تغير الدوال التالية:

$-2f - 5$ $-3g + 2$ $v \times w$ $f + g$

$g \circ f$ $f \circ v$ $g \circ v$ $f \circ h$

◆ التمرين 11:

f و g دالتان معرفتان بجدول تغيراتهما كما يلي:

x	-3		0		1
$f(x)$	0	↘	-4	↗	5

x	-4		0		5
$g(x)$	-5	↗	0	↗	2

① أوجد مجموعة تعريف الدالة h حيث: $h(x) = (g \circ f)(x)$

② احسب: $h(-3)$ ، $h(0)$ و $h(1)$.

③ ادرس اتجاه تغير الدالة h على المجال $[-3; 0]$ ثم على $[0; 1]$

◆ التمرين 12:

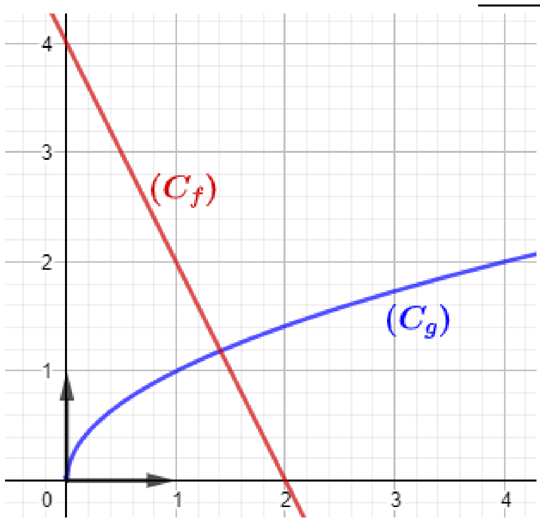
لتكن f دالة معرفة على المجال $[-3; 4]$ بجدول تغيراتها التالي:

x	-3		2		4
$f(x)$	16	↘	1	↗	9

• ادرس اتجاه التغير ثم شكل جدول التغيرات لكل من الدوال التالية:

$$\frac{1}{f} \text{ ، } \sqrt{f} \text{ و } f^2$$

◆ التمرين 13:



① بقراءة بيانية، عيّن: $(f \circ g)(4)$، $(f \circ g)(0)$ و $(g \circ f)(0)$

② لتكن $f(x) = -2x + 4$ و $g(x) = \sqrt{x}$:

أ/ عين $D_{f \circ g}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f \circ g$.

ب/ عيّن $f \circ g$.

◆ التمرين 14:

① ادرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = \frac{1}{x - 1}$$

② نعتبر الدالتان f و g المعرفتان على $]1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 \text{ و } g(x) = \frac{x}{x - 1}$$

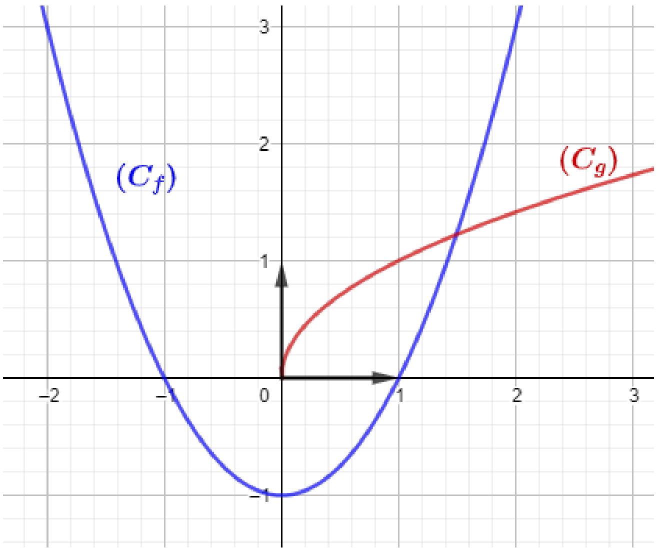
أ/ بيّن أنه إذا كان $x > 1$ فإنّ $g(x) > 1$

ب/ تحقق أنّ $(f \circ g)(x) = h(x)$.

ج/ استنتج اتجاه تغير الدالة g

◆ التمرين 15:

في الشكل الموالي (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}_+$ على الترتيب:



بقراءة بيانية:

① حل المتراجحة $f(x) \geq 0$، ثم استنتج $D_{f \circ g}$ و $D_{g \circ f}$

② عيّن $(f \circ g)(0)$، $(f \circ g)(4)$، $(g \circ f)(-1)$ و $(f \circ f)(1)$

③ شكل جدول تغيرات كل من f و g، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة $f \circ g$ على $\mathbb{R} - \{-1\}$.

◆ التمرين 16:

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 1 \\ (f \circ g)(x) = 4x^2 - 10 + 5 \end{cases}$

• جد بدلالة x عبارة الدالة g.

◆ التمرين 17:

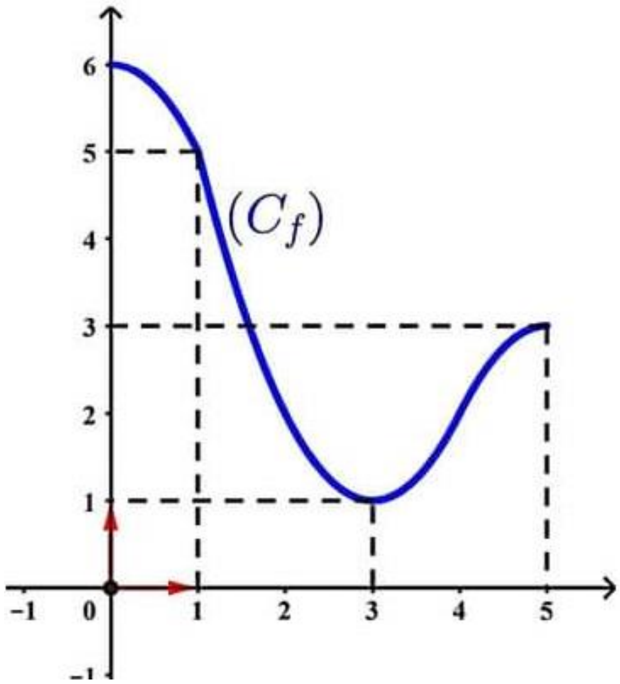
f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x) = x + m + 1 \\ g(x) = mx + 1 \end{cases}$

• جد جميع القيم الممكنة للعدد الحقيقي m والتي تحقق:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

◆ التمرين 18:

نعتبر f الدالة المعرفة بتمثيلها البياني التالي:



① احسب $\left(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{مرة } 2021}\right)(1)$

② أنشئ (C_g) التمثيل البياني للدالة g في كل حالة مما يلي:

$g(x)=f(x+1)+1$ ، $g(x)=-f(x)$

$g(x)=|f(x)|$ ، $g(x)=f(|x|)$

$g(x)=-f(|x|)$ ، $g(x)=-f(-x)$

◆ التمرين 19:

f و g دوال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\cos x \\ g(x)=\sin x \\ h(x)=x^2 \end{cases}$

• أثبت أنّ $(h\circ f)(x)+(h\circ g)(x)=1$

◆ التمرين 20:

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ حيث: f فردية و g زوجية.

• ادرس شفعية كل من الدالتين $g\circ f$ و $f\circ g$.

◆ التمرين 21:

نعتبر الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي:

x	-5	0	1	3	7
$f(x)$	-4 ↗	-1 ↘	-2 ↗	0 ↗	6

① عيّن حلول المعادلة $f(x)=0$، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

② عيّن القيمة الحدية العظمى للدالة f.

③ عيّن جدول تغيرات الدوال التالية:

$g(x)=-f(x)$ ، $k(x)=f(-x)$

$u(x)=f(x)-2$ ، $v(x)=|f(x)|$

④ ارسم في نفس المعلم منحنى الدالة f ، g ، k ، u و v.

◆ التمرين 22:

نعتبر الدالتين u و v المعرفتين كما يلي:

$u(x)=-x+1$ و $v(x)=\frac{1}{x}$

ولتكن f دالة معرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f=u\circ v$

① اكتب بدلالة x عبارة $f(x)$.

② عيّن صورة المجال $]-\infty;1[$ بالدالة u.

③ استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;1[$.

④ لتكن الدالة g المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(x)+2$

• استنتج اتجاه تغير الدالة g.

◆ التمرين 23:

نعتبر الدالتان f و g المعرفتان بـ:

$$f(x)=2x-4$$
$$g(x)=\frac{x}{-x-2}$$

• عين مجموعة تعريف الدوال التالية:

$f+5$ ، $2g$ ، $f+g$ ، $f\times g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$

◆ التمرين 24:

① لتكن الدالة f المعرفة على $[2;+\infty[$ بـ

$$f(x)=\sqrt{x-2}-1$$

أ/ تحقق أنّ الدالة f هي مركب دالتين u و v يطلب تعيينهما.

ب/ اعتمادا على اتجاه تغير كل من الدالتين u و v، استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ج/ حل المعادلة $f(x)=0$ من أجل $x\in[2;+\infty[$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

د/ ارسم المنحنى (C_f) منحنى الدالة f بالاعتماد على المنحنى (C) منحنى الدالة $x\longmapsto\sqrt{x}$

② لتكن الدالة g المعرفة على $[2;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=|f(x)|$$

أ/ اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب/ ارسم (C_g) منحنى الدالة g بالاعتماد على (C_f).

③ لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(|x|)$

أ/ اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

ب/ بيّن أنّ الدالة h زوجية

ج/ ارسم (C_h) منحنى الدالة h بالاعتماد على (C_f).

◆ التمرين 25:

نعتبر الدالتان f و g المعرفتان على $[-1;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x+1}+2$

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في مستوي $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

① انطلاقا من (C) التمثيل البياني للدالة $x\longmapsto\sqrt{x}$ ارسم (C_f)

② حدد طريقتين لرسم (C_g)، ثم ارسمه.

◆ التمرين 26:

أثبت بثلاث طرق مختلفة أن $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f، في كل حالة مما يلي:

$f(x) = x^2 + 4x + 3$ ، $x = -2$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$ ، $x = 1$

◆ التمرين 27:

أثبت بثلاث طرق مختلفة أن Ω مركز تناظر لـ (C_f) منحنى الدالة f، في كل حالة مما يلي:

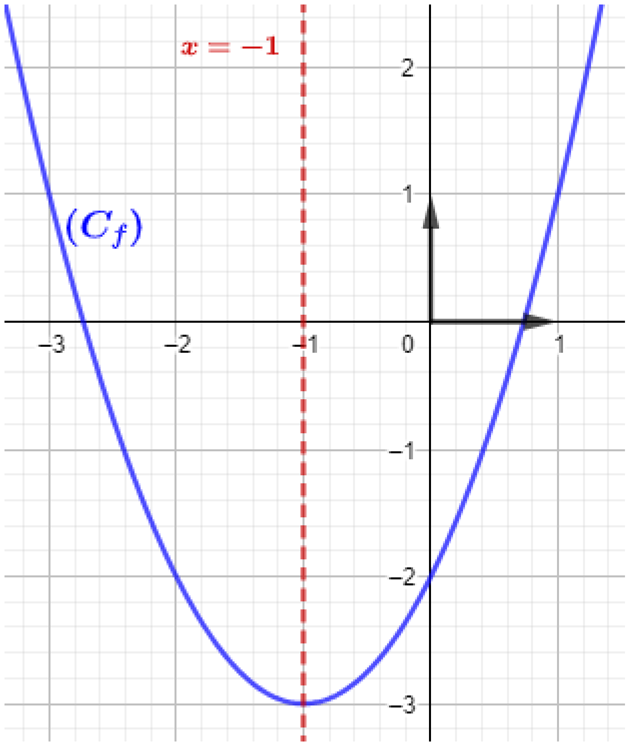
$f(x) = \dfrac{3x}{x-2}$ ، $\Omega(2;3)$

$f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ ، $\Omega(2;2)$

$f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ ، $\Omega(-1;1)$

◆ التمرين 28:

في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$، المنحنى (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f:



① شكل جدول تغيرات الدالة f.

② شكل جدول إشارة الدالة f

③ عيّن شعاع الانسحاب الذي يحول الدالة مربع إلى (C_f).

④ جد عبارة $f(x)$ بدلالة x.

⑤ بيّن أنّ المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ محور تناظر لـ (C_f) بطريقتين مختلفتين.

⑥ في نفس المعلم أنشئ منحنيات الدوال g، h، k و φحيث:

$g(x) = f(|x|)$
$h(x) = |f(x)|$
$k(x) = (x-1)+3$
$\varphi(x) = -h(x)$

◆ التمرين 29:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = ax^2 + bx + c$، و(C_f) منحناها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$

① عين الأعداد الحقيقية a، b وc علما أنّ (C_f) يمر على النقاط $A(0;-5)$، $B(1;0)$ و $C(-5;0)$.

② بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = (x+2)^2 - 9$

③ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

④ عيّن القيمة الحدية الصغرى للدالة f.

⑤ بالاستعانة بمنحنى الدالة مربع، ارسم (C_f) .

◆ التمرين 30:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 2x$، و(C_f) منحناها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$

① ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

② بالاستعانة بمنحنى الدالة مربع، ارسم (C_f).

③ أنشئ في نفس المعلم السابق منحنى الدالة g حيث:

$$g(x) = |f(x)|$$

④ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي حلول المعادلتين (E) و(F) حيث: $f(x) = m \ldots (E)$ و $g(x) = m \ldots (F)$

◆ التمرين 31:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$$

و(C_f) منحناها البياني في مستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① عين مجموعة تعريف الدالة f.

② عيّن العددين a و b بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1}$$

③ استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

④ بيّن أنه من أجل كل $x > -1$ لدينا: $f(x) > 3$.

⑤ بيّن أنّ النقطة $\omega(-1;3)$ مركز تناظر لـ (C_f).

⑥ بيّن أنّ (C_f) هو صورة منحنى الدالة مقلوب بانسحاب يطلب تعيين شعاعه، ثم ارسمه.

◆ التمرين 32:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2-x}$$

① عين الأعداد الحقيقية a، b وc بحيث من أجل كل $x \in D_f$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$$

② ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) ذو المعادلة

$$y = -x - 5$$