ملخص حول الإشتقاقية

العدد المشتق : $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة a هي : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

معامل توجيه (ميل) المماس عند النقطة ذات الفاصلة a هو : $f'(a)$

مشتقات الدوال المألوفة :

الدالة f	العدد الثابت a	x	ax	$ax\pm b$
دالتها المشتقة f'	0	1	a	a
الدالة f	x^2	x^3	x^n	ax^n
دالتها المشتقة f'	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}	nax^{n-1}
الدالة f	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$
دالتها المشتقة f'	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$

مشتق عمليات على الدوال :

$(a\times f)'=a\times f'$	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
$(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$

مشتق مركب دالة مع دالة تآلفية : $[f(ax+b)]'=a\times f'(ax+b)$

تطبيقاتها :

الدالة	$(ax+b)^n$	$\sqrt{ax+b}$	$\frac{1}{ax+b}$	$\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
دالتها المشتقة	$na(ax+b)^{n-1}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$-\frac{a}{(ax+b)^2}$	$a\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$

العلاقة بين الدالة ودالتها المشتقة

$f'(x)$ موجبة على مجال D معناه f دالة متزايدة على المجال D

$f'(x)$ سالبة على مجال D معناه f دالة متناقصة على المجال D

$f'(x)$ معدومة على مجال D معناه f دالة ثابتة على المجال D

النقطة الحدية ونقطة الإنعطاف :

إذا انعدم المشتق الأول عند قيمة a مغيرا إشارته فالمنحنى يقبل النقطة $A(a;f(a))$ كنقطة حدية .

إذا انعدم المشتق الأول عند قيمة a ولم يغير إشارته فالمنحنى يقبل النقطة $A(a;f(a))$ كنقطة انعطاف .

إذا انعدم المشتق الثاني عند قيمة a مغيرا إشارته فالمنحنى يقبل النقطة $A(a;f(a))$ كنقطة انعطاف .

التمرين رقم 01 :

☜ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I)
1- أحسب $f(1)$ ثم أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ حيث c , b , a أعداد حقيقية يطلب تعيينها .
2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ و أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة .
3- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f(x)>0$ و أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة .

II)
1- بين لماذا (C_f) يقبل مماسا عند كل نقطة منه ؟
2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x)=0$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f وفسر بيانيا النتيجة السابقة .
3- عين النقط من (C_f) التي يكون فيها معامل توجيهه المماس يساوي 3.
4- ليكن (D) مستقيم معادلته $y=mx+d$ حيث m و d عددان حقيقيان .
ناقش حسب قيم m وجود مماسات للمنحني (C_f) تكون فيها موازية للمستقيم (D)؟

التمرين رقم 02 :

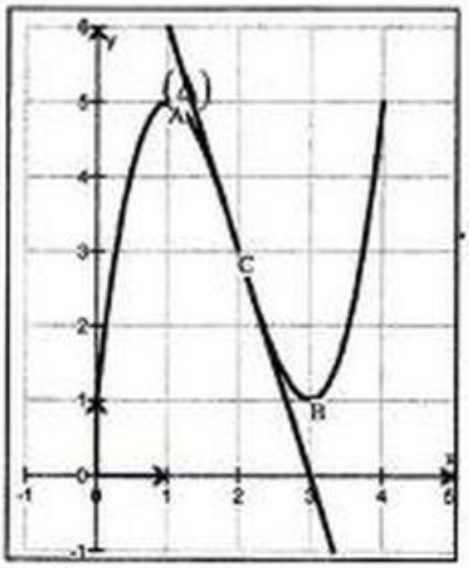
نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، و (D) مستقيم معادلته $y=x+2$.

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c التي تحقق من أجل كل x من $]2;+\infty[$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
2) عين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) على المجال $]2;+\infty[$.
3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2-14x+33=0$ ثم استنتج قيمتي x التي تحقق $f(x)=14$.
4) أ) بين أن الدالة المشتقة للدالة f معرفة بـ: $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$
ب) عين إشارة $f'(x)$ على المجال $]2;+\infty[$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.
جـ) بلستعمال النتيجة السابقة قارن بين العددين :

$$A=\frac{(5.01201301401516)^2+5}{3.01201301401516} \quad \text{و} \quad B=\frac{(5.01201301401517)^2+5}{3.01201301401517}$$

5) أ) بين أن معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 هي : $y=-8x+2$
ب) استنتج قيمة مقربة للعدد $f(0.9999)$.

التمرين رقم 03 :



التمثيل البياني (C_f) المقابل و المرسوم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ هو لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;4]$.

النقط A، B و C هي نقط من (C_f) بحيث أن مماسي (C_f) عند كل من A و B يوازيان محور الفواصل بينما مماس (C_f) عند النقط C هو (Δ).

لدينا: $A(1;5)$، $B(3;1)$ و $C(2;3)$.

1/أحسب $f'(1)$، $f'(2)$ و $f'(3)$. أكتب معادلة للمماس (Δ).

2/عين بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=4$ على المجال $[0;4]$.

3/شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج جدول تغيرات الدالة g المعرفة على المجال $[0;4]$ بـ $g(x)=\frac{5}{f(x)}$

التمرين رقم 04 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+2-|x+1|$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- اثبت أنه من أجل $h\neq 0$ لدينا: $\frac{f(-1+h)-1}{h}=h^2-3h+3-\frac{|h|}{h}$.

ب- احسب $\lim\limits_{h \xrightarrow{<} 0}\frac{f(-1+h)-1}{h}$ ، $\lim\limits_{h \xrightarrow{>} 0}\frac{f(-1+h)-1}{h}$.ماذا تستنتج؟ أعط تفسيرا هندسيا للنتيجتين .

2) أ- احسب $f'(x)$ ثم بين أن الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;-1]$.

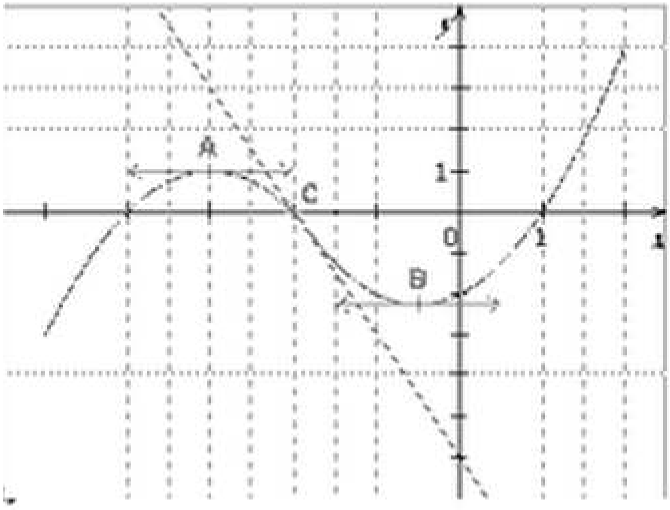
ب- بين أن الدالة f تقبل في المجال $]-1;1[$ قيمتان حديتان إحداهما محلية عظمى و الأخرى محلية صغرى.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2,-1]$.

4) أ- أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصل 0

ب- تحقق من أجل كل x من $]-1;1[$ ، $f(x)-(-x+1)=x^3$ استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) ماذا تلاحظ؟

التمرين رقم 05 :



المنحنى البياني (C_f) التالي هو للدالة f القابلة للإشتقاق على $[-5;2]$:

1.أ- بقراءة بيانية عين $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f'(-2)$ و $f'(-3)$

ب- استنتج معادلات المماسات لـ (C_f) عند A ، B و C

علما أن ترتيب النقطة B هو $-\frac{9}{4}$

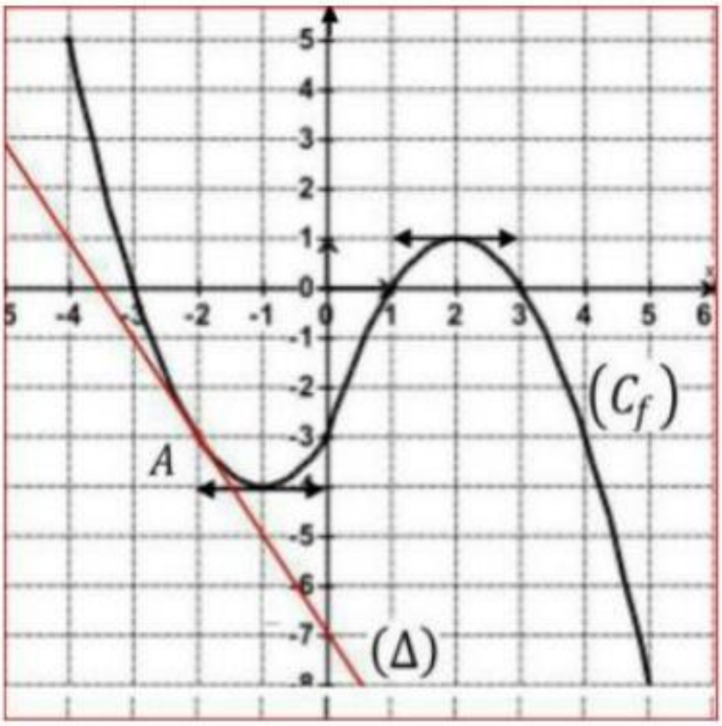
2.حدد من أجل كل $x \in [-5;2]$ إشارة $f'(x)$ في جدول.

3.حدد من أجل كل $x \in [-5;2]$ إشارة $f(x)$ في جدول.

4. حدد وضعية (C_f) بالنسبة للمماس عند النقطة C ماذا تلاحظ؟

5. هل توجد مماسات أخرى لـ (C_f) موازية لمماسه عند النقطة C؟

التمرين رقم 06 :



الشكل المقابل يمثل (C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-4 ; 5]$ و دالتها المشتقة f' و (Δ) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة A . بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية :

1) عين صور الأعداد 2 , -1 , -2 , 0 بالدالة f .

2) احسب : $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(2)$.

3) حدد إشارة $f(x)$ على المجال $[-4 ; 5]$.

4) حدد اتجاه تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

5) أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-4 ; 5]$.

6) حدد بيانياً عدد حلول المعادلة : $f(x) = -2$.

7) حل بيانياً المتراجحة التالية : $f(x) > -3$.

8) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) .