التمرين الأول :

أحسب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1. $f(x)=x^2+1$. $a=-1;a=3$
2. $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$. $a=1;a=0$
3. $f(x)=x^2+4x+4$. $a=2$
4. $f(x)=1+\dfrac{5}{1-2x}$. $a=0$

التمرين الثاني : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2-2x+1$ ينسب المستوي لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f.

1. أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0=2$ و استنتج $f'(2)$.
2. عين معادلة المماس (Γ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 2 .

التمرين الثالث : لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3}{x+1} & ;x>1\\ \sqrt{x^2+3} & ;x\le 1\end{cases}$$

✓ أدرس قابلية الاشتقاق لدالة f عند $x_0=1$ أعط تفسيرا بيانيا لهذه النتيجة .

التمرين الرابع:

أحسب مشتق الدالة في كل حالة من الحالات التالية و حدد $D_{f'}$

1. $f(x)=x^3-4x+5$. $D_f=\mathbb{R}$
2. $f(x)=(x^2-1)^3$. $D_f=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$. $D_f=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-5}{2x+1}$. $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$
5. $f(x)=\dfrac{4}{(2x+3)^2}$. $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$
6. $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{x-3}$. $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$
7. $f(x)=(3x-6)^3$. $D_f=\mathbb{R}$
8. $f(x)=(x^2+x)\sqrt{x^2+1}$. $D_f=\mathbb{R}$
9. $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2}{(x+1)^2}$. $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$
10. $f(x)=\sqrt{2+\cos 2x}$. $D_f=\mathbb{R}$
11. $f(x)=|x^2+4x-5|$. $D_f=\mathbb{R}$

التمرين الخامس: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$

- عين العددين الحقيقين $\beta;\alpha$ بحيث يقبل المنحنى الممثل للدالة f مماس معامل توجيهه $\dfrac{2}{3}$ عند النقطة $A(1;-3)$.

التمرين السادس: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=ax^2+bx+c;a\neq 0$

- عين العددين الحقيقين $b;a$ و c بحيث يشمل المنحنى الممثل للدالة f النقطة $(0;3)$ و يقبل مماس عند $\left(\dfrac{5}{4};-\dfrac{1}{8}\right)$ موازيا لحامل محور الفواصل .

التمرين السابع: لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{2x-3}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. بين أن f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.
2. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين ميل كل منهما -4 ثم عين النقطتين الموافقتين لذلك و لتكن $B;A$.
3. أكتب عندئذ معادلة كل مماس عند كل نقطة .
4. عين نقطتين $D;C$ من (C_f) بحيث يقبل عندها (C_f) مماسا يشمل النقطة $\left(-3;\dfrac{4}{25}\right)$.

التمرين الأول: حساب العدد المشتق $f'(a)$ للدالة f في كل حالة:

1. $f(x) = x^2 + 1 \quad a = 3 \;;\; a = -1$

☑ من أجل $a = 3$:

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{x^2+1-10}{x-3} = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6$

إذن قابلة للاشتقاق عند $a = 3$ وعددها المشتق: $f'(3) = 6$

☑ من أجل $a = -1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)} = \frac{x^2+1-2}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$$

ومنه $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(x)-f(3)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$

إذن قابلة للاشتقاق عند $a = 3$ وعددها المشتق: $f'(-1) = 6$

2. $f(x) = \frac{3}{x+1} \quad a = 1 \;;\; a = 0$

☑ من أجل $a = 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{3}{x+1}-3}{x-0} = \frac{\frac{3-3(x+1)}{x+1}}{x} = \frac{\frac{-3x}{x+1}}{x}\frac{-3x}{x+1} \times \frac{1}{x} = \frac{-3}{x+1}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{x+1} = -3$

إذن قابلة للاشتقاق عند $a = 0$ وعددها المشتق: $f'(0) = -3$

☑ من أجل $a = 1$:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{3}{x+1}-\frac{3}{2}}{x-1} = \frac{\frac{6-3(x+1)}{2(x+1)}}{x-1} = \frac{\frac{-3x+3}{x+1}}{x-1} = \frac{-3}{x+1}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{2}$

إذن قابلة للاشتقاق عند $a = 1$ وعددها المشتق: $f'(1) = \frac{-3}{2}$

3. $f(x) = x^2 + 4x + 4 \quad a = 2$

☑ من أجل $a = 2$:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2+4x+4-16}{x-2} = \frac{x^2+4x-12}{x-2} = \frac{(x+6)(x-2)}{x-2} = x+6$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+6) = 8$

إذن قابلة للاشتقاق عند $a = 2$ وعددها المشتق: $f'(2) = 8$

4. $f(x) = 1 + \frac{5}{1-2x} \quad a = 0$

☑ من أجل $a = 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1+\frac{5}{1-2x}-6}{x} = \frac{\frac{5-5(1-2x)}{1-2x}}{x} = \frac{\frac{10x}{1-2x}}{x} = \frac{10}{1-2x}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{10}{1-2x} = 10$

إذن قابلة للاشتقاق عند $a = 0$ وعددها المشتق: $f'(0) = 10$

التمرين الثاني:

لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. أثبت أن الدالة قابلة للاشتقاق عند العدد $x_0 = 2$ واستنتاج $f'(2)$

☑ من أجل $a = 2$:

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2-2x+1-1}{x-2} = \frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2} = x$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x) = 2$

إذن قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$ وعددها المشتق: $f'(2) = 2$

2. تعين معادلة المماس (Γ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 2

نعلم أن معادلة المماس من الشكل: $(\Gamma): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

ومنه $(\Gamma): y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

ومنه $(\Gamma): y = 2(x - 2) + 1$

إذن $(\Gamma): y = 2x - 3$

التمرين الثالث:

لدينا
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & ; x > 1 \\ \sqrt{x^2+3} & ; x \le 1 \end{cases}$$

☑ دراسة قابلية الاشتقاق لدالة عند $x_0 = 1$ إعطاء تفسير بياني لنتيجة:

✓ من أجل $x > 1$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \frac{\frac{x^2+3}{x+1}-2}{x-1} = \frac{\frac{x^2+3-2(x+1)}{x+1}}{x-1} = \frac{\frac{x^2-2x+1}{x+1}}{x-1} = \frac{\frac{(x-1)^2}{x+1}}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{x-1}{x+1} = 0$

✓ من أجل $x < 1$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x^2+3-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2}$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

إذن غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

التفسير البياني:

منحنى الدالة يقبل نصفي مماسيين عند النقطة ذات الفاصلة 1 معامل كل منهما 0 و1

التمرين الرابع: حساب الدالة المشتقة في كل حالة:

1. لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3 - 4x + 1$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

2. لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (x^2 - 1)^3$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = 3(2x)(x^2 - 1)^2 = 6x(x^2 - 1)^2$$

3. لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4} = \frac{(2x+3)(x^2+3x+4)-(2x+3)(x^2+3x-4)}{(x^2+3x+4)^2} = \frac{8(2x+3)}{(x^2+3x+4)^2}$$

4. لدينا $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ $\quad f(x) = \frac{3x^2+4x-5}{2x+1}$

قابلة للاشتقاق على $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ و $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{3x^2+4x-5}{2x+1} = \frac{(6x+4)(2x+1)-2(3x^2+4x-5)}{(2x+1)^2} = \frac{6x^2+6x+14}{(x^2+3x+4)^2}$$

5. لدينا $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-3}{2}\right\}$ $\quad f(x) = \frac{4}{(2x+3)^2}$

قابلة للاشتقاق على $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$ و $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{0-4(2)(2)(2x+3)}{((2x+3)^2)^2} = \frac{-8(2x+3)}{(2x+3)^4}$$

6. لدينا $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ $\quad f(x) = \frac{x^2-8x+16}{x-3}$

قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 3[$ و $]3; +\infty[$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{(2x-8)(x-3)-1(x^2-8x+16)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

7. لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (3x - 6)^3$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = 3(3)(3x - 6)^2 = 9(3x - 6)^2$$

8. لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (x^2 + x)\sqrt{x^2 + 1}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = (2x + 1)\sqrt{x^2 + 1} + (x^2 + x)\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

9. لدينا $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad f(x) = \frac{x^3+4x^2}{(x+1)^2}$

قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{(3x^2+8x)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+4x^2)}{((x+1)^2)^2} = \frac{x(x+1)(x^2+3x+8)}{(x+1)^4}$$

10. لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sqrt{2 + cos(2x)}$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2+2(-sin(2x))}{2\sqrt{2+cos(2x)}} = \frac{1-sin(2x)}{2\sqrt{2+cos(2x)}}$$

لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x^2 + 4x - 5|$

كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 5 & ; x \in]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[\\ -(x^2 + 4x - 5) & ; x \in [-5; 1] \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودلتها المشتقة

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; x \in]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[\\ -(2x + 4) & ; x \in [-5; 1] \end{cases}$$

التمرين الخامس:

لدينا $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ $\quad f(x) = \frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$

☑ **تعين العددين الحقيقين** α و β :

نعلم أن f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; -2[$ و $]-2; +\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{(2x+\alpha)(x+2)-(x^2+\alpha x+\beta)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+2\alpha-\beta}{(x+2)^2}$$

المنحنى الممثل للدالة f يقبل مماس معامل توجيهه $\frac{2}{3}$ عند النقطة $A(1; -3)$

هذا يعني أن $\begin{cases} f(1) = -3 \\ f'(1) = \frac{2}{3} \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} f(1) = \frac{1+\alpha+\beta}{3} \\ f'(1) = \frac{5+2\alpha-\beta}{9} \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} \frac{1+\alpha+\beta}{3} = -3 \\ \frac{5+2\alpha-\beta}{9} = \frac{2}{3} \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} 1 + \alpha + \beta = -9 \\ 5 + 2\alpha - \beta = 6 \end{cases}$

أي أن $\begin{cases} \alpha + \beta = -10 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases}$ بعد الحساب $\begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -7 \end{cases}$

التمرين السادس:

لدينا $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$

☑ **تعين العددين** a; b و c :

نعلم أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $f'(x) = 2ax + b$

منحنى الدالة يشمل النقطة $A(0; 3)$ ويقبل مماس عند $B\left(\frac{5}{4}; \frac{-1}{8}\right)$ موازيا لحمال محور الفواصل

هذا يعني أن $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{-1}{8} \\ f'\left(\frac{5}{4}\right) = 0 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} f(0) = c \\ f\left(\frac{5}{4}\right) = a\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4}b + c \\ f'\left(\frac{5}{4}\right) = 2a\frac{5}{4} + b = \frac{5}{2}a + b \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} c = 3 \\ \frac{25}{16}a + \frac{5}{4}b + c = \frac{-1}{8} \\ \frac{5}{2}a + b = 0 \end{cases}$ وبالتالي $\begin{cases} \frac{25}{16}a + \frac{5}{4}b + 3 = \frac{-1}{8} \\ \frac{5}{2}a + b = 0 \end{cases}$

بعد الحساب $\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$