الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبية — ثانوية الشهيد محمد بوجمعة لوطاية بسكرة

الشعبـــة : العلـوم التجريبيـــــــــــة — دورة مـــــــــــــــــــــــاي 2019

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 3 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I) نعرف في $\mathbb{C}$ كثير الحدود P كثير حدود للمتغير المركب z بـ: $P(z)=z^3-4z^2+8z-8$

1) تحقق انه من اجل كل z من $\mathbb{C}$ لدينا : $P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O\,,\vec{u};\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب .

1) اكتب على الشكل الاسي العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

2) عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة C الى النقطة B مع ذكر عناصره المميزة

3) استنتج نوع المثلث ABC

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي المركب ذات اللاحقة z التي تحقق: $\left|z^2\right|-\left(z+\overline{z}\right)-2=0$

أ) تحقق ان النقطة B من المجموعة (E)

ب) عين ثم انشئ المجموعة (E) في المعلم $\left(O\,,\vec{u};\vec{v}\right)$

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0=-1$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+4}{u_n+3}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0<u_n<2$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) بين مع التبرير أن المتتالية (u_n) متقاربة.

4) من اجل كل n من $\mathbb{N}$ نضع : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+2}$

أ) أكتب $5v_{n+1}$ بدلالة v_n ثم استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالث :

يحتوي وعاء على ثلاث قريصات بيضاء مرقمة بالشكل 1 ، 5 ، 5 واربع قريصات حمراء مرقمة بالشكل 1 ، 1 ، 3 ، 3 .
القريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس،
نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد .
1) أحسب احتمال الحدثين التاليين:
A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون"
B : " الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 6"
2) احسب $P(A \cap B)$ ، هل الحدثين A ، B مستقلين ؟.
3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لقريصتين مجموع الرقميين المسجلين عليهما.
أ) ما هي قيم المتغير العشوائي X ؟.
ب) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X
ج) احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري.

التمرين الرابع:

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-4;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ)اثبت أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D).

3) أ) بين انه من اجل كل x من $[-4;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على $[-4;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديد احداثييها.

د) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-1.7<\alpha<-1.6$

4) أنشئ (C_f) و (D) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$.

II) 1) اوجد مجموعة الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على $[-4;+\infty[$.

2) λ عدد حقيقي حيث $\lambda>0$

احسب بـcm^2 المساحة $A(\lambda)$ للسطح المستوي المحدد بـ (C_f) و (D)

و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=0$ $x=\lambda$

3) احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 = 3z - 9$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O, \vec{u}\,; \vec{v}\right)$

نعتبر النقطتين A ، B ذات اللاحقتين $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ على الترتيب .

1) احسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ ثم استنتج ان النقطتين A ، B تنتميان الى دائرة (C) يطلب تحديد عناصرها المميزة.

2) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$

أ) حدد طبيعة التحويل النقطي T ، مع ذكر عناصره المميزة

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل النقطي T.

3) أ) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسي.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول النقطة C الى النقطة B ، مع ذكر عناصره المميزة.

التمرين الثاني :

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$$

1) أحسب u_1 ، u_2

2) بين أن المتتالية العددية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n = u_n^2 + 3$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية اساسها 2 ، ثم احسب حدها الاول v_0

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

ج) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) أكتب بدلالة n المجموعين S ، S' حيث:

$$S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
$$S' = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ ، $E(7;-1;4)$

1) بين أن النقط A ، B و C تشكل مستو.

2) ليكن (D) المستقيم المار من النقطة E و $\vec{u}(2;-1;3)$ شعاع توجيه له.

أ) بين أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) .

ب) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) ليكن (P) و (P') مستويين معرفين بمعادلتيهما كما يلي :

$$(P): x+y+z=0$$

$$(P'): x+4y+2=0$$

أ) بين أن (P) و (P') متقاطعين وفق مستقيم (D') المعرف بتمثيله الوسيطي :

$$(D'):\begin{cases} x=-2-4t \\ y=t \qquad ; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2+3t \end{cases}$$

ب) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D') و المستوي (ABC).

التمرين الرابع :

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$ ، $\|\vec{i}\|=1cm$

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

1) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^{x}+1)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=e^{-x}g(e^{x})$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أنشئ (C_f) في المعلم $(O,\vec{i};\vec{j})$

4) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $F(x)=x-(e^{-x}+1)\ln(e^{x}+1)$ هي دالة أصلية لدالة f على $\mathbb{R}$

ب) A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمات $y=0$ ، $x=0$ ، $x=\ln 2$ ،احسب بـ cm^2 المساحة A

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

اختبار مادة : الرياضيات المستوى: الثالثة ثانوي

محاور الموضوع	عناصر الإجابة الموضوع الاول	العلامة مجزاة	العلامة المجموع
الأعداد المركبة			05

التمرين الاول:

(I

أ) التحقق انه من اجل كل z من $\mathbb{C}$ فان $P(z)=(z-2)(z^2-2z+4)$:

$$(z-2)(z^2-2z+4)=z^3-4z^2+8z-8=P(z)$$

ب) الحل في $\mathbb{C}$ ، للمعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ معناه: $(z-2)(z^2-2z+4)=0$ ومنه $z=2$ أو $z=1-i\sqrt{3}$ أو $z=1+i\sqrt{3}$ أي $S=\left\{z=2\,;z=1-i\sqrt{3};z=1+i\sqrt{3}\right\}$

(II

1) كتابة الشكل الاسي للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$: $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2) تعيين طبيعة التحويل النقطي f :

لدينا : $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ أي : $z_B-z_A=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(z_C-z_A\right)$

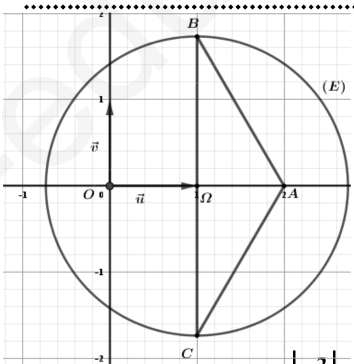
ومنه : التحويل النقطي f هو دوران مركزه النقطة A وزاويته $\theta=-\dfrac{2\pi}{3}$

3) استنتاج نوع المثلث ABC :

لدينا $\left|z_B-z_A\right|=\left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\left(z_C-z_A\right)\right|=\left|e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right|\left|z_C-z_A\right|=\left|z_C-z_A\right|$ ومنه $AB=AC$

اذن: المثلث ABC متساوي الساقين .

4) ....



أ) التحقق من ان النقطة B من المجموعة (E) :

$$\left|{z_B}^2\right|-\left(z_B+\overline{z_B}\right)-2=4-2-2=0$$

إذن: النقطة B من المجموعة (E) .

ب) تعيين و انشاء المجموعة (E) في المعلم $\left(O,\vec{u};\vec{v}\right)$:

لتكن النقطة M من المستوي المركب لاحقتها $z=x+iy$

لدينا M من المجموعة (E) معناه ان : $\left|z^2\right|-\left(z-\overline{z}\right)-2=0$

ومنه $x^2+y^2-2x-2=0$ أي $(x-1)^2+y^2=3$ وبالتالي مجموعة النقط (E)

هي عبارة عن الدائرة التي مركزها النقطة $\Omega(1;0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}\,u.m$

المتتاليات العددية

التمرين الثاني:

1) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $0<u_n<2$:

- من اجل $n=1$ لدينا $u_1=\frac{1}{2}$ ومنه $0<u_1<2$ وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n=1$
- نفرض ان $0<u_n<2$ محققة من أجل العدد الطبيعي n ونبرهن ان $0<u_{n+1}<2$ محققةكذلك

لنا $0<u_n<2$ ومنه $3<u_n+3<5$ ومنه $\frac{1}{5}<\frac{1}{u_n+3}<\frac{1}{3}$ ومنه $-\frac{5}{3}<-\frac{5}{u_n+3}<-1$

ومنه $3-\frac{5}{3}<3-\frac{5}{u_n+3}<3-1$ ومنه $\frac{4}{3}<\frac{3u_n+4}{u_n+3}<2$ أي $0<\frac{3u_n+4}{u_n+3}<2$

أي $0<u_{n+1}<2$ ومنه الخاصية $0<u_{n+1}<2$ محققة من أجل العدد الطبيعي n.

- نستنتج مما سبق ان الخاصية $0<u_n<2$ محققة اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) :

$u_{n+1}-u_n=\frac{(2-u_n)(2+u_n)}{u_n+3}>0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3) تبرير ان المتتالية (u_n) متقاربة:

بمان (u_n) متتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي اذن متقاربة

4) أ) كتابة $5v_{n+1}$ بدلالة v_n ثم استنتاج طبيعة المتتالية (v_n) :

لدينا من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $5v_{n+1}=\frac{15u_{n+1}+20}{u_{n+1}+3}=\frac{5u_n-10}{5u_n+10}=\frac{u_n-2}{u_n+2}=v_n$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية اساسها $q=\frac{1}{5}$ وحدها الاول

$$v_0=\frac{u_0-2}{u_0+2}=\frac{-1-2}{-1+2}=-3$$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n : $v_n=-3\left(\frac{1}{5}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ بالتعويض نجد

$u_n=\frac{-2v_n-2}{v_n-1}=\frac{2\left(5^n\right)-6}{5^n+3}$, $n\in\mathbb{N}$.

ج) استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\left(5^n\right)-6}{5^n+3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\left(5^n\right)}{5^n+3}=2$.

4

الاحتمالات	**التمرين الثالث :**		04

التمرين الثالث :

1) حساب احتمال الحدثين A ، B :

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_4^2}{C_7^2}=\frac{3}{7} \quad ، \quad P(B)=\frac{C_2^1\times C_3^1+C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{3}$$

2) حساب احتمال $P(A\cap B)$ ، و هل الحدثين A ، B مستقلين:

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_1^1+C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{7}$$

لدينا: $P(A)\times P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$

اذن : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ أي الحدثين A ، B مستقلين

3) أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :

$$X\in\{\ 2\,;4\,;6;\,8;10\}$$

ب) اعطاء قانون احتمال للمتغير العشوائي X :

$$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}$$

$$P(X=4)=\frac{C_3^1\times C_2^1}{C_7^2}=\frac{6}{21}$$

$$P(X=6)=\frac{7}{21}$$

$$P(X=8)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_7^2}=\frac{4}{21}$$

$$P(X=10)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$$

x_i	2	4	6	8	10
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$

ب) حساب $E(X)$ ، $\sigma(X)$ للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_iP(X=x_i)=(2)\left(\frac{3}{21}\right)+(4)\left(\frac{6}{21}\right)+(6)\left(\frac{7}{21}\right)+(8)\left(\frac{4}{21}\right)+(10)\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{38}{7}$$

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^2P(X=x_i)-(E(X))^2$$

$$=(2)^2\left(\frac{3}{21}\right)+(4)^2\left(\frac{6}{21}\right)+(6)^2\left(\frac{7}{21}\right)+(8)^2\left(\frac{4}{21}\right)+(10)^2\left(\frac{1}{21}\right)-\left(\frac{38}{7}\right)^2$$

$$=\frac{680}{147}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{680}{147}}\approx 2.15$$

الدوال العددية			07

التمرين الرابع:

I)

1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: نجد $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ) إثبات أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=0$.

إذن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D) : لدينا : $d(x)=f(x)-(x-2)=\dfrac{8}{e^x+2}$

بما انه من اجل كل x من $[-4;+\infty[$: $0<\dfrac{8}{e^x+2}$ أي : $0<d(x)$

أي ان (C_f) يقع فوق المستقيم (D).

3) أ) حساب $f'(x)$: $f'(x)=1-\dfrac{8e^x}{\left(e^x+2\right)^2}=\dfrac{\left(e^x-2\right)^2}{\left(e^x+2\right)^2}=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على $[-4;+\infty[$ وتشكيل جدول تغيراتها :

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا من اجل كل x من $[-4;+\infty[$ $\left(e^x+2\right)^2>0$ و $\left(e^x-2\right)^2\geq 0$ ومنه $f'(x)\geq 0$

و لدينا $f'(x)=0$ يكافئ ان $\left(e^x-2\right)^2=0$ يكافئ ان $e^x-2=0$ يكافئ ان $x=\ln 2$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	-4		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-2-\dfrac{4}{2e^4+1}$	↗			$+\infty$

ج) استنتاج ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف مع تحديد احداثييها:

بما ان $f'(x)$ تنعدم من اجل القيمة $\ln 2$ ولا تغير اشارتها عند القيمة $\ln 2$ فان النقطة $\Omega(\ln 2;\ln 2)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

د) تبيين ان (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:

$-1.7<\alpha<-1.6$

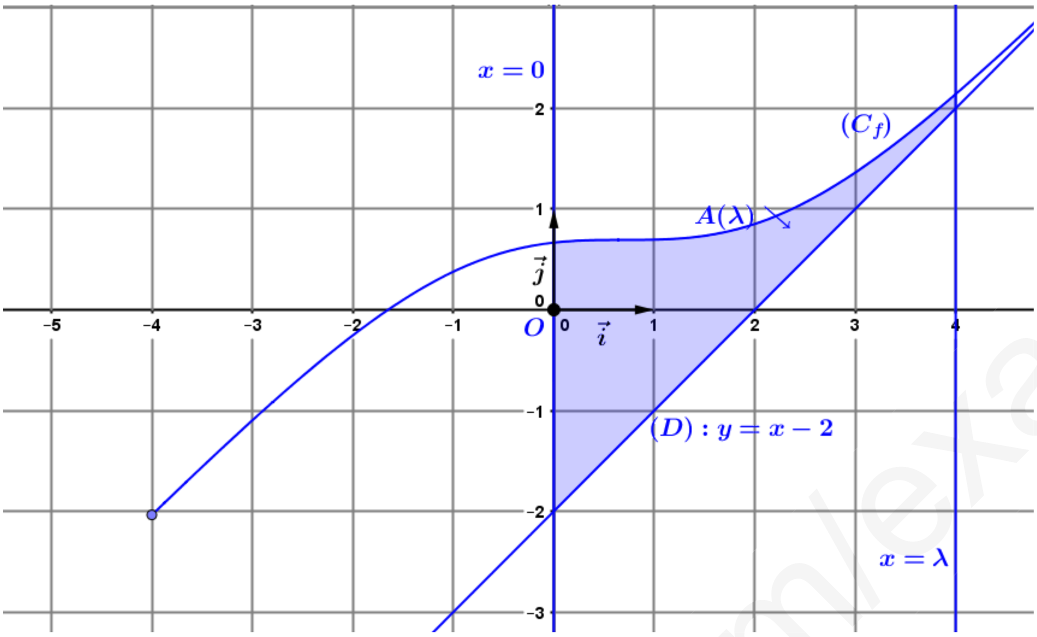
لدينا دالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[-4;+\infty[$ و $f(-1.7)\times f(-1.6)<0$ إذن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث :

$-1.7<\alpha<-1.6$

أي ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α .

4) إنشاء $\left(C_f\right)$ و $\left(D\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$:



II) 1) ايجاد الدوال الاصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على المجال $\left[-4;+\infty\right[$:

الدالة $x\mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ معرفة ومستمرة على المجال $\left[-4;+\infty\right[$ فهي تقبل دوال اصلية .

نضع $u(x)=e^x+2$ ومنه $u'(x)=e^x$ ومنه نجد ان الدالة $x\mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ مكتوبة على

الشكل $x\mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ اي ان مجموعة الدوال الاصلية للدالة $x\mapsto \dfrac{e^x}{e^x+2}$ على المجال

$\left[-4;+\infty\right[$ هي: $k\in\mathbb{R}$; $x\mapsto \ln\left(e^x+2\right)+k$.

2) حساب المساحة $A\left(\lambda\right)$:

$$A\left(\lambda\right)=2\times 2\left[\int_0^{\lambda}\left(\left(x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}\right)-\left(x-2\right)\right)dx\right]=8\left[\int_0^{\lambda}\left(4-\frac{4e^x}{e^x+2}\right)dx\right]$$

$$=8\left[4x-4\ln(e^x+2)\right]_0^{\lambda}=8\left(4\lambda-4\ln(e^{\lambda}+2)+4\ln 3\right)cm^2$$

3) حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A\left(\lambda\right)$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}8\left(4\lambda-4\ln(e^{\lambda}+2)+4\ln 3\right)=+\infty$$

الدوال العددية و الحساب التكاملي

07

الأعداد المركبة	**تصحيح الموضوع الثاني:** **التمرين الأول:** I) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة $z^2=3z-9$: المعادلة $z^2=3z-9$ تكافيء $z^2-3z+9=0$ ومنه $\Delta=(-3)^2-4\times(1)(9)=-27$ ومنه نجد $S=\left\{\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$. II) 1) حساب $\|z_A\|,\|z_B\|$: $\|z_A\|=\left\|3e^{i\frac{\pi}{6}}\right\|=3$ ، $\|z_B\|=\|\overline{z_A}\|=3$. لدينا $\|z_A\|=OA=3$ وأيضا $\|z_B\|=OB=3$ اذن نستنتج أن النقطتين A و B تنتميان للدائرة ذات المركز O ونصف القطر R=3. 2) أ) تحديد طبيعة التحويل T: لنا العبارة المركبة لهذا الدوران هي $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ وهي من الشكل $z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_O)$ وحسب الدرس يتضح ان هذه العبارة هي لدوران مركزه النقطة O وزاويته $\theta=\frac{2\pi}{3}$. ب) تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة A بالتحويل T: C صورة A بالتحويل T معناه $z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times\left(3e^{i\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ 3) أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الأسي: لنا $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)}{\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}i=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي S الذي يحول C الى B مع ذكر عناصره المميزة: لنا $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $z_B-z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_A)$ وهو من الشكل $z'-z_\Omega=re^{i\theta}(z-z_\Omega)$ أي ان النقطة B هي صورة C بتشابه مباشر وعليه نستنتج ان S هو التشابه المباشر الذي نسبته $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومركزه النقطة A وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$.		04

المتتاليات العددية — 04

التمرين الثاني:

1) حساب الحدود u_1 ، u_2 :

$u_1=\sqrt{u_0^{\,2}+2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$ ، $u_2=\sqrt{u_1^{\,2}+2}=\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$

2) تبيين ان المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية:

$\sqrt{5}\neq 3$ أي $u_2u_0\neq u_1^{\,2}$ اذن المتتالية (u_n) ليست هندسية خاصية الوسط الهندسي غير محققة

$1+\sqrt{5}\neq 2\sqrt{3}$ أي $u_0+u_2\neq 2u_1$ اذن المتتالية (u_n) ليست حسابية الوسط الحسابي غير محقق

3)

أ) اثبات ان المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2 و حساب حدها الاول v_0:

لدينا من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=u_{n+1}^2+3=(u_n^2+3)+2=v_n+2$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية حسابيةاساسها $r=2$ وحدها الاول $v_0=u_0^2+3=1+3=4$

ب) كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n :

لنا $v_n=2n+4\ ,\ n\in\mathbb{N}$ ومنه $u_n=\sqrt{v_n-3}=\sqrt{2n+1},\ n\in\mathbb{N}$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{2n+1}=+\infty$$

4) كتابة بدلالة n المجموعيين S ، S' :

نجد $S=v_0+v_1+\dots+v_n$ ومنه $S=(n+1)(n+4)$

أيضا $S'=u_0^2+u_1^2+\dots+u_n^2$ ومنه $S'=S-3(n+1)=(n+1)^2$.

الهندسة الفضائية — 04

التمرين الثالث:

1) تبيين أن النقط A,B و C تشكل مستو:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ و لنا : $\dfrac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}}\neq\dfrac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}$

إذن فان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي النقاط A,B و C تشكل مستو

2)

أ) تبيين ان المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC):

لدينا :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=(1)(2)+(-1)(-1)+(-1)(3)=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=(2)(2)+(-5)(-1)+(-3)(3)=0\end{cases}$$

اذن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) لان شعاع توجيهه يعامد شعاعي توجيهه.

ب) استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

بما أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) فان الشعاع $\vec{u}(2;-1;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ومنه نجد : $2x-y+3z+d=0$

$A\in(ABC)$: $-2(0)-3(4)+3(1)+d=0$ اذن : $d=4$

و بالتالي : $(ABC):2x-y+3z+4=0$

3)

أ) تبيين ان المستويين (P) و (P') متقاطعين وفق مستقيم (D') :

لدينا: المستقيم (D') معرف بتمثيله الوسيطي : $t \in \mathbb{R}$ ......
$$\begin{cases} x=-2-4t & ....(1) \\ y=t & ......(2) \\ z=2+3t & ....(3) \end{cases}$$

و المستويين (P) و (P') معرفين بمعادلتهما :

$$(P): x+y+z=0.......(4) \qquad (P'): x+4y+2=0.......(5)$$

بتعويض (1) و (2) و(3) في (4) و (5) على التوالي نجد :

$$(-2-4t)+(t)+(2+3t)=0 \text{ و } (-2-4t)+4(t)+2=0$$

اذن : $(P)\cap(P')=(D')$.

ب) دراسة الوضع النسبي بين المستوي (ABC) والمستقيم (D') :

لدينا : $\vec{u}_{(D')} \cdot \vec{cn}_{ABC} = (2)(-4)+(-1)(1)+(3)(3)=0$ و $A \notin (D')$ و $B \notin (D')$ اذن : $(D')\parallel(ABC)$.

التمرين الرابع:

I)

1) دراسة تغيرات الدالة g على $]0;+\infty[$:

أ) النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$:

حساب $g'(x)$: $g'(x)=\dfrac{-x}{(x+1)^2}$

دراسة إشارة $g'(x)$: لدينا من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $(x+1)^2>0$

ومنه إشارة $g'(x)$ تعتمد على إشارة البسط x- لدينا من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $-x\leq 0$

وبالتالي : من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\leq 0$

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	0 $-$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0 $+\infty$
$g(x)$	0 $-$

الدوال العددية

08

(II (1 أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$

ب) التفسير الهندسي :

$\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين معادلتيهما $y=0$ و $y=1$

(2 أ) تبيين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{-x}g(e^{x})$:

$$f'(x)=(e^{-x}\ln(e^{x}+1))'=e^{-x}\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\ln(e^{x}+1)\right)=e^{-x}g(e^{x})$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}>0$

و لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{x}>0$

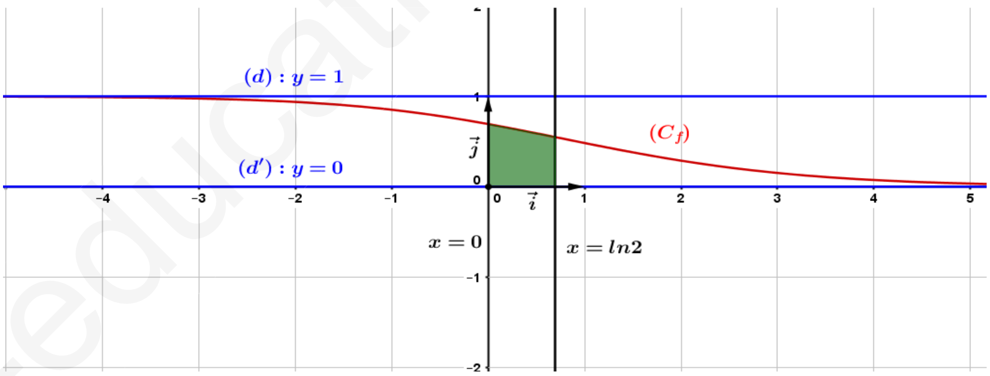
وبما أن $g(x)$ سالبة على المجال $[0;+\infty[$ فان $g\left(e^{x}\right)<0$

وبالتالي : من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)<0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

3) إنشاء $\left(C_f\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$:



(4 أ) تبيين أن الدالة $F(x)=x-\left(e^{-x}+1\right)\ln\left(e^{x}+1\right)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$F'(x)=\left(x-(e^{-x}+1)\ln\left(e^{x}+1\right)\right)'=e^{-x}\ln\left(e^{x}+1\right)=f(x)$$

ومنه الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) حساب بـ cm^2 المساحة A:

$$A=1\times1\left[\int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}\ln\left(e^{x}+1\right)\right)dx\right]=\left[x-\left(e^{-x}+1\right)\ln\left(x+1\right)\right]_0^{\ln 2}\approx 0.43\,cm^2$$

لوطاية في 2019/05/23

الدوال الأصلية وحساب المساحات