المسألة رقم 03 :

لتكن الدالتين f و g المعرفتين على D_f و D_g على الترتيب كما يلي :

$$f(x)=\frac{-x+3}{x-2} \quad \text{و} \quad g(x)=\sqrt{x-2}-1$$

و ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f و (C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين كلا من D_f و D_g مجموعتي تعريف كلا من الدالتين f و g على الترتيب .

2) أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد من D_f :

$$f(x)=a+\frac{b}{x-2}$$

ب- فكك الدالة f إلى مركب دالتين u و v يطلب تعيينهما .

جـ- حدد إتجاه تغير كلا من u و v ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين

$]-\infty,2[$ و $]2,+\infty[$.

د- بين أنه يمكن الحصول على المنحنى (C_f) إنطلاقا من المنحنى البياني (H) الممثل

للدالة مقلوب ($x\mapsto\frac{1}{x}$)

بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

هـ- لتكن $\Omega(2;-1)$ نقطة من المستوي .

عين دساتير تغيير المعلم ثم أوجد معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$. ماذا تستنتج

بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

3) أ- فكك الدالة g إلى مركب دالتين φ و ψ يطلب تعيينهما .

ب- عين إتجاه تغير الدالة g على المجال $[2,+\infty[$

جـــ- بين أنه يمكن الحصول على المنحنى (C_g) إنطلاقا المنحنى البياني الممثل للدالة

الجذر التربيعي ($x \mapsto \sqrt{x}$)

بتحويل نقطي يطلب تعيينه ثم أنشئ المنحنى (C_g) .

4) حل بيانيا المعادلة : $f(x)=g(x)$

حل مقترح :

1) تعيين كلا من D_f و D_g مجموعتي تعريف كلا من الدالتين f و g على الترتيب :

f معرفة إذا و فقط إذا كان $x-2\neq 0$ أي $x\neq 2$ و منه نجد : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

g معرفة إذا و فقط إذا كان $x-2\geq 0$ أي $x\geq 2$ و منه نجد : $D_g=[2,+\infty[$

2) أ- تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد من D_f :

$$f(x)=a+\frac{b}{x-2}$$

طريقة 1) : بتوحيد المقامات نجد $f(x)=\frac{ax-2a+b}{x-2}$ و بالمطابقة مع العبارة

$f(x)=\frac{-x+3}{x-2}$ نتحصل على : $\begin{cases}a=-1\\ -2a+b=3\end{cases}$ و منه نجد : $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$ ، إذن يكون :

$$f(x)=-1+\frac{1}{x-2}$$

طريقة 2) : بكتابة $f(x)=\frac{-x+3}{x-2}=\frac{-x+2+1}{x-2}$ أي $f(x)=\frac{-x+2}{x-2}+\frac{1}{x-2}$ أي

$f(x)=\frac{-(x-2)}{x-2}+\frac{1}{x-2}$ و من أجل كل $x\neq 2$ نتحصل على : $f(x)=-1+\frac{1}{x-2}$

ب- تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين u و v يطلب تعيينهما :

من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ لدينا :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & x-2 \arrow[r, "v"] & -1+\dfrac{1}{x-2} \end{tikzcd}$$

بحيث : $f = v \circ u$ $\quad u(x) = x-2$ و $v(x) = -1+\dfrac{1}{x}$

جــ- تحديد إتجاه تغير كلا من u و v ثم إستنتاج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty, 2[$ و $]2, +\infty[$

- على المجال $]-\infty, 2[$:

u دالة تآلفية متزايدة تماما $\mathbb{R}$ و بالأخص فهي متزايدة تماما على المجال $]-\infty, 2[$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty, 2[$ فإن : $x \prec 2$ و منه $x-2 \prec 0$ و منه $u(x) \prec 0$ أي $u(x) \in]-\infty, 0[$.

للدالتين v و الدالة مقلوب $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ نفس إتجاه التغير على المجال $]-\infty, 0[$ و بما أن الدالة مقلوب متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0[$ فإن v متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 0[$.

نتيجة : للدالتين u و v إتجاها تغير متعاكسين و منه فالدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, 2[$.

- على المجال $]2, +\infty[$:

u دالة تآلفية متزايدة تماما $\mathbb{R}$ و بالأخص فهي متزايدة تماما على المجال $]2, +\infty[$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2, +\infty[$ فإن : $x \succ 2$ و منه $x-2 \succ 0$ و منه $u(x) \succ 0$ أي $u(x) \in]0, +\infty[$.

للدالتين v و الدالة مقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ نفس إتجاه التغير على المجال $]0,+\infty[$ و بما أن الدالة مقلوب متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$ فإن v متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

نتيجة : للدالتين u و v إتجاها تغير متعاكسين و منه فالدالة f متناقصة تماما على المجال $]2,+\infty[$.

د- نبين أنه يمكن الحصول على المنحنى (C_f) إنطلاقا من المنحنى البياني (H) الممثل للدالة مقلوب : $x \mapsto \frac{1}{x}$

بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ثم إنشاء المنحنى (C_f) :

$f(x) = -1 + \frac{1}{x-2}$ و منه $f(x) = k(x-2) - 1$ أي أن الدالة f تكتب من الشكل :

$f(x) = k(x+a) + b$ بحيث : $k(x) = \frac{1}{x}$ (دالة المقلوب) و $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ و منه يكون :

$\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

نتيجة : (C_f) هو صورة (H) التمثيل البياني للدالة مقلوب بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

هـ- لتكن $\Omega(2;-1)$ نقطة من المستوي .

تعيين دساتير تغيير المعلم ثم إيجاد معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

بما أن $\Omega(2;-1)$ فإن : $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$ دساتير تغيير المعلم .

كتابة معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$: معادلة (C_f) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ هي :

$$y=-1+\frac{1}{x-2}$$

و منه نتحصل على : $Y-1=-1+\dfrac{1}{X+2-2}$ أي $Y=\dfrac{1}{X}$ و هي معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$.

نضع : من أجل كل عدد حقيقي $X\in\mathbb{R}^*$: $g(X)=\dfrac{1}{X}$ و نبين أن g دالة فردية .

من أجل كل $X\in\mathbb{R}^*$ معناه $X\neq 0$ و منه يكون $-X\neq 0$ أي $-X\in\mathbb{R}^*$ (المجموعة $\mathbb{R}^*$ متناظرة)

و من جهة أخرى : من أجل $X\in\mathbb{R}^*$ فإن : $g(-X)=\dfrac{1}{-X}=-\dfrac{1}{X}=-g(X)$ و منه g دالة فردية .

<u>الإستنتاج</u> : المنحنى البياني (C_f) يقبل مركز تناظر و هو النقطة $\Omega(2;-1)$.

3) أ- تفكيك الدالة g إلى مركب دالتين φ و ψ يطلب تعيينهما :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & x-2 \arrow[r, "\psi"] & \sqrt{x-2}-1 \end{tikzcd}$$

$g=\psi\circ\varphi$ بحيث : $\varphi(x)=x-2$ و $\psi(x)=\sqrt{x}-2$

ب- تعيين إتجاه تغير الدالة g على المجال $[2,+\infty[$:

φ دالة تآلفية متزايدة تماما $\mathbb{R}$ و بالأخص فهي متزايدة تماما على المجال $[2,+\infty[$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[2,+\infty[$ فإن : $x\geq 2$ و منه $x-2\geq 0$ أي $\varphi(x)\geq 0$ معناه $\varphi(x)\in[0,+\infty[$.

للدالة ψ و الدالة الجذر التربيعي $x \mapsto \sqrt{x}$ نفس إتجاه التغير و بما أن الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ فإن ψ متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$.

نتيجة : للدالتين φ و ψ نفس إتجاه التغير و منه فالدالة g متزايدة تماما على المجال $[2,+\infty[$.

جـ- نبين أنه يمكن الحصول على المنحنى (C_g) إنطلاقا المنحنى البياني الممثل للدالة الجذر التربيعي ($x \mapsto \sqrt{x}$)

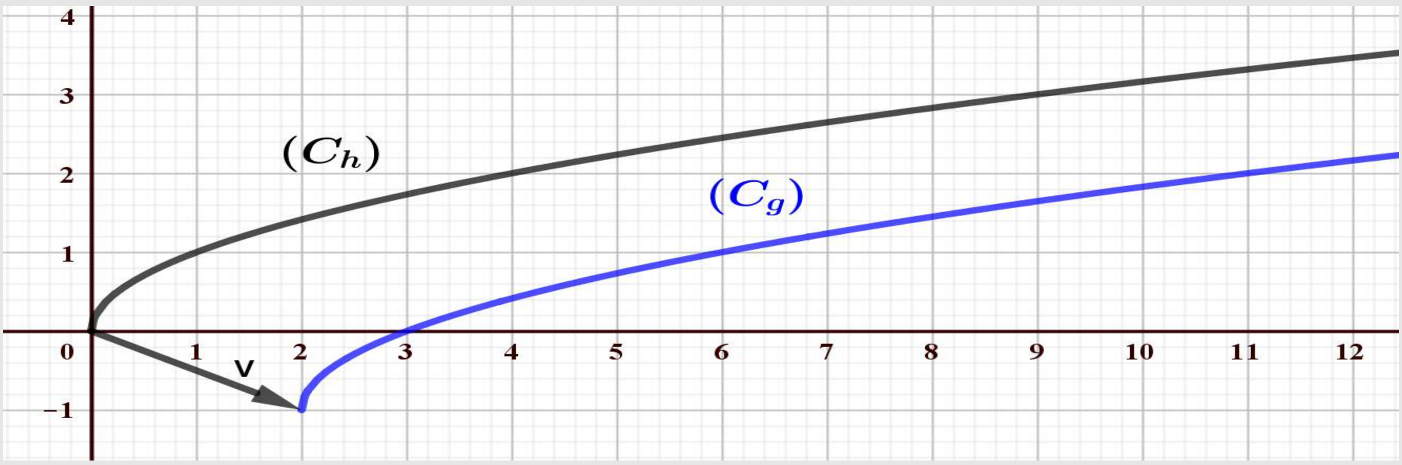
بتحويل نقطي يطلب تعيينه ثم إنشاء المنحنى (C_g) :

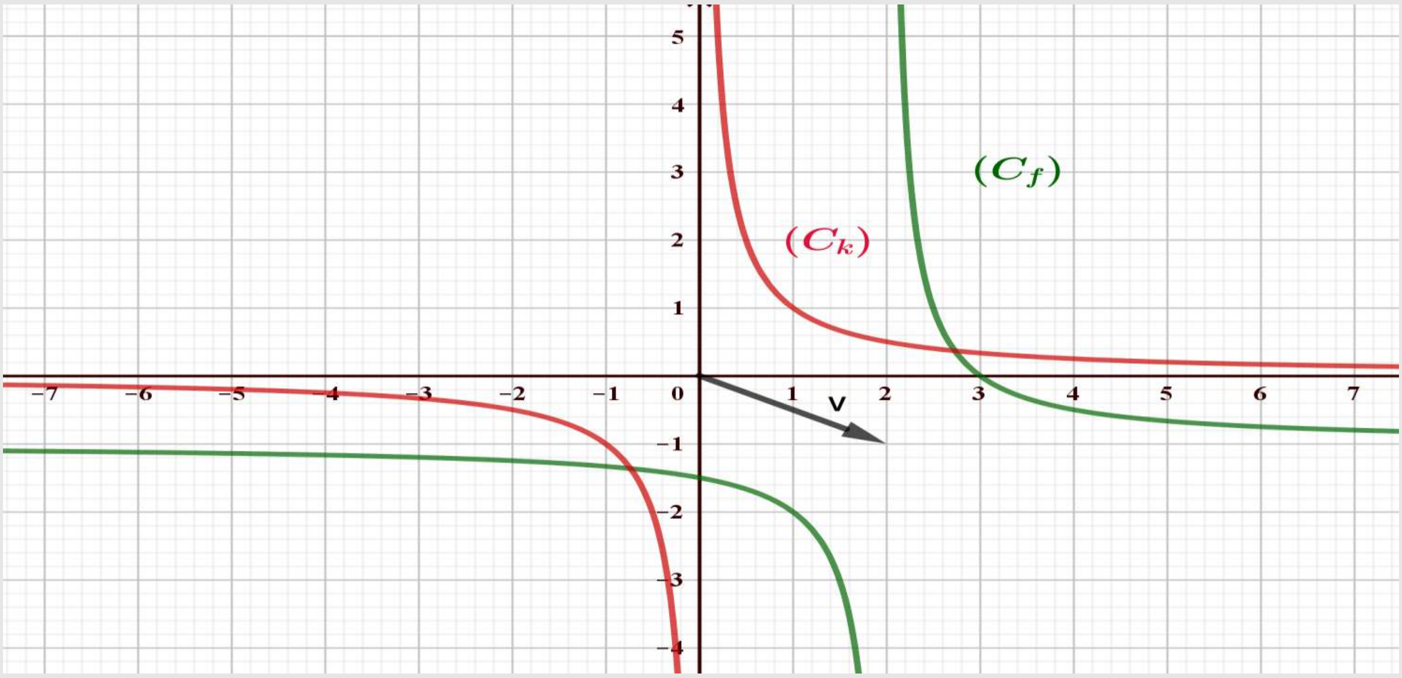
$g(x)=\sqrt{x-2}-1$ و منه $g(x)=h(x-2)-1$ أي أن الدالة g تكتب من الشكل :

$g(x)=h(x+a)+b$ بحيث : $h(x)=\sqrt{x}$ (دالة الجذر التربيعي) و $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$ و منه

يكون : $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

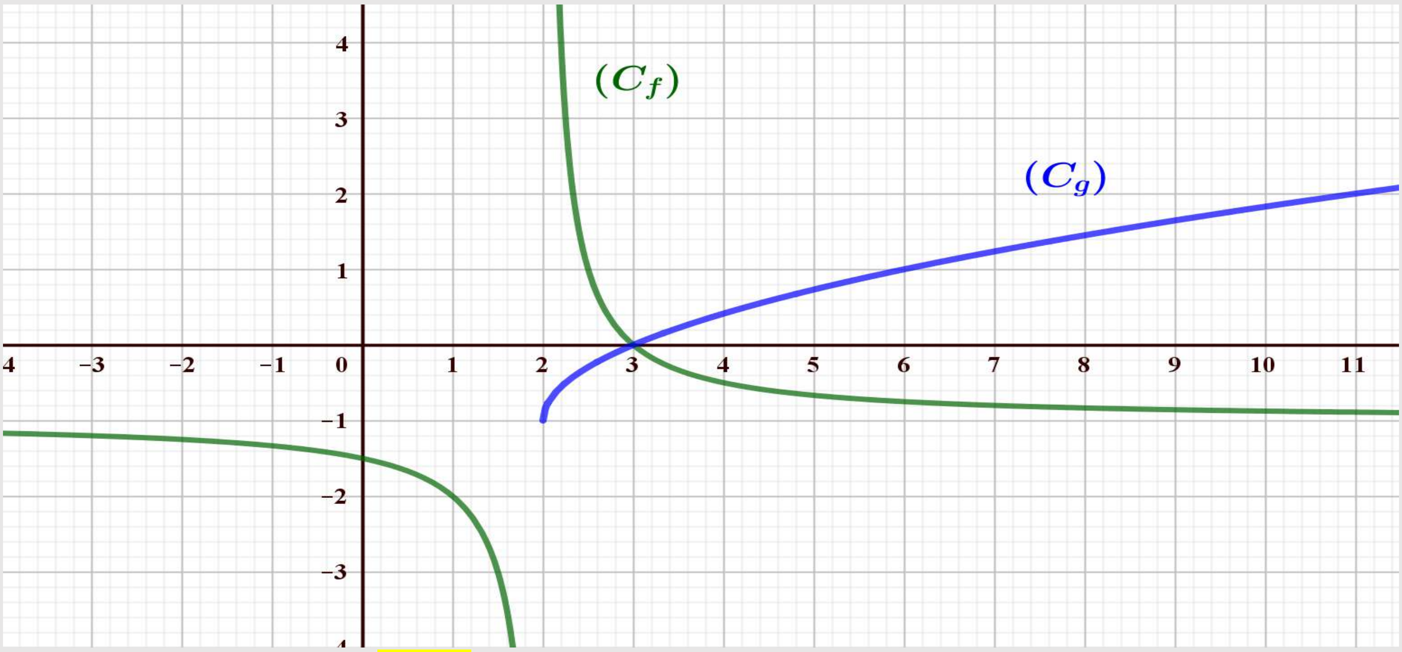
نتيجة : (C_g) هو صورة (C_h) التمثيل البياني للدالة الجذر التربيعي بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.





حل بيانيا المعادلة : $f(x)=g(x)$

نبحث عن فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المنحنى (C_g) :



يتقاطع المنحنيان (C_f) و (C_g) في النقطة التي فاصلتها $x=3$ و منه يتقاطع المنحنيان في النقطة $(3;0)$.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح ...

<ins>الأستاذ</ins> : حناش نبيل