تمارين محلولة في الاحتمالات -1-

تمرين1:

الجزءين 1 و 2 من التمرين يمكن معالجة كل منهما على حدة. تعطى النتائج على شكل كسور.

اقتطع 16 مسافرا تذاكر في المحطة A بحيث:

7 منهم يتوجهون إلى المحطة B (بسعر 50 دينار للتذكرة الواحدة).

5 منهم يتوجهون إلى المحطة C (بسعر 60 دينار للتذكرة الواحدة).

4 منهم يتوجهون إلى المحطة D (بسعر 75 دينار للتذكرة الواحدة).

1. نختار عشوائيا واحدا من هؤلاء المسافرين.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مسافر سعر تذكرته بالدينار.

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.
ب) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

2. نختار عشوائيا ثلاثة من هؤلاء المسافرين.

أ) احسب احتمال أن يكون لهؤلاء المسافرين اتجاهات مختلفة.
ب) احسب احتمال أن يكون اتجاه مسافر واحد على الأقل هو نحو المحطة B.
ج) ما هو احتمال أن يكون اتجاه المسافرين الثلاثة هو المحطة B، علما أنّهم مسافرين في نفس الاتجاه.

حلّ:1

1. لدينا X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل مسافر سعر تذكرته بالدينار.

أ) تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

7 مسافرين من بين 16 يتجهون إلى المحطة B حيث سعر التذكرة هو 50 دينار.

إذن: $p(X=50)=\frac{7}{16}$.

5 مسافرين من بين 16 يتجهون إلى المحطة C حيث سعر التذكرة هو 60 دينار.

إذن: $p(X=60)=\frac{5}{16}$.

4 مسافرين من بين 16 يتجهون إلى المحطة D حيث سعر التذكرة هو 75 دينار.

إذن: $p(X=75)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

ومنه قانون الاحتمال للمتغير X هو:

x_i	50	60	75
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.
يعطى الأمل الرياضياتي بالعلاقة:

$$E(X)=50\times p(X=50)+60\times p(X=60)+75\times p(X=75)=\frac{475}{8}$$

إذن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو $\frac{475}{8}=59,375$

2. نختار عشوائيا ثلاثة من هؤلاء المسافرين.
أ) حساب احتمال أن يكون لهؤلاء المسافرين اتجاهات مختلفة.
لدينا $\binom{16}{3}=560$ طريقة عشوائية لاختيار ثلاثة من هؤلاء المسافرين.

ولتكن V الحادثة " للمسافرين الثلاثة اتجاهات مختلفة " لدينا إذن: $p(V)=\frac{\binom{7}{1}\times\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{16}{3}}=\frac{1}{4}$

ب)حساب احتمال أن يكون اتجاه مسافر واحد على الأقل هو نحو المحطة B.
نعتبر الحادثة W وهي: " لا أحد من المسافرين الثلاثة متجه نحو المحطة B "

عندئذ تكون الحادثة النافية لها وهي $\overline{W}$: " يكون اتجاه مسافر واحد على الأقل هو نحو المحطة B "

نعلم أنّ 9 مسافرين لهم اتجاه غير المحطة B، ومنه $p(W)=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{16}{3}}=\frac{3}{20}$.

ومنه $p(\overline{W})=1-p(W)=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$

إذن احتمال أن يكون اتجاه مسافر واحد على الأقل هو نحو المحطة B هو: $p(\overline{W})=\frac{17}{20}$.

ج) حساب احتمال أن يكون اتجاه المسافرين الثلاثة هو المحطة B، علما أنّهم مسافرين في نفس الاتجاه.

* نحسب أوّلا الاحتمال $p(E)$ للحادثة E : " يكون للمسافرين الثلاثة نفس الاتجاه ".
أي المحطة B أو المحطة C أو المحطة D. وهي أحداث غير متلائمة ومنه:

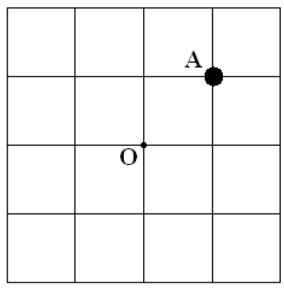
$$p(E)=\frac{\binom{7}{3}}{\binom{16}{3}}+\frac{\binom{5}{3}}{\binom{16}{3}}+\frac{\binom{4}{3}}{\binom{16}{3}}=\frac{7}{80}$$

* نحسب ثانيا الاحتمال $p(F)$ للحادثة F : " يكون اتجاه المسافرين الثلاثة هو المحطة B "

$$p(F)=\frac{\binom{7}{3}}{\binom{16}{3}}=\frac{35}{560}=\frac{1}{16}$$

الحادثة " احتمال أن يكون اتجاه المسافرين الثلاثة هو المحطة B، علما أنّهم مسافرين في نفس الاتجاه"
توافق الاحتمال الشرطي $p_E(F)$. بالحساب نجد: $p_E(F)=\frac{p(F\cap E)}{p(E)}=\frac{p(F)}{p(E)}=\frac{5}{7}$.

تمرين 2:



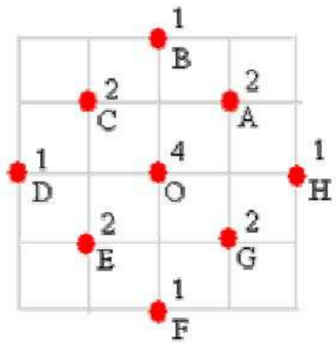
تتحرك نقطة على خطوط شبكة تتكون من 16 خانة متساوية البعدين. نسمي " قفزة " لهذه النقطة كل تحرك لها على أحد بعدي خانات هذه الشبكة. يمكن لهذه القفزة أن تكون نحو الأعلى أو نحو الأسفل أو نحو اليمين أو نحو اليسار. نفرض أنّ تحرك هذه النقطة في الاتجاهات الأربعة له نفس الاحتمال. وأنّها تنطلق من المبدأ O ، وتنجز قفزتين متتابعتين. فإذا قفزت نحو اليمين ثمّ نحو الأعلى صارت في الموضع A.

1. علّم كل المَوَاضِع التي يمكن لهذه النقطة أن تصل إليها بعد قفزتين.
عدِّد، بالنسبة إلى كل موضع، عدد الطرق التي تصل بها النقطة إلى هذا الموضع.

2. احسب احتمال الحادثة " موضع النقطة بعد قفزتين هو المبدأ O "

حلّ-2-:

1. المواضع التي يمكن للنقطة الوصول إليها موضحة في المخطط الآتي:



عدد الطرق التي تصل بها النقطة إلى كل موضع مسجل بجانب الموضع في المخطط أعلاه. مجموع هذه الطرق هو 16.

2. حساب احتمال الحادثة " موضع النقطة بعد قفزتين هو المبدأ O "
من بين 16 طريقة مختلفة هناك 4 طرق توافق الحادثة المطلوب حساب احتمالها، منه احتمال تحقق هذه الحادثة هو: $\frac{1}{4}=\frac{4}{16}$.

تمرين 3:

دلت دراسة إحصائية على أنّ 95% من أجهزة الغسالات التي تصنعها مؤسسة صناعية هي في حالة تشغيل . تم إخضاع هذه غسالات هذه المؤسسة إلى اختبار مراقبة، فكانت النتائج كما يأتي:

- عندما تكون الغسالة في حالة تشغيل، فهي مقبولة بنسبة 96 % عند نهاية الاختبار.
- عندما لا تكون الغسالة في حالة تشغيل، فهي مقبولة بنسبة 8 % عند نهاية الاختبار.

نختار عشوائيا غسالة من الغسالات التي تصنعها هذه المؤسسة. ونعرف الأحداث الآتية:

الحدث F : " الغسالة في حالة اشتغال "

الحدث T: "الغسالة مقبولة في نهاية الاختبار"

الحدث $\overline{T}$: "الغسالة مرفوضة عند نهاية الاختبار "

نرمز بالرمز (A/B) للحادثة "A علما B ". وهكذا يكون احتمال الحادثة F هو P(F) = 0,95 ويكون احتمال الحادثة (T/F) هو $p_F(T)=0,96$.

1. ما هو احتمال أن لا تكون الغسالة في حالة اشتغال؟
2. أ) ما هو احتمال أن ترفض الغسالة في نهاية الاختبار، علما أنّها في حالة اشتغال.
ب) ما هو احتمال أن ترفض الغسالة في نهاية الاختبار و هي في حالة اشتغال.

جـ) ما هو احتمال أن ترفض الغسالة في نهاية الاختبار و هي ليست في حالة اشتغال.

3. احسب احتمال أن ترفض الغسالة عند نهاية الاختبار.
4. تم رفض غسالة في نهاية الاختبار، ما هو احتمال أن تكون هذه الأخير في حالة اشتغال؟

حلّ -3-:

نعبر أوّلا عن معطيات المسألة بمصطلحات الاحتمالات.

- ❖ عندما تكون غسالة في حالة اشتغال، فهي مقبولة بنسبة من الحالات. وهذا يعني أنّ احتمال الحادثة (T/F) هو 0,96 أي $p_F(T)=0,96$.
- ❖ عندما لا تكون غسالة في حالة اشتغال، فهي مقبولة بنسبة من الحالات. وهذا يعني أنّ احتمال الحادثة $(T/\overline{F})$ هو 0,08 أي $p_{\overline{F}}(T)=0,08$. ومنه نستنتج أنّ احتمال الحادثة $(T/\overline{F})$ هو 0,92 أي $p_{\overline{F}}(\overline{T})=0,92$.
- ❖ نعلم أيضا أنّ .

1.احتمال أن لا تكون الغسالة في حالة اشتغال هو $p(\overline{F})$، حيث $p(\overline{F})=1-p(F)=0,05$.

2.أ) احتمال أن ترفض الغسالة في نهاية الاختبار، علما أنّها في حالة اشتغال هو:
المطلوب في هذا السؤال هو حساب احتمال الحادثة $(\overline{T}/F)$ أي حساب الاحتمال $p_F(\overline{T})$، ومنه

$$p_F(\overline{T})=1-p_F(T)=1-0,96=0,04$$

ب) احتمال أن ترفض الغسالة في نهاية الاختبار وهي في حالة اشتغال هو:

المطلوب في هذا السؤال هو حساب احتمال الحادثة $(\overline{T}\cap F)$ أي حساب الاحتمال $p(\overline{T}\cap F$، ومنه:

$$p(\overline{T}\cap F)=p_F(\overline{T})\times p(F)=0,04\times 0,95=0,038$$

جـ) احتمال أن ترفض الغسالة في نهاية الاختبار وهي ليست في حالة اشتغال هو:

المطلوب في هذا السؤال هو حساب احتمال الحادثة $(\overline{T}\cap\overline{F})$ أي حساب الاحتمال $p(\overline{T}\cap\overline{F})$، ومنه:

$$p(\overline{T}\cap\overline{F})=p_{\overline{F}}(\overline{T})\times p(\overline{F})=0,92\times 0,05=0,046$$

3.حساب احتمال أن ترفض الغسالة عند نهاية الاختبار.
حسب قانون الاحتمالات الكلية، لدينا: $p(\overline{T})=p(\overline{T}\cap F)+p(\overline{T}\cap\overline{F})$

ومنه $p(\overline{T})=0,038+0,046=0,084$.

4.تم رفض غسالة في نهاية الاختبار، ما هو احتمال أن تكون هذه الأخير في حالة اشتغال؟
المطلوب في هذا السؤال هو حساب احتمال الحادثة $(F/\overline{T})$ أي حساب الاحتمال $p_{\overline{T}}(F)$، ومنه نجد:
$$p_{\overline{T}}(F)=\frac{P(F\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}=\frac{0,038}{0,084}\approx 0,452.$$

تمرين 4:

الجزء الأوّل:

يحتوي وعاء على n كرة بيضاء (n عدد طبيعي) و 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء. نسحب منه عشوائيا كرتين في آن واحد.

1. ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين؟
2. نرمز بالرمز $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.

أ) أثبت أنّ : $P(n)=\frac{(n^2-n+26)}{(n+8)(n+7)}$.

ب) احسب $\lim_{n\to+\infty} P(n)$، فسّر النتيجة.

الجزء الثاني:

نعتبر في هذا الجزء أنّ $n = 4$.

1. احسب p(4).
2. نسمي سحبا كل سحب عشوائي لكرتين في آن واحد من هذا الوعاء.

يقوم لاعب بإنجاز سحبين مستقلين عن بعضهما بحيث يعيد إلى الوعاء الكرتين المسحوبتين منه في السحب الأوّل.

مقابل إجراء هذين السحبين يدفع اللاعب مقدما مبلغا قدره 30 دينارا، ومن أجل كل سحب يتحصل على 40 دينار إن كانت الكرتان من نفس اللون، ويتحصل على 5 دنانير فقط إن كانتا من لونين مختلفين.

نسمي ربحا لهذا اللاعب الفارق بين مجموع ما يتحصل عليه من السحبين والمبلغ الذي دفعه مقدما (يمكن أن يكون الربح موجبا أو سالبا).

نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبين مستقلين ربح هذا اللاعب.

أ) ما هي القيم الممكنة للمتغير X ؟

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير X .

ج) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X .

حل- 4 - ّ:

الجزء الأوّل:

1. حساب احتمال سحب كرتين من لون أبيض.

نعرّف الحادثة B : « سحب كرتين من لون أبيض »

مجموعة الإمكانيات هي توفيقات ذات كرتين من بين n+8 كرة، منه عدد الحالات الممكنة هو:

$$C_{n+8}^{2}=\frac{(n+8)(n+7)}{2}.$$

عدد الحالات المناسبة هو عدد التوفيقات ذات كرتين بيضاوين من بين n كرة بيضاء أي هو:

$$C_{n}^{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

منه $P(B)=\frac{C_{n}^{2}}{C_{n+8}^{2}}=\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}$.

2. أ) إثبات أنّ : $P(n)=\frac{(n^{2}-n+26)}{(n+8)(n+7)}$.

نعرّف الحادثتين R : « سحب كرتين حمراوين »

و V: « سحب كرتين خضراوين»

إذن لدينا: $P(R)=\frac{C_{5}^{2}}{C_{n+8}^{2}}=\frac{20}{(n+8)(n+7)}$

و $P(V)=\frac{C_{3}^{2}}{C_{n+8}^{2}}=\frac{6}{(n+8)(n+7)}$.

نعلم أنّ الأحداث B، R، V منفصلة عن بعضها مثنى مثنى،

ومنه ينتج:

$$P(n)=P(B)+P(R)+P(V)$$

أي $P(n)=\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}+\frac{20}{(n+8)(n+7)}+\frac{6}{(n+8)(n+7)}$

وبالتالي نجد: $P(n)=\dfrac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$ ....(1)

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$ و تفسير النتيجة.

بالحساب المباشر نجد: $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)=1$.

تفسّر هذه النتيجة على أنّه إذا كان عدد الكرات البيضاء كبير بما فيه كفاية، فإنّنا ننتظر أن تكون نتيجة السحب هي الحصول على كرتين بيضاوين. وأنّ هذه الحادثة هي شبه مؤكدة.

الجزء الثاني:

لدينا $n = 4$.

1. حساب $P(4)$.

يكفي لأجل هذا التعويض عن n بالعدد 4 في النتيجة (1) للسؤال 2 أ) من الجزء الأوّل

فنجد $P(4)=\dfrac{19}{66}$.

أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

- "X = 50" إذا تحصل اللاعب على كرتين من نفس اللون في كلا السحبين
(50 = -30 + 40 + 40)
- "X = 15" إذا تحصل اللاعب مرّة واحدة على كرتين من نفس اللون
(15 = -30 + 40 + 5)
- "X = -20" إذا تحصل اللاعب على كرتين من لونين مختلفين في كلا السحبين
(-20 = -30 + 5 + 5)

ب) تعيين قانون الاحتمال للمتغير X .

لدينا فرضا أن السحبين مستقلين عن بعضهما إذن ينتج:

❖ $P(X=50)=P(4)\times P(4)=\left(\dfrac{19}{66}\right)^2=\dfrac{361}{4356}$

❖ $P(X=15)=P(4)\times(1-P(4))+(1-P(4))\times P(4)$

ومنه $P(X=15)=2P(4)\times(1-P(4))=2\times\dfrac{19}{66}\times\dfrac{47}{66}=\dfrac{1786}{4356}$

❖ $P(X=20)=(1-P(4))^2$ ومنه: $P(X=20)=\left(\frac{47}{66}\right)^2=\frac{2209}{4356}$

ج) حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

لدينا: $E(X)=\sum_{k\in\{50,15,20\}} P(X=k)\times k$

ومنه بالتعويض نجد:

$$E(X)=50\times\frac{361}{4356}+15\times\frac{1786}{4356}+20\times\frac{2209}{4356}=\frac{5}{33}$$

تمرين 5:

نريد اختبار فعالية دواء على مجتمع معطى. ربع أفراد هذا المجتمع تمّ تطعيمهم بهذا الدواء.
أثناء تبيّن خلال فترة انتشار وباء معيّن أنّ من بين كل 10 مرضى مصابون بهذا الوباء واحد فقط منهم مطعّم، وتبيّن أيضا أنّ 1/9 الأفراد المطعّمين هم مرضى بهذا الوباء.

نختار عشوائيا شخصا واحدا من هذا المجتمع.

نرمز بالرمز M إلى الحادثة : « الشخص مريض » وبالرمز V إلى الحادثة : « الشخص مطعّم»

1.احسب $P(M\cap V)$، احتمال أن يكون الشخص المختار مريض ومطعّم. استنتج أنّ $P(M)=\frac{5}{18}$.

2.احسب الاحتمال $P(M\cap\overline{V})$. استنتج الاحتمال الشرطي $P_{\overline{V}}(M)$.

حلّ 5 :-

1. حساب الاحتمال $P(M\cap V)$ و استنتاج أنّ $P(M)=\frac{5}{18}$.

نبدأ بترجمة معطيات المسألة إلى لغة الاحتمالات.

- ربع أفراد المجتمع تمّ تطعيمهم بهذا الدواء، إذن: $P(V)=\frac{1}{4}$.
- من بين كل 10 مرضى مصابون بهذا الوباء واحد فقط منهم مطعّم،إذن $P_M(V)=\frac{1}{10}$.
- 1/9 الأفراد المطعّمين هم مرضى بهذا الوباء، إذن: $P_V(M)=\frac{1}{9}$.

لدينا من جهة، $P(V\cap M)=P(V)\times P_V(M)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$.

ولدينا من جهة أخرى، $P(V\cap M)=P_M(V)\times P(M)$،

منه نجد $\frac{5}{18}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{10}}=\frac{P(V\cap M)}{P_M(V)}=P(M)$.

2. حساب الاحتمال $P(M\cap\overline{V})$ و استنتاج الاحتمال الشرطي $P_{\overline{V}}(M)$.

لدينا: $P(M\cap\overline{V})=P_M(\overline{V})\times P(M)=(1-P_M(V))\times P(M)$

منه بالتعويض نجد $P(M\cap\overline{V})=\frac{9}{10}\times\frac{5}{18}=\frac{1}{4}$

ونستنتج أنّ $\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{P(M\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}=P_{\overline{V}}(M)$.

تمرين 7:

يقترح بائع مثلجات 10 نكهات مختلفة لمثلجاته. يقوم ثلاثة أشخاص كل على حدة باختيار نكهة لمثلجة يتناولها.

1. احسب احتمال تحقق الحادثة: A "يختار الأشخاص الثلاثة نكهات متمايزة مثنى مثنى"
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد النكهات المختار من قبل الأشخاص الثلاثة.

عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، ثمّ احسب الأمل الرياضياتي له و فسّر النتيجة.

حلّ 7 :-

1. لحساب احتمال تحقق الحادثة A ، نستعمل الدستور:

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الممكنة}}{\text{عدد الحالات المناسبة}}$$

طريقة أولى: (تطبيق المبدأ الأساسي للعدّ)

- حساب عدد الحالات الممكنة:

للتلميذ الأوّل 10 إمكانيات لاختيار نكهة.

من أجل كل اختيار الشخص الأوّل، توجد 10 إمكانية لاختيار نكهة من قبل الشخص الثاني.

من أجل كل اختيار للشخصين الأوّل والثاني، توجد 10إمكانيات لاختيار نكهة من قبل الشخص الثالث.

إذن هنالك في المجموع $10\times10\times10$ أي 10^3 إمكانية لاختيار ثلاث نكهات من قبل الأشخاص الثلاثة.

منه عدد الحالات الممكنة هو 1000.

- حساب عدد الحالات المناسبة:

للشخص الأول 10 إمكانيات لاختيار نكهة.

من أجل كل اختيار الشخص الأوّل، توجد 9 إمكانية لاختيار نكهة من قبل الشخص الثاني.

(لأنّ الشخص الأوّل نكهة واحدة وبقي للشخص الثاني 9 نكهات يختار منها واحدة)

من أجل كل اختيار للشخصين الأوّل والثاني، توجد 8 إمكانيات لاختيار نكهة من قبل الشخص الثالث.
(لأنّ الشخص الثالث يختار نكهة تختلف عن ما اختاره الشخصان السابقان)

إذن هنالك في المجموع $10\times9\times8$ أي 720 إمكانية لاختيار ثلاث نكهات من قبل الأشخاص الثلاثة.

منه عدد الحالات المناسبة هو: 720.

وبالتالي نجد: $P(A)=\frac{720}{1000}=0,72$.

طريقة ثانية: (باستعمال مفاهيم في العدّ)

نعتبر المجموعة E ذات العناصر $\{a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f\,;g\,;h\,;i\,;j\}$ حيث يرمز كل حرف إلى نكهة.

كل اختيار لنكهة من قبل الأشخاص الثلاثة تقابله قائمة ذات 3 حروف من بين 10.

مثلا القائمة gag تعني أنّ الشخص الأوّل اختار النكهة g ، والثاني اختار النكهة a والثالث اختار النكهة g .

منه عدد الحالات الممكنة هو عدد هذه القوائم وهو 10^3.

بينما نجد أنّ عدد الحالات المناسبة لاختيار 3 نكهات مختلفة من بين 10 من قبل الأشخاص الثلاثة هو عدد الترتيبات ذات 3 عناصر من بين 10 وهو $A_{10}^3=720$.

ومنه نجد $P(A)=\frac{720}{1000}=0,72$.

2. تعيين القيم الممكنة للمتغير X .

لدينا من السؤال الأوّل، $P(X=3)=P(A)=\frac{720}{1000}=0,72$.

- حساب $P(X=1)$.

عدد الحالات المناسبة هو $1\times1\times10$، لأنّ للشخص الأوّل 10 إمكانيات لاختيار نكهة بينما ليس لبقية الشخصين سوى اختيار واحد وهو نفس اختيار النكهة التي اختارها الشخص الأوّل.

منه $P(X=1)=\frac{10}{1000}=0,01$.

- حساب $P(X=2)$.

نعلم أنّ الأحداث "$X=1$"،"$X=2$"، "$X=3$" تشكل تجزئة لمجموعة الإمكانيات.

لدينا إذن $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

منه $P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)$

وبالتالي $P(X=2)=1-0,01-0,72=0,27$

ملاحظة:

يمكننا حساب $P(X=2)$ مباشرة.

عدد الحالات المناسبة هو عدد القوائم ذات 3 عناصر من بين 10 بحيث يتكرر فيها حرف واحد

لدينا 10 إمكانيات لاختيار الحرف الأوّل و 9 إمكانيات لاختيار الحرف الثاني. نعلم أنّ للحرف غير المكرر في هذه القائمة 3 مواضع مختلفة وبالتالي عدد هذه القوائم هو: $10\times9\times3=270$

منه $P(X=2)=\frac{270}{1000}=0,27$.

مما سبق ينتج قانون الاحتمال الملخص في الجدول الموالي:

المجموع	3	2	1	X
1	0,72	0,27	0,01	الاحتمالات

- حساب الأمل الرياضياتي للمتغير X:

بالحساب المباشر نجد: $E(X)=\sum_i p_i x_i=0,01\times1+0,27\times2+0,72\times3=2,71$

تفسّر هذه النتيجة على أنّ متوسط عدد النكهات التي يتم اختيارها في النهاية من قبل الأشخاص الثلاثة هو قريب من العدد 3. أي أنّ النتيجة الأكثر حظا في التحقق هي اختيار 3 نكهات متمايزة مثنى مثنى.

تمرين 8: (قانون برنولي ـ القانون الثنائي)

1. يحتوي وعاء على 12 كرة 4 منها حمراء و4 خضراء و4 بيضاء، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 5 كرات من هذا الوعاء. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.
عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائيX واحسب الأمل الرياضياتي له، ثمّ ترجم النتيجة.

2. نكرر عملية سحب كرة من نفس الوعاء 5 مرّات متتالية بحيث نعيد الكرة المسحوبة إلى هذا الوعاء قبل السحب الموالي. وليكن المتغيرY العشوائي الذي يحصي عدد المرّات التي نتحصل فيها على كرة حمراء.
عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y واحسب الأمل الرياضياتي له، ثمّ ترجم النتيجة.

حلّ- 8 :-

1. تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
من الواضح أنّ القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي 0، 1، 2، 3، 4.

عدد الطرق لاختار 5 كرات من بين 12 كرة هو: $\binom{12}{5}$

عدد الطرق لاختار k كرة حمراء مع $(k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\})$ من بين 4 كرات هو: $\binom{4}{k}$

عدد الطرق لاختار 5-k كرة ليست حمراء من بين 8 كرات الباقية هو: $\binom{8}{5-k}$

ومنه لدينا: $P(X=k)=\dfrac{\binom{4}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{12}{5}}$ من أجل $k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$.

بالحساب المباشر نجد:

X	0	1	2	3	4	المجموع
الاحتمالات	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$	1

حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X . $E(X)=\sum_i p_i x_i=\frac{165}{99}=\frac{5}{3}$

ترجمة النتيجة: معدل عدد الكرات الحمراء التي نحصل عليها بهذه الطريقة هو $\frac{5}{3}\ (\simeq 1,67)$.

2. لتكن E التجربة:

« نسحب عشوائيا من الوعاء كرة مع الإعادة وننظر إن كانت حمراء »

لهذه لتجربة العشوائية مخرجين هما: الحصول على كرة حمراء (نجاح) أو لا (فشل)، فهي بالتالي تجربة برنولي ذات الوسيط p حيث $p=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

نكرر هذه التجربة 5 مرّات مستقلة عن بعضها.

لدينا Y المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرّات التي نتحصل فيها على كرة حمراء، إذن فهو يحصي عدد النجاحات الممكنة ومنه $(0 \leq Y \leq 5)$

نستنتج مما سبق أنّ المتغير العشوائيY يتبع القانون الثنائي ذا الوسيطين $n=5$ و $p=\frac{1}{3}$.

منه ينتج: $Y \to B(5;\frac{1}{3})$

و $p(Y=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$ من أجل $k \in \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$.

باستعمال حاسبة، نتحصل على النتائج أدناه بتقريب قدره 10^{-3} بالنقصان.

Y	0	1	2	3	4	5	المجموع
الاحتمالات	0,132	0,329	0,329	0,165	0,041	0,004	1

الأمل الرياضياتي للمتغير Y هو: $E(Y)=np=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

معدل عدد الكرات الحمراء التي نتحصل عليها بهذه الطريقة في السحب $\frac{5}{3}\ (\simeq 1,67)$ هو.

تمرين 9:

باع محل للأجهزة الكهرومنزلية 4 ثلاّجات في يوم واحد مضمونة لمدّة 5 سنوات. احتمال أن لا تتعطل كل ثلاجة خلال فترة الضمان هو $0,9$.

1. احسب احتمال أن لا تتعطل الثلاجات الأربعة خلال فترة الضمان.
2. احسب احتمال أن تعطّل ثلاجتان فقط خلال فترة الضمان.

حلّ- 9 :-

1. حساب احتمال أن لا تتعطل الثلاجات الأربعة خلال فترة الضمان.
لدينا احتمال أن لا تتعطل كل ثلاجة خلال فترة الضمان هو $0,9$.

نعتبر عدم تعطل ثلاجة (مخرج لتجربة) وتعطلها (مخرج ثان لنفس التجربة) فإذن نحن هنا أمام تجربة برنولي ذات الوسيط $p = 0,9$.

من المعلوم أنّ تعطل أي ثلاجة مستقل عن تعطل أخرى. لذلك نكرر تجربة برنولي 4 مرّات فيكون عندها احتمال أن لا تتعطل k ثلاجة خلال فترة الضمان هو:

$$P(X = k) = \binom{4}{k}(0,9)^k (0,1)^{4-k}$$

احتمال أن لا تتعطل الثلاجات الأربعة خلال فترة الضمان هو:

$$P(X = 4) = \binom{4}{4}(0,9)^4 (0,1)^0 = (0,9)^4 \simeq 0,6561$$

2. حساب احتمال أن تتعطّل ثلاجتان فقط خلال فترة الضمان.
إنّ احتمال أن تتعطّل ثلاجتان فقط خلال فترة الضمان يساوي احتمال أن لا تتعطل ثلاجتان خلال فترة الضمان، وهذا يطابق الحالة التي يكون فيها $k = 2$ وبالتالي فالاحتمال المطلوب هو: $P(X = 2)$
ومنه نجد: $P(X = 2) = \binom{4}{2}(0,9)^2 (0,1)^2 = 6 \times (0,09)^2 \simeq 0,0486$.

تمرين 10: (العدّ ـ القانون الثنائي)

يقوم مُمَوِّن ببيع نوعين أسلاك C_1 و C_2، بحيث تتضمن كل شحنة يبيعها 20% من النوع C_1 و 80% من النوع C_2.

الجزءان **(أ)** و**(ب)** مستقلان عن بعضهما.

الجزء (أ):

لا يطلب في هذا الجزء أي حساب تقريبي.

نأخذ عشوائيا 4 أسلاك من شحنة تتكوّن 50 سلكا.

1) أعط احتمال تحقق الحادثة E : « نتحصل على 4 أسلاك من النوع C_1 »

2) أعط احتمال تحقق الحادثة F:

« نتحصل على سلك واحد من النوع C_1 و 3 أسلاك من النوع C_2 »

3) أعط احتمال تحقق الحادثة G: « نتحصل على سلك واحد على الأقل من النوع C_1 »

الجزء (ب):

في هذا الجزء نأخذ عشوائيا سلكا واحدا من شحنة ونسجل نوعه ثمّ نعيده إلى هذه الشحنة. نرمز لهذه التجربة بالرمز $\mathscr{E}$ ونكررها n مرّة. ليكن X عدد الأسلاك من النوع C_1 التي نتحصل عليها بهذه الطريقة.

1) نفرض أنّ $n = 4$. تعطى النتائج بتقريب قدره 10^{-4} بالنقصان.

أ) احسب احتمال الحصول على سلكين من النوع C_1.

ب) احسب احتمال الحصول على سلك واحد على الأقل من النوع C_1.

ج) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

2) في هذا السؤال n مجهول.

أ) عبّر عن $P(X \geqslant 1)$ بدلالة n.

ب) كم من مرّة يجب تكرار التجربة $\mathscr{E}$ حتى نستطيع القول أنّنا متأكدين بنسبة 90% من أنّنا سنحصل على سلك واحد على الأقل من النوع C_1 ؟

1) في هذا السؤال n مجهول.

أ) نعبّر عن $P(X \geqslant 1)$ بدلالة n.

لدينا حسب ما سبق: $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8^n$.

ب) البحث عن n عدد تكرارات التجربة $\mathscr{E}$ حتى نستطيع القول بأنّنا متأكدين بنسبة 90% من أنّنا سنحصل على سلك واحد على الأقل من النوع C_1 ؟

البحث عن n يعود إلى حل المتراجحة $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,9$.

لدينا: $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,9$

منه $1 - 0,8^n \geq 0,9$ وبالتالي $0,8^n \leq 0,1$

بتطبيق خواص اللوغاريتم نجد: $n \ln 0,8 \leq \ln 0,1$

وحيث $\ln 0,8 < 0$ نجد $n \geq \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,8}$

وبما أنّ $\frac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \simeq 10,32$ بتقريب قدره 10^{-2} بالنقصان و n عدد طبيعي، فإنّ $n \geqslant 11$.

نستنتج أنّه نحتاج إلى تكرار التجربة 11 مرّة على الأقل لكي نستطيع القول بأنّنا متأكدين بنسبة 90% من أنّنا سنحصل على سلك واحد على الأقل من النوع C_1.

حل- *10* :-

الجزء (أ):

بما أنّ عدد الأسلاك في الشحنة المعنية هو 50 وهي تتضمن 20% من النوع C_1 و 80% من النوع C_2، فإنّ هذه الأخيرة مكوّن من 10 أسلاك من النوع C_1 و 40 سلكا من النوع C_2. وبالتالي توجد $\binom{50}{4}$ طريقة لاختيار 4 أسلاك من بين 50.

1) عدد الطرق لاختيار 4 أسلاك من النوع C_1 هو: $\binom{10}{4}$

وبالتالي نجد: $P(\mathrm{E}) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{3}{3290}$.

2) عدد الطرق لاختيار سلك واحد من النوع C_1 هو: $\binom{10}{1} = 10$

عدد الطرق لاختيار 3 أسلاك من النوع C_2 هو: $\binom{40}{3}$

ومنه نجد: $P(\mathrm{F}) = \frac{10 \times \binom{40}{3}}{\binom{50}{4}} = \frac{988}{2303}$

3) لدينا الحادثة $\overline{\mathrm{G}}$: « لا نتحصل على أي سلك من النوع C_1» هي الحادثة النافية للحادثة G.

منه ينتج $\overline{\mathrm{G}}$: « نتحصل على 4 أسلاك من النوع C_2»

عدد الطرق لاختيار 4 أسلاك من النوع C_2 هو: $\binom{40}{4}$

منه نجد: $P(G)=1-P(\overline{G})=1-\dfrac{\binom{40}{4}}{\binom{50}{4}}=\dfrac{13891}{23030}$.

جزء (ب):

2) نفرض أنّ $n=4$. تعطى النتائج بتقريب قدره 10^{-4} بالنقصان.

أ) حساب احتمال الحصول على سلكين من النوع C_1.

بما أنّ السحب يتم مع الإعادة قبل السحب الموالي، فإنّ تكرار التجربة مرّة يتم بصفة مستقلة وفي نفس الشروط، وهو ما يسمح لنا مما يسمح لنا بإدراج القانون الثنائي.

نعلم أيضا من المعطيات أنّ احتمال الحصول على سلك من النوع C_1 هو $0,2$. إذن المتغير العشوائي X يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين n و $p=0,2$.

منه حسب هذا القانون لدينا: $P(X=k)=\binom{n}{k}0,2^k\times0,8^{n-k}$ حيث $k\in\mathbb{N}$ و $k\leqslant5$

نعوض $n=4$ و $k=2$ فنجد: $P(X=2)=\binom{4}{2}0,2^2\times0,8^2=0,1536$

إذن احتمال الحصول على سلكين من النوع C_1 هو $P(X=2)=0,1536$.

ب) حساب احتمال الحصول على سلك واحد على الأقل من النوع C_1.

الاحتمال المطلوب هو: $P(X\geqslant1)=1-P(X=0)=1-0,8^4=0,5904$.

ج) حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

يعطى الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X الذي يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين $n=4$ و $p=0,2$ بالعلاقة: $E(X)=n\times p$ منه $E(X)=0,8$.

تمرين 11:

نسحب على التوالي m كرة من وعاء يحتوي على N كرة مرقمة من 1 إلى N، بحيث نعيد في كل مرة الكرة المسحوبة إلى الوعاء قبل السحب الموالي.

نربح دينارا واحد في كل مرّة نتحصل فيها على كرة تحمل رقما يساوي الرتبة التي سحبت فيها، بينما لا نربح شيئا في الحالة الأخرى.

ما هو احتمال الحصول على ربح يساوي K دينارا؟

حلّ- 11 - :

احتمال الحصول على كرة رابحة هو $p=\frac{1}{N}$.

احتمال الحصول على كرة غير رابحة هو $1-p=1-\frac{1}{N}$.

بما أنّ السحب يتمّ على التوالي مع الإعادة قبل السحب الموالي ونكرره m مرّة، فإنّ النتائج تكون مستقلة عن بعضها وبالتالي نستنتج أنّ هذه التجربة تتبع قانون برنولي $B(m,\frac{1}{N})$.

نعرّف المتغير العشوائي X لبرنولي (الذي يحصي عدد المرّات التي نتحصل فيها على كرة رابحة)

إذن لدينا $p(X=k)=\binom{m}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{m-k}$.

تمرين 12:

يحتوي وعاء على 8 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 3 كرات حمراء. نسحب عشوائيا 3 كرات من هذا الوعاء. ما هو احتمال الحصول:

1. كرة بيضاء وكرتين حمراوين.
2. كرتين سوداوين.
3. كرة بيضاء على الأقل.
4. ثلاث كرات من نفس اللون.

حلّ -12 -:

1. عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو $\binom{15}{3}=455$.

عدد الحالات المناسبة هو $\binom{8}{1}\times\binom{3}{2}=24$ منه، $p_1=\frac{24}{455}$.

2. عدد الحالات المناسبة هو $\binom{4}{2}\times\binom{11}{1}=66$ منه، $p_2=\frac{66}{455}$.

3. الحادثة النافية للحادثة A: " ثلاث كرات من نفس اللون "

هي الحادثة $\bar{A}$: " لا نتحصل على أي كرة بيضاء "

لدينا:

$$p(\bar{A})=\frac{\binom{9}{3}}{455}=\frac{84}{455}$$

ومنه $p(A)=1-p(\bar{A})=1-\frac{84}{455}=\frac{371}{455}$.

4. عدد الحالات المناسبة هو $\binom{8}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}=56+4+1=61$ ، ومنه $p_4=\frac{61}{455}$.

تمرين 13: (الاحتمالات الشرطية، الاحتمالات الكلية)

يتكون تلاميذ ثانوية من 48% أولاد و 52% بنات. 85% من الأولاد ينتمون إلى نادي الإعلام الآلي بالثانوية و 68% من البنات ينتمين إلى هذا النادي أيضا. نختار تلميذا من هذه الثانوية.

1. ما هو احتمال أن ينتمي هذا التلميذ إلى نادي الإعلام الآلي؟
2. ما هو احتمال أن يكون تلميذ من نادي الإعلام الآلي ولد؟

حلّ- 13 - :

1. حساب احتمال أن ينتمي تلميذ واحد من هذه الثانوية إلى نادي الإعلام الآلي.

نعرّف الأحداث الآتية:

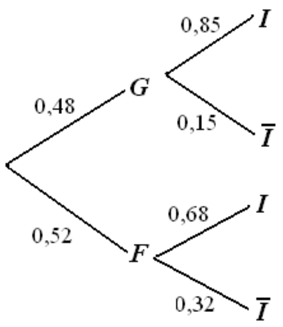
G : « التلميذ المختار من الثانوية هو ولد»

F : «التلميذ المختار من الثانوية هو بنت»

I : «التلميذ المختار من الثانوية ينتمي إلى نادي الإعلام الآلي»

لدينا إذن:

$$p(G)=0,48 \qquad p(F)=0,52$$
$$p_G(I)=0,85 \qquad p_F(I)=0,68$$
$$p_G(\bar{I})=0,15 \qquad p_F(\bar{I})=0,32$$



وبتطبيق قانون الاحتمالات الكلية ينتج:

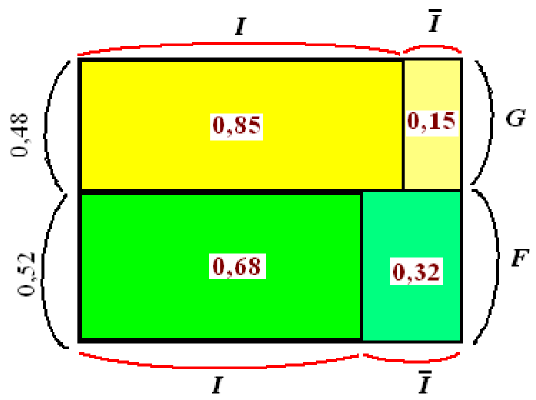
$$\begin{aligned} p(I) &= p(I\cap G)+p(I\cap F) \\ &= p(G).p_G(I)+p(F).p_F(I) \\ &= 0,48\times 0,85+0,52\times 0,68=0,7616 \end{aligned}$$

2. حساب احتمال أن يكون تلميذ من نادي الإعلام الآلي ولد.

نعلم أنّ $p_I(G)=\dfrac{p(G\cap I)}{p(I)}$ و $p_G(I)=\dfrac{p(G\cap I)}{p(G)}$

منه $p(G\cap I)=p(G)\times p_G(I)=p(I)\times p_I(G)$

وبالتالي ينتج $(1)......p_I(G)=\dfrac{p(G).p_G(I)}{p(I)}$



وحسب قانون الاحتمالات الكلية في جواب السؤال 1 وبالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$p_I(G)=\frac{p(G).p_G(I)}{p(G).p_G(I)+p(F).p_F(I)}$$
$$=\frac{0,48\times 0,85}{0,48\times 0,85+0,52\times 0,68}=\frac{0,408}{0,7616}\approx 0,536$$

تمرين 14:

احتمال أن تمطر غدا إذا أمطرت اليوم هو $0,8$، وهو $0,3$ إذا كان الجو صحوا.

I. نفرض أنّ الجو صحو في هذا اليوم.

1) ما هو احتمال أن يكون صحوا بعد 3 أيّام؟

2) ما هو احتمال أن يكون صحوا بعد 10 أيّام؟

II. نفرض أنّ الجو ممطر في هذا اليوم.

1) ما هو احتمال أن تمطر بعد 3 أيّام؟
2) ما هو احتمال أن تمطر بعد 15 يوما؟ استنتج احتمال أن يكون الجو صحوا بعد 15 يوما.

حلّ- 14 - :

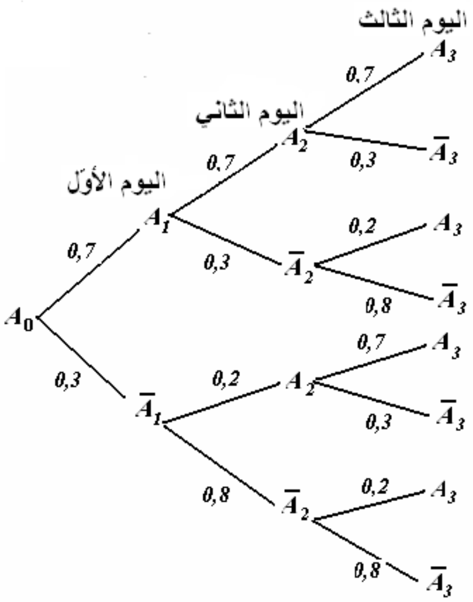
I. لدينا الجو صحو هذا اليوم.
1) نعلم أنّ الجوّ صحو هذا اليوم ونريد حساب احتمال أن يكون صحوا بعد 3 أيّام.
لذلك نعرّف الأحداث الآتية:

A_n: « الجو صحو في اليوم n»

$\bar{A}_n$: « الجو ممطر في اليوم n»

حسب معطيات التمرين

وبإنجاز شجرة الاحتمالات المقابلة



ينتج:

$$p(A_0)=1 \quad et \quad p(\bar{A}_0)=0$$
$$p_{\bar{A}_n}(\bar{A}_{n+1})=0{,}8 \qquad p_{\bar{A}_n}(A_{n+1})=1-p_{\bar{A}_n}(\bar{A}_{n+1})=0{,}2$$
$$p_{A_n}(\bar{A}_{n+1})=0{,}3 \qquad p_{A_n}(A_{n+1})=1-p_{A_n}(\bar{A}_{n+1})=0{,}7$$

الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3)=(0{,}7)^3+(0{,}7)(0{,}3)(0{,}2)+(0{,}3)(0{,}2)(0{,}7)+(0{,}3)(0{,}8)(0{,}2)$$
$$=0{,}475$$

2) نعلم أنّ الجوّ صحو هذا اليوم ونريد حساب احتمال أن يكون صحوا بعد 10 أيّام.
نستعمل قانون الاحتمالات الكلية فنجد:

$$p(A_{n+1})=p(A_n\cap A_{n+1})+p(\bar{A}_n\cap A_{n+1})$$
$$=p(A_n).p_{A_n}(A_{n+1})+p(\bar{A}_n).p_{\bar{A}_n}(A_{n+1})$$

وهذا يؤدي إلى تعريف متتالية (u_n) حيث $u_n=p(A_n)$ و $u_0=p(A_0)=1$

حيث نجد:

$$u_{n+1}=0,7u_n+0,2(1-u_n)$$

ومنه

$$u_{n+1}=0,5u_n+0,2$$

الاحتمال المطلوب هو $u_{10}=p(A_{10})$

نكتب u_n بدلالة n لهذا الغرض نعرّف المتتالية (v_n) بـ: $v_n=u_{n+1}-u_n$

بالحساب المباشر نجد أنّ (v_n) هندسية أساسها $r=0,5$ وحدّها الأوّل v_0

حيث $v_0=u_1-u_0=0,7-1=-0,3$.

إذن: $v_n=(-0,3).(0,5)^n$

ومنه نجد $u_n=(0,6).(0,5)^n+0,4$

$$p(A_{10})=u_{10}=(0,6).(0,5)^{10}+0,4\approx 0,400$$

II. نفرض أنّ الجو ممطر في هذا اليوم.

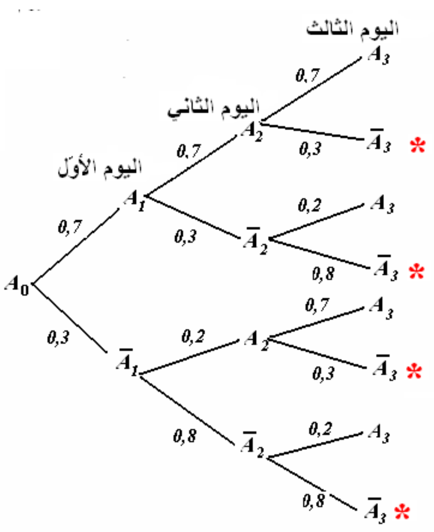
1) نحسب احتمال أن تمطر بعد 3 أيّام

حسب معطيات هذا السؤال لدينا:

$p(A_0)=0$ و $p(\bar{A}_0)=1$

ومنه

$$p_{\bar{A}_n}(\bar{A}_{n+1})=0,8 \qquad p_{\bar{A}_n}(A_{n+1})=1-p_{\bar{A}_n}(\bar{A}_{n+1})=0,2$$
$$p_{A_n}(\bar{A}_{n+1})=0,3 \qquad p_{A_n}(A_{n+1})=1-p_{A_n}(\bar{A}_{n+1})=0,7$$



باستعمال شجرة الاحتمالات المقابلة نجد

$$p(\bar{A}_3)=(0,2)(0,7)(0,3)+(0,2)(0,3)(0,8)+(0,8)(0,2)(0,3)+(0,8)^3$$
$$=0,650$$

2) حساب احتمال أن تمطر بعد 15 يوما

باستعمال قانون الاحتمالات الكلية نجد:

$$p(\bar{A}_{n+1})=p(A_n\cap\bar{A}_{n+1})+p(\bar{A}_n\cap\bar{A}_{n+1})$$
$$=p(A_n).p_{A_n}(\bar{A}_{n+1})+p(\bar{A}_n).p_{\bar{A}_n}(\bar{A}_{n+1})$$

وتعريف متتالية (w_n) بحيث $w_n=p(\bar{A}_n)$ و $w_0=p(\bar{A}_0)=1$

نجد: $w_{n+1}=(1-w_n)0,3+w_n0,8$

ومنه $w_{n+1}=0,5w_n+0,3$

الاحتمال المطلوب هو $p(\bar{A}_{15})$ أي w_{15}.

لذلك نعرّف متتالية مساعدة (k_n) بحيث $k_n=w_{n+1}-w_n$.

بالحساب المباشر نجد أنّ (k_n) هندسية أساسها $r=0,5$ وحدها الأوّل k_0.

حيث $k_0=w_1-w_0=0,5w_0+0,3-w_0=-0,5w_0+0,3=-0,2$

منه $k_n=(-0,2).(0,5)^n$

وبالتالي $w_n=(0,4).(0,5)^n+0,6$

الاحتمال المطلوب هو $p(\bar{A}_{15})$ أي w_{15} إذن $w_{15}=(0,4).(0,5)^{15}+0,6\approx0,600$

استنتاج احتمال أن يكون الجو صحوا بعد 15 يوما.

هذا الاحتمال هو $p(A_{15})$،

منه
$$p(A_{15})=1-p(\bar{A}_{15})$$
$$=1-w_{15}=0,39998779296875$$
$$\approx0,400$$

تمرين 15:

ما هو احتمال أن تكون نقطية كيفية تختار من داخل كرة ذات نصف القطر R، أقرب إلى مركز هذه الكرة من سطحها؟

حلّ – 15 - :

مجموعة الإمكانيات Ω هي مجموعة النقط التي تقع داخل الكرة ذات نصف القطر R.

مجموعة الحالات المناسبة للحادثة « النقطة المختارة تكون أقرب إلى مركز الكرة من سطحها » هي مجموعة النقط التي تقع داخل الكرة ذات نصف القطر $\frac{R}{2}$.

منه الاحتمال المطلوب هو: $p=\dfrac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3}{\frac{4}{3}\pi\left(R\right)^3}=\frac{1}{8}$.

تمرين 16:

يحتوي وعاء على 4 كرات حمراء 3 كرات بيضاء.

1. نسحب في آن واحد كرتين من هذا الوعاء، احسب احتمال تحقق كل حدث مما يأتي.
   أ) سحب كرتين حمراوين.
   ب) سحب كرتين بيضاوين.
   ج) سحب كرتين من لونين مختلفين.
2. نسحب كرة ونسجل لونها ثمّ نعيدها إلى الوعاء انسحب من جديد كرة أخرى نسجل لونها أيضا، احسب احتمال تحقق كل حدث مما يأتي.
   أ) سحب كرتين حمراوين.
   ب) سحب كرتين بيضاوين.
   ج) سحب كرتين من لونين مختلفين.

حلّ - 16- :

تذكير بالدرس:

- ✓ عدد التوفيقات (مجموعات جزئية غير مرتبة وبدون تكرار لعناصرها) ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا حيث $0 \leqslant p \leqslant n$ هو $\binom{n}{p}$ أو C_p^n. حيث

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-1)...(n-p+1)}{1\times 2\times ...\times p}.$$

- ✓ نرمز للاحتمال الشرطي لتحقق الحادثة B علما أنّ A محققة بالرمز $p_A(B)$ أو بالرمز $p\left(B/A\right)$

1. سحب كرتين من بين 7 كرات (4 حمراء و 3 بيضاء) في آن واحد يؤدي إلى تشكيل توفيقات ذات عنصرين من بين 7 ، من عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو C_7^2 بالحساب نجد $C_7^2 = 21$.

أ) عدد الحالات المناسبة لسحب كرتين حمراوين هو: $C_4^2 = 6$ وبالتالي ينتج احتمال تحقق هذه الحادثة هو $p = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

ب) عدد الحالات المناسبة لسحب كرتين بيضاوين هو: $C_3^2 = 3$ وبالتالي ينتج احتمال تحقق هذه الحادثة هو $p' = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.

ج) عدد الحالات المناسبة لسحب كرة حمراء وأخرى بيضاء هو: $C_3^1 \times C_4^1 = 3\times 4 = 12$

وبالتالي ينتج احتمال تحقق هذه الحادثة هو $p' = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2} = \frac{3\times 4}{21} = \frac{4}{7}$.

2. في هذا السؤال لدينا السحب على التوالي مع الإعادة قبل السحب الموالي. هذا السحب يؤدي إلى تشكيل قوائم ذات عنصرين من بين 7 عناصر وبالتالي فإنّ عدد الحالات الممكنة هو 7^2

أ)احتمال سحب كرتين من لون أحمر هو $p_1 = \frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49}$ لأنّ عدد الحالات المناسبة لهذه الحادثة هو $4^2 = 16$.

ب) احتمال سحب كرتين من لون أبيض هو $p_2=\frac{3^2}{7^2}=\frac{9}{49}$ لأنّ عدد الحالات المناسبة هو 3^2

.

ج) احتمال سحب كرة من لون أبيض وأخرى من لون أحمر هو $p_3=\frac{3\times4}{7^2}=\frac{12}{49}$ لأنّ عدد الحالات المناسبة هو $3\times4=12$.

تمرين 17:

نعتبر فضاء احتمال Ω وليتكن الحادثتان A و B. نرمز بالرمزين $\bar{A}$ و $\bar{B}$ إلى الحادثتين النافيتين للحادثتين A و B.

إذا كان $p(A)=0,5$ ، $p(B)=0,4$ و $p_{\bar{A}}(B)=0,6$ ، فاحسب $p(A\cup B)$ و $p_A(B)$.

حلّ- 17 :-

حسب المعطيات المتوفرة من التمرين، لدينا:

$p(A)=0,5$ و $p(B)=0,4$ منه $p(\bar{A})=0,5$ و $p(\bar{B})=0,6$

- نعلم أنّ $p_{\bar{A}}(B)=\frac{p(\bar{A}\cap B)}{p(\bar{A})}$

منه $p(\bar{A}\cap B)=p(\bar{A})\times p_{\bar{A}}(B)=0,5\times0,6=0,3$.

ولدينا $p_{\bar{A}}(\bar{B})=1-p_{\bar{A}}(B)$

إذن $\frac{p(\bar{A}\cap\bar{B})}{p(\bar{A})}=1-\frac{p(\bar{A}\cap B)}{p(\bar{A})}$

وبالتالي $p(\bar{A}\cap\bar{B})=p(\bar{A})-p(\bar{A}\cap B)=0,5-0,3=0,2$

نعلم أنّ $p(A\cup B)=1-p(\overline{A\cup B})=1-p(\bar{A}\cap\bar{B})$

بالتعويض نجد $p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) + p(B) - p(A \cup B)}{p(A)} = \frac{0,5 + 0,4 - 0,8}{0,5} = 0,2$$

تمرين 18:

لدينا مجموعتان من الكرات A_1 و A_2. 70% من كرات A_1 المجموعة بيضاء و 80% من كرات A_2 بيضاء.

نفرض أن عدد الكرات الذي تحتويه المجموعة A_1 هو ثلاثة أضعاف ما تحتويه المجموعة A_2.
وضعت جميع كرات المجموعتين A_1 و A_2 في نفس الوعاء. وقمنا بسحب كرة واحدة من هذا الوعاء عشوائيا، فتبيّن أنّ لونها أبيض. ما هو احتمال أنّها تنتمي إلى المجموعة A_1 ؟

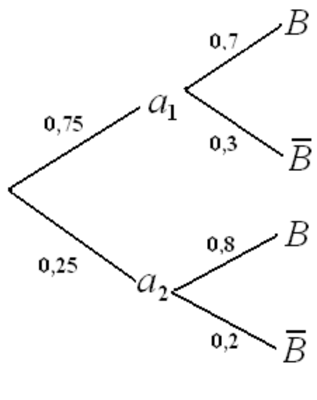
حلّ- 18 :-

لدينا عدد كرات المجموعة A_1 هو ثلاثة أضعاف عدد كرات A_2 .

نعرّف الحدثين a_1: « سحب كرة من المجموعة A_1 »

a_2: « سحب كرة من المجموعة A_2 »

إذن ينتج $p(a_1) = \frac{3}{4}$ و $p(a_2) = \frac{1}{4}$.



نعرّف الحادثة B: « الكرة المسحوبة بيضاء »

إذن الاحتمال المطلوب حسابه هو الاحتمال الشرطي $p_B(a_1)$

$$p_{a_1}(B) = 0,7 \quad \text{و} \quad p_{a_1}(\bar{B}) = 0,3$$

$$p_{a_2}(B) = 0,8 \quad \text{و} \quad p_{a_2}(\bar{B}) = 0,2$$

نطبق القاعدة الآتية التي نحصل عليها باستعمال قانون الاحتمالات الكلية:

$$p_B(a_1)=\frac{B \text{ و } a_1 \text{ جداء احتمالات المسار الرابط بين }}{B \text{ مجموع جداءات احتمالات جميع المسارات ذات المخرج }}$$

لدينا

$$p_B(a_1)=\frac{p(B\cap a_1)}{p(B)}=\frac{p(B\cap a_1)}{p(B\cap a_1)+p(B\cap a_2)}$$
$$=\frac{p(a_1).p_{a_1}(B)}{p(a_1).p_{a_1}(B)+p(a_2).p_{a_2}(B)}$$

ومنه ينتج، $p_B(a_1)=\dfrac{p(a_1).p_{a_1}(B)}{p(a_1).p_{a_1}(B)+p(a_2).p_{a_2}(B)}=\dfrac{0,75\times 0,7}{0,75\times 0,7+0,25\times 0,8}$

وبالتالي نجد: $p_B(a_1)=\dfrac{525}{725}$ أي $p_B(a_1)\approx 0,72$.

تمرين 19:

يعلم مسافر أنّ مفترق الطرق الذي سيَمُر عبره يتفرع إلى طريقين، أحدهما ممر مغلق والآخر هو الطريق الصحيح. وعندما وصل إلى هذا المفترق لم يجد سوى ثلاثة أشخاص.

الشخص الأوّل S_1 يصدق القول مرتين من بين 10 مرّات والشخص الثاني S_2 يصدق القول 5 مرّات من بين 10 مرّات، بينما يصدق الشخص الثالث S_3، 9 مرّات من بين 10 مرّات.

سأل المسافر أحد هؤلاء الأشخاص عن الطريق الصحيح، فاتضح له بعدما سلكه أنّه الطريق الصحيح فعلا. ما هو احتمال أن يكون قد سأل الشخص الأوّل S_1؟

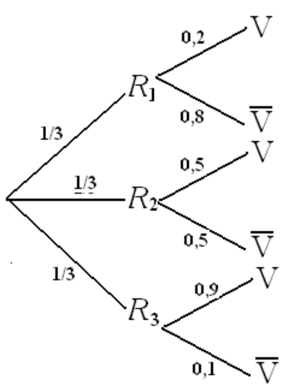
حلّ- 19 :-

نعرّف الأحداث الآتية:

R_1: « المسافر سأل الشخص S_1»

R_2: « المسافر سأل الشخص S_2»

R_3: « المسافر سأل الشخص S_3»



V: « يصدق الشخص في قوله »

نترجم الآن معطيات المسألة باستعمال هذه الأحداث وبواسطة شجرة الاحتمالات.

إذن ينتج:

$p(R_1)=\frac{1}{3}$ ، $p(R_2)=\frac{1}{3}$ ، $p(R_3)=\frac{1}{3}$.

$p_{R_1}(V)=0,2$ ، $p_{R_2}(V)=0,5$ ، $p_{R_3}(V)=0,9$

الاحتمال المطلوب حسابه هو $p_V(R_1)$

لدينا
$$p_V(R_1)=\frac{p(V\cap R_1)}{p(V)}=\frac{p(R_1)\times p_{R_1}(V)}{p(v\cap R_1)+p(v\cap R_2)+p(v\cap R_3)}$$

ومنه
$$p_V(R_1)=\frac{p(R_1)\times p_{R_1}(V)}{p(R_1)\times p_{R_1}(V)+p(R_2)\times p_{R_2}(V)+p(R_3)\times p_{R_3}(V)}$$

تسمى العلاقة السابقة دستور بايز (Bayes) ويمكن التعبير عنها كما يلي:

$$p_V(R_1)=\frac{\text{جداء احتمالات المسار الرابط بين } R_1 \text{ و } V}{\text{مجموع جداءات احتمالات جميع المسارات ذات المخرج } V}$$
(أنظر التمرين 18)

بالتعويض نجد: $p_V(R_1)=\dfrac{\frac{1}{3}\times 0,2}{\frac{1}{3}\times 0,2+\frac{1}{3}\times 0,5+\frac{1}{3}\times 0,9}=\frac{1}{8}=0,125$.

تمرين 20:

احتمال أن تقوم مصلحة البريد بسحب الرسائل من صندوق البلدية في اليوم ذي الرتبة n من السنة هو $\frac{1}{2}$ في حالة ما إذا كانت قد سحبت الرسائل بالأمس، وهو 1 في الحالة الأخرى.

ليكن p_n احتمال أن تقوم مصلحة البريد بسحب الرسائل من صندوق في اليوم ذي الرتبة n.

احسب p_n إذا علمت أنّ $p_1 = 1$ (نبحث عن علاقة تراجعية بين p_n و p_{n+1})

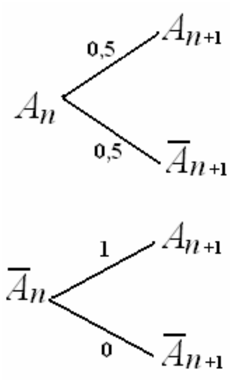
حلّ – 20 - :

نعرّف الحادثة A_n « تسحب الرسائل في اليوم ذي الرتبة n »

نسمي $\bar{A}_n$ الحادثة النافية للحادثة A_n.

لدينا:

p_n هو احتمال أن تسحب الرسائل في اليوم ذي الرتبة n.



إذن $p_n = p(A_n)$ ومنه $p(\bar{A}_n) = 1 - p_n$

نعلم من معطيات المسألة أنّ:

$$p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,5 \text{ و } p_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) = 1$$

ومنه نستنتج أنّ:

$$p_{A_n}(\bar{A}_{n+1}) = 0,5 \text{ و } p_{\bar{A}_n}(\bar{A}_{n+1}) = 0$$

وبالتالي تنتج شجرة الاحتمالات المقابلة التي تترجم معطيات المسألة.

وباستعمال قانون الاحتمالات الكلية ينتج:

$$\begin{aligned} p(A_{n+1}) &= p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) \\ &= p(A_n).p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\bar{A}_n).p_{\bar{A}_n}(A_{n+1}) \end{aligned}$$

أي: $p_{n+1} = p_n \times 0,5 + (1 - p_n) \times 1$

ومنه $p_{n+1} = -\frac{1}{2} p_n + 1$.

لكتابة p_n بدلالة n، نعرّف المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = p_{n+1} - p_n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$.

بالحساب نجد $v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n$ منه نستنتج أنّ :

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ وحدّها الأوّل v_1 حيث $v_1 = p_2 - p_1 = -\frac{1}{2}$

ومنه حدّها العام هو $v_n = v_1 q^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

وحيث يمكننا كتابة $p_n = -\frac{2}{3}v_n + \frac{2}{3}$

نجد $p_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$.

تمرين 21:

يلعب كمال وسعاد ورياض بالكرة.عندما تكون الكرة بحوزة كمال فإنّ احتمال أن يرمي بها إلى سعاد هو $0,75$ واحتمال أن يرمي بها إلى رياض هو $0,25$، وإذا كانت الكرة عند سعاد فإنّ احتمال أن ترمي بها إلى كمال هو $0,75$ واحتمال أن ترمي بها إلى رياض هو $0,25$. بينما يرمي رياض بالكرة إلى سعاد كلما كانت بحوزته. كانت الكرة في بداية اللعب عند كمال.

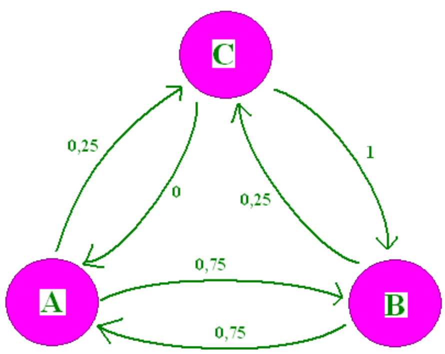
نرمز بالرموز p_n، q_n و r_n إلى احتمالات أن تصير الكرة عند كمال ، سعاد ورياض على الترتيب عند الرمية ذات الرتبة n.

ما هي نهاية كل احتمال من هذه الاحتمالات عندما يؤول n إلى اللانهاية؟

حلّ 21 -:

نرمز بالرموز A، B و C إلى كل من كمال وسعاد ورياض على الترتيب.

نعرّف الأحداث الآتية:



A_n: « الكرة بحوزة كمال بعد الرمية ذات الرتبة n مباشرة »

B_n: « الكرة بحوزة سعاد بعد الرمية ذات الرتبة n مباشرة »

C_n: « الكرة بحوزة رياض بعد الرمية ذات الرتبة n مباشرة »

المخطط المقابل يشرح معطيات المسألة

إذن لدينا:

$p(A_n) = p_n$ و $p(B_n) = q_n$ و $p(C_n) = r_n$.

بما أنّ الكرة في بداية اللعب موجودة عند كمال فإنّ:

$p(A_0) = 1$ و $p(B_0) = 0$ و $p(C_0) = 0$.

حسب قانون الاحتمالات الكلية لدينا.

$$p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) + p(C_n \cap A_{n+1})$$

و $$p(B_{n+1}) = p(B_n \cap B_{n+1}) + p(A_n \cap B_{n+1}) + p(C_n \cap B_{n+1})$$

و $$p(C_{n+1}) = p(C_n \cap C_{n+1}) + p(A_n \cap C_{n+1}) + p(B_n \cap C_{n+1})$$

باستعمال الاحتمالات الشرطية والتعويض نجد:

$$p(A_{n+1}) = p(A_n).p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n).p_{B_n}(A_{n+1}) + p(C_n).p_{C_n}(A_{n+1})$$

و $$p(B_{n+1}) = p(B_n).p_{B_n}(B_{n+1}) + p(A_n).p_{A_n}(B_{n+1}) + p(C_n).p_{C_n}(B_{n+1})$$

و $$p(B_{n+1}) = p(C_n).p_{C_n}(C_{n+1}) + p(A_n).p_{A_n}(C_{n+1}) + p(B_n).p_{B_n}(C_{n+1})$$

تنتج مما سبق الجملة :

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{3}{4}q_n \\ q_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n \end{cases}$$

نعلم أنّ الكرة موجودة عند أحد اللاعبين الثلاثة وبالتالي مهما كان العدد الطبيعي n فإنّ

$p_n + q_n + r_n = 1$.

نفرض أن كل متتالية من المتتاليات الثلاثة تقبل نهاية منتهية عندما يؤول n إلى اللانهاية، ونضع بناء على ذلك $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = q$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$.

عندما نجعل n يؤول إلى اللانهاية في الجملة السابقة نجد الجملة الموالية:

$$\begin{cases} p = \frac{3}{4}q \\ q = \frac{3}{4}p + r \\ r = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}q \end{cases}$$

ولدينا أيضا $p+q+r=1$.

بالحساب المباشر نجد حلا واحدا لهذه الجملة هو $(p,q,r)=(\frac{12}{35},\frac{16}{35},\frac{1}{5})$.

تمرين 22:

نلقي حجري نرد ونهتم بالحادثتين A و B حيث:

A: « مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين للحجرين فرديا »

B: « يظهر على الرقم 1 مرّة واحدة على الأقل »

هل الحادثتين A و B مستقلّتان؟

حلّ 22 :-

نشكل جدول نتائج عمليات الجمع للرقمين الممكن ظهورهما عند إلقاء الحجرين.

حجر 2 \ حجر 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

الجدول 1

A: « مجموع الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين للحجرين فرديا »

نشكل الجدول الذي يعطي مجموع الرقمين الظاهرين فرديا.

لدينا $p(A)=\dfrac{18}{36}$

الجدول 2

حجر 1 / حجر 2	1	2	3	4	5	6
1		3		5		7
2	3		5		7	
3		5		7		9
4	5		7		9	
5		7		9		11
6	7		9		11	

B: « يظهر على الرقم 1 مرّة واحدة على الأقل »

نشكل الجدول الذي يعطي الرقم 1 مرّة واحدة على الأقل.

حجر 1 / حجر 2	1	2	3	4	5	6
1	⊛	⊛	⊛	⊛	⊛	⊛
2	⊛					
3	⊛					
4	⊛					
5	⊛					
6	⊛					

الجدول 3

لدينا $p(B)=\dfrac{11}{36}$

نعرّف الحادثة $A\cap B$:

« مجموع الرقمين الظاهرين فرديا مع وجود الرقم واحد مرّة واحدة على الأقل»

(نعبر عن هذه الحادثة بمجموعة الخانات المملوءة والمشتركة في الجدولين 2 و 3)

حجر 1 / حجر 2	1	2	3	4	5	6
1		3		5		7
2	3					
3						
4	5					
5						
6	7					

حسب هذا الجدول لدينا $p(A\cap B)=\dfrac{6}{36}$

نلاحظ أنّ $p(A\cap B)\neq p(A)\times p(B)$

ومنه A و B حادثتان غير مستقلّتين.

تمرين 23:

يحتوي وعاء على 4 قريصات مرقمة من 1 إلى 4.

نسحب عشوائيا قريصة من هذا الوعاء ونسجل رقمها a ثمّ نعيدها إلى الوعاء ونسحب من جديد قريصة أخرى ونسجل لونها b.

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلما متعامدا ومتجانسا في الفضاء.

نعتبر الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ حيث $\vec{u}(a,-5,1-a)$ و $\vec{v}(1+b,1,b)$.

برهن أنّ احتمال أن يكون هذان الشعاعان متعامدين هو $\frac{1}{4}$.

حلّ 23 -:

يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين، إذا وفقط إذا جداؤهما السلّمي معدوما.

وحيث أنّ $\vec{u}.\vec{v}=a(1+b)+1\times(-5)+(1-a)b$

فإنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان، إذا وفقط إذا، $a+b=5$.

ومنه نجد الثنائيات المرتبة $(a;b)$ هي $(1;4)$، $(4;1)$، $(2;3)$، $(3;2)$ مع احتمال تحقق كل ثنائية هو $\left(\frac{1}{4}\right)^2$.(السحب هنا على التوالي مع الإعادة قبل السحب الموالي)

منه احتمال أن يكون الشعاعان متعامدين هو $\frac{1}{4}=4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

تمرين 24:

نخضع كل قطع الغيار التي ينتجها مصنع لاختبارين في النوعين T_1 ثمّ T_2.

95% من هذه القطع تنجح في الاختبار T_1. 99% من القطع التي نجحت في الاختبار T_1 نجحت أيضا في الاختبار T_2، بينما نجد أنّ 98% من القطع التي لم تنجح في الاختبار T_1 نجحت في الاختبار T_2.

نعتبر قطعة غيار كيفية من إنتاج هذا المصنع ونعرّف الحادثتين:

T_1: « قطعة الغيار تنجح في الاختبار T_1 »

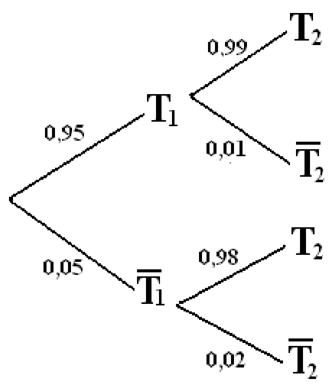
T_2: « قطعة الغيار تنجح في الاختبار T_2 »

تعطى النتائج بتقريب قدره 10^{-4} بالنقصان.

1. احسب احتمال تحقق الحادثة s: « قطعة الغيار تنجح في الاختبارين T_1 و T_2 »
2. احسب احتمال أن تنجح قطعة الغيار في الاختبار T_2.
3. هل الحادثتان T_1 و T_2 مستقلّتان.
4. نختار قطعة غيار من القطع التي نجحت في الاختبار T_2 ، ما هو احتمال أنّها قد نجحت في الاختبار T_1؟

حلّ-24-:

نشكل أوّلا شجرة الاحتمالات التي تترجم الوضعية



1. احتمال تحقق الحادثة s:

« قطعة الغيار تنجح في الاختبارين T_1 و T_2 »

$$p(s)=p(\mathrm{T}_1\cap\mathrm{T}_2)=p(\mathrm{T}_1).p_{\mathrm{T}_1}(\mathrm{T}_2)=0{,}95\times0{,}99=0{,}9405$$

2. يمكن حساب احتمال أن قطعة غيار تنجح في الاختبار T_2 بتطبيق دستور الاحتمالات الكلية على المجموعة $T_1 \cup T_2$ حيث نجد:

$$p(T_2) = p(T_2 \cap T_1) + p(T_2 \cap \overline{T}_1)$$

ومنه

$$\begin{aligned} p(T_2) &= p(T_2 \cap T_1) + p(T_2 \cap \overline{T}_1) = 0,95 \times 0,99 + 0,05 \times 0,98 \\ &= 0,9405 + 0,049 = 0,9895 \end{aligned}$$

3. هل الحادثتان T_1 و T_2 مستقلّتان؟

لدينا $p_{T_1}(T_2) = 0,99$ منه $p_{T_1}(T_2) \neq p(T_2)$ إذن T_1 و T_2 غير مستقلّتين.

يمكننا مقارنة $p(T_1 \cap T_2)$ و $p(T_1) \times p(T_2)$)

4. المطلوب في هذا السؤال حساب الاحتمال الشرطي $P_{T_2}(T_1)$.

لدينا $P_{T_2}(T_1) = \dfrac{P(T_2 \cap T_1)}{P(T_2)} = \dfrac{0,9405}{0,9895} = 0,95048....$

ومنه $P_{T_2}(T_1) = 0,9505$ بتقريب بالنقصان قدره 10^{-4}.

تمرين 25:

ليكن n عدد طبيعيا غير معدوم. لدينا قطعة نقدية تحقق احتمال ظهور الوجه عند إلقائها هو p (p عدد حقيقي من المجال $]0;1[$)

نلقي هذه القطعة n مرّة متتالية. ليكن X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرّات التي يظهر فيها الوجه خلال n رمية.

1. ما هو قانون احتمال المتغير العشوائي X؟
2. أعط الأمل الرياضياتي والتباين لهذا المتغير العشوائي بدلالة n و p.

حلّ- 25 :-

1. نلاحظ أنّنا نكرر نفس التجربة ذات مخرجين في نفس الشروط بطريقة مستقلة. إذن نحن أمام تجربة برنولي مكررة n مرّة.

احتمال ظهور الوجه هو p.

احتمال ظهور الظهر هو $1-p$.

لدينا فرضا X هو المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرّات التي يظهر فيها الوجه خلال n رمية.

إذن X يتبع القانون الثنائي ذو الوسيطين n و p

ومنه يمكن أن نكتب $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

2. تعلم أنّ $E(X)=n.p$

وكذلك $v(X)=n.p.(1-p)$.

تمرين 26:

عدد أقسام المستوى النهائي في ثانوية هو 3 نرمز لها بالرموز T_1 و T_2 و T_3.

30%من تلاميذ المستوى النهائي يدرسون في القسم T_1، و 50% من تلاميذ المستوى النهائي يدرسون في القسم T_2 وبقية تلاميذ المستوى النهائي يدرسون في القسم T_3.

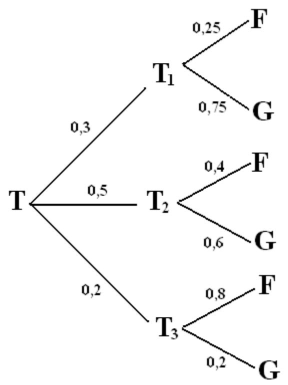
25% من تلاميذ القسم T_1 هم بنات ويشكل البنات نسبة 40%من تلاميذ القسم T_2، بينما يشكلن في القسم T_3 ما نسبته 80%.

1. نعيّن بصفة عشوائية تلميذا من المستوى النهائي. ما هو احتمال أن نعيّن بنت؟
2. عيّننا بصفة عشوائية تلميذا من المستوى النهائي فتبيّن أنّه بنت، ما هو احتمال أن تكون هذه البنت من القسم T_1 ؟

حل- 26 -ّ:

نرمز بالرمز T إلى مجموعة تلاميذ المستوى النهائي، ونعرّف الحادثة F : « تعيين بنت » ولتكن G الحادثة النافية لها أي « تعيين ولد»

نلاحظ أنّ $\{T_1;T_2;T_3\}$ تشكل تجزئة للمجموعة T.



و لدينا أيضا من معطيات المسألة :

$p(T_1)=0,3$ و $p(T_2)=0,5$ و $p(T_3)=0,2$

$p_{T_1}(F)=0,25$ و $p_{T_2}(F)=0,4$ و $p_{T_3}(F)=0,8$

إذن يمكن تشكيل شجرة الاحتمالات المقابلة.

1. حساب احتمال تعيين بنت.

لدينا حسب دستور الاحتمالات الكلية $P(F) = P(F\cap T_1)+ P(F\cap T_2)+P(F\cap T_3)$

ومنه $P(F) = P(T_1).P_{T_1}(F)+ P(T_2).P_{T_2}(F)+ P(T_3).P_{T_3}(F)$

وبالتالي $p(F)= 0,3\times 0,25+ 0,5\times 0,4 + 0,2\times 0,8= 0,435$

2. حساب احتمال أن تكون هذه البنت من القسم T_1.

المطلوب هنا حساب الاحتمال الشرطي $p_F(T_1)$

لدينا $p_F(T_1)=\dfrac{p(F\cap T_1)}{p(F)}$

ومنه $p_F(T_1)=\dfrac{0,3\times 0,25}{0,435}=\dfrac{0,075}{0,435}=0,032625$

تمرين 27:

يحتوي وعاء على n كرة سوداء $(n\in\mathbb{N}^*)$ و كرتين بيضاوين. نسحب من هذا الوعاء كرتين على التوالي دون الإعادة قبل السحب الموالي.

1. ما هو احتمال سحب كرتين بيضاوين؟
2. نرمز بالرمز u_n إلى احتمال سحب كرتين من نفس اللون.

أ) عبر عن u_n بدلالة n.

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. فسّر النتيجة.

حلّ- 27 :-

.1 حساب احتمال سحب كرتين بيضاوين.

نسمي A الحادثة: « سحب كرتين بيضاوين »

منه
$$p(A)=\frac{\text{عدد الحالات المناسبة للحادثة } A}{\text{عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة}}$$

وبالتالي $p(A)=\dfrac{2\times 1}{(n+2)(n+1)}$

.2 حساب احتمال سحب كرتين من نفس اللون.

نسمي B الحادثة: « سحب كرتين من نفس اللون »

نسمي N الحادثة: « سحب كرتين سوداوين »

أ) لدينا $p(B)=p(A)+p(N)$

إذن
$$p(B)=\frac{2\times 1}{(n+2)(n+1)}+\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}=\frac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}$$

وبالتالي $u_n=\dfrac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}$.

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ وتفسير ذلك.

لدينا
$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}=1$$

تفسّر هذه النتيجة على أنّه عندما يكون عدد الكرات السوداء كبير بما فيه كفاية فإنّ الحادثة N تصبح حادثة أكيدة. وبتعبير آخر ففي هذه الحالة لا تأثير لكرتية بيضاوين.

تمرين 28:

n عدد طبيعي غير معدوم. نلقي قطعة نقدية متوازنة $2n$ مرّة. وليكن X المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرّات التي يظهر فيها وجه القطعة خلال $2n$ رمية.

.1 ما هو قانون احتمال X؟

عبر عن أمله الرياضياتي وتباينه بدلالة n.

.2 نرمز بالرمز p_n إلى احتمال الحصول على الوجه n مرّة.

أ) عبر عن p_n بدلالة n.

ب) أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعي n غير المعدوم، $p_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}p_n$.

ج) برهن بالتراجع، أنّه مهما كان العدد الطبيعي n غير المعدوم، $p_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

د) ادرس رتابة المتتالية $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ثمّ استنتج تقاربها.

ه) احسب نهاية المتتالية $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. احسب احتمال أن يكون عدد المرّات التي نتحصل فيها على الوجه أكبر من عدد المرّات التي نتحصل فيها على الظهر.

• **خلاصة**: مبدأ البرهان بالتراجع يسمح باستنتاج أنّه مهما كان العدد الطبيعي غير المعدوم، $p_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

ب) دراسة رتابة المتتالية $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ثمّ استنتج تقاربها.

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$، لدينا $p_n>0$ و $\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{2n+1}{2n+2}$ مع $1<2n+1<2n+2$

$\frac{p_{n+1}}{p_n}<1$. و هذا يعني أنّ $p_{n+1}<p_n$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$.

خلاصة: المتتالية (p_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأدنى بالعدد صفر، فهي إذن متقاربة.

ج) حساب نهاية المتتالية $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $0\leqslant p_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ وحيث أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$ نستنتج حسب مبرهنة الحصر في حساب النهايات أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=0$.

2. حساب احتمال أن يكون عدد المرّات التي نتحصل فيها على الوجه أكبر من عدد المرّات التي نتحصل فيها على الظهر.

إنّ الحادثة:

«الحصول على عدد المرّات التي نتحصل فيها على الوجه أكبر من عدد المرّات التي نتحصل فيها على الظهر»

تقابل المعنى $(X>n)$.

نضع لاعتبارات تقنية في الحسابات $q_k=P(X=k)$ حيث k عدد طبيعي يحقق $0\leqslant k\leqslant 2n$.

إذن $q_k = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{2n-k} = q_{2n-k}$

ومنه $P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{2n} P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{2n} q_k = \sum_{k=n+1}^{2n} q_{2n-k}$

وبالتالي $P(X > n) = q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + ... + q_1 + q_0 = \sum_{k=0}^{n-1} q_k = P(X < n)$

لدينا من جهة أخرى الأحداث $(X < n)$، $(X = n)$ و $(X > n)$ تشكل تجزئة للفضاء Ω.

وبالتالي ينتج من ذلك أنّ $P(X < n) + P(X = n) + P(X > n) = 1$

ومنه $2P(X > n) = 1 - P(X = n)$

وأخيرا نجد $P(X > n) = \frac{1}{2} - \frac{p_n}{2}$.

حلّ 28 :-

3. نكرر $2n$ مرّة ، في نفس الشروط وبصفة مستقلة تجربة ذات مخرجين وهي تجربة إلقاء القطعة النقدية. إذن نحن أمام تجربة برنولي مكررة $2n$ مرّة ، في نفس الشروط وبصفة مستقلة.

لدينا القطعة النقدية متوازنة، منه فإنّ احتمال ظهور الوجه هو $p = 0,5$ واحتمال ظهور الظهر هو $q = 1 - p = 0,5$.

بما أنّ X هو المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرّات التي يظهر فيها وجه القطعة خلال $2n$ رمية، فإنّ هذا الأخير يتبع القانون الثنائي $B(2n ; 0,5)$ ذو الوسيطين $2n$ و $p = 0,5$.

ومنه $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 2n\}$

و $p(X = k) = \binom{2n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{k}$

وينتج بالحساب المباشر $E(X) = 2np = n$ و $V(X) = 2npq = \frac{n}{2}$.

4.

أ) التعبير عن p_n بدلالة n.

بالحساب المباشر نجد $p_n = p(X = n) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

ب) إثبات أنّه مهما كان العدد الطبيعي n غير المعدوم، $p_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}p_n$.

لدينا $p_{n+1}=\dfrac{1}{4^{n+1}}\dbinom{2n+2}{n+1}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4^n}\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+2-n-1)!}$

ومنه $p_{n+1}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4^n}\dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n)!(n+1)(n)!}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4^n}\dfrac{2(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n)!(n)!}$

وبالتالي $p_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}\dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}=\dfrac{2n+1}{2n+2}p_n$.

ج) نبرهن بالتراجع أنّه مهما كان العدد الطبيعي n غير المعدوم، $p_n\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

نرمز بالرمز $P(n)$ إلى المتباينة $p_n\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

●**بداية التراجع**: نتحقق من صحة $P(1)$.

بالحساب لدينا $p_1=\dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2\times1+1}}$ لأنّ $\sqrt{3}\leqslant\sqrt{4}$ ومنه $p_1\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2\times1+1}}$.

●**برهان التراجع (توريث الخاصية):**

ليكن $k\in\mathbb{N}^*$. نفرض أنّ $P(k)$ صحيحة أي نفرض أنّ $p_k\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$

ونبرهن صحة $P(k+1)$. أي نبرهن أنّ $p_{k+1}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2k+3}}$

حسب جواب السؤال 2. ب) لدينا $p_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}p_n$ ومن فرضية التراجع لدينا $p_k\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

ومنه ينتج: $p_{k+1}\leqslant\dfrac{2k+1}{2k+2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}$ أي $p_{k+1}\leqslant\dfrac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}$.

لإثبات صحة $P(k+1)$، يكفي إثبات أنّ $\dfrac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2k+3}}$

وبالتالي إثبات أنّ $\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}\leqslant 2k+2$.

نعلم أنّ:

$$(2k+1)(2k+3)-(2k+2)^2=4k^2+8k+3-(4k^2+8k+4)=-1$$

إذن

$$0<(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$$

ومنه

$$\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3}<2k+2$$

وهكذا نجد

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

وأخيرا ينتج $\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\leqslant\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}\leqslant p_{k+1}$ وهذا يعني أنّ $P(k+1)$ صحيحة.

تمرين 29:

أرادت قررت وكالة لنقل المسافرين بالحافلات تحسين عمليات المراقبة بغية التقليل من خسائرها جراء غش بعض المسافرين. لذلك قامت بدراسة مبنية على المراقبة اليومية لمسارين من المسارات التي تستعملها وهذا لمدّة عشرين يوما، أي مراقبة أربعين مسارا في المجموع. نفرض أنّ عمليات المراقبة مستقلة عن بعضها البعض و أنّ احتمال أن يتعرض أي مسافر إلى المراقبة هو p.

سمير سيئ الطبع فهو يغش بصفة دائمة عندما يستقل الحافلة.

ليكن X_i المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا تعرض سمير للمراقبة في المسار ذي الرتبة i والقيمة 0 في الحالة الأخرى.

ليكن المتغير العشوائي المعرّف كما يلي: $\mathrm{X}=X_1+X_2+\ldots+X_{40}$.

1. بيّن أنّ X يمثل عدد المرّات التي تتم فيها مراقبة سمير، عين قانون الاحتمال للمتغير X.
2. نفرض في هذا السؤال أنّ $p=\frac{1}{20}$.

أ) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير X.

ب) احسب الاحتمالات $p(X=0)$، $p(X=1)$ و $p(X=2)$.

ج) احسب بتقريب قدره 10^{-4}، احتمال أن يتعرض سمير إلى ثلاث مراقبات على الأقل.

حلّ- 29 :-

.1

- إثبات أنّ X يمثل عدد المرّات التي تتم فيها مراقبة سمير. نعلم أنّ الغشاش سمير يغش بصفة دائمة عندما يستقل الحافلة، إذن كل مرّة يتعرض فيها إلى المراقبة يُضبط في حالة غش وبالتالي يأخذ المتغير X_i القيمة 1. بجمع هذه القيم نحصل بالفعل على عدد المرّات التي تعرض فيها سمير للمراقبة. أي X يمثل عدد المرّات التي تتم فيها مراقبة سمير.
- تعيين قانون الاحتمال للمتغير X.

يمثل X عدد النجاحات في 40 تجربة لبرنولي (كل تجربة هي مراقبة لمسارين ولها مخرجين هما، مراقبة سمير وبالتالي ضبطه في حالة غش أو العكس أي عدم تعرض سمير للمراقبة) مكررة في نفس الشروط ومستقلة عن بعضها البعض.

إذن X يتبع القانون الثنائي $B(40, p)$ ذو الوسيطين 40 و p.

.2 نفرض أنّ $p = \frac{1}{20}$.

أ) لدينا $X(\Omega) = \{1,2,...,40\}$.

الأمل الرياضياتي هو $E(X) = np = 40p = 40 \times \frac{1}{20} = 2$.

ب) بما أنّ X يتبع القانون الثنائي $B(40, p)$

فإنّ $P(X = k) = \binom{40}{k} p^k (1-p)^{40-k}$ مع $k \in \{1,2,...,40\}$

ومنه $P(X = k) = \binom{40}{k} (\frac{1}{20})^k (\frac{19}{20})^{40-k}$

من أجل $X = 0$ ، $P(X = 0) = \binom{40}{0} (\frac{1}{20})^0 (\frac{19}{20})^{40}$.

من أجل $X = 1$ ، $P(X = 1) = \binom{40}{1} (\frac{1}{20})^1 (\frac{19}{20})^{39}$.

من أجل $X=2$ ، $P(X=2)=\binom{40}{2}(\frac{1}{20})^2(\frac{19}{20})^{38}$.

ج) حساب احتمال أن يتعرض سمير إلى ثلاث مراقبات على الأقل وذلك بتقريب قدره 10^{-4}

.

الاحتمال المطلوب حسابه هنا هو $P(X>2)$.

لدينا $P(X>2)=1-P(X\leqslant 2)$

وحيث أنّ $P(X\leqslant 2)=\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right)$

فإنّ $P(X>2)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right)$

أي $P(X>2)=1-\left(\binom{40}{0}(\frac{1}{20})^0(\frac{19}{20})^{40}+\binom{40}{1}(\frac{1}{20})^1(\frac{19}{20})^{39}+\binom{40}{2}(\frac{1}{20})^2(\frac{19}{20})^{38}\right)$.

ومنه $P(X>2)\approx 1-\left(0,1285...+0,2705...+0,2776...\right)$

وأخيرا نجد $P(X>2)\approx 1-0,6767...\approx 0,3232...\approx 0,3233$.

تمرين 30:

تحتوي قارورة على غاز يتكون من 75% من الجزيئات A و 25% من الجزيئات B. تقذف هذه الجزيئات، عبر مصفاة، نحو خزانين K_1 و K_2. احتمال أن تدخل إحدى جزيئات

النوع A إلى الخزان K_1 هو $\frac{1}{3}$ واحتمال دخولها إلى الخزان K_2 هو $\frac{2}{3}$. بينما احتمال أن تدخل إحدى جزيئات النوع B إلى أي من الخزانين هو $\frac{1}{2}$.

1. نعتبر جزيئة كيفية من هذا الغاز، احسب احتمالات الأحداث الآتية:

A_1: الجزيئة هي من النوع A وتدخل في الخزان K_1.

A_2: الجزيئة هي من النوع A وتدخل في الخزان K_2.

B_1: الجزيئة هي من النوع B وتدخل في الخزان K_1.

B_2: الجزيئة هي من النوع B وتدخل في الخزان K_2.

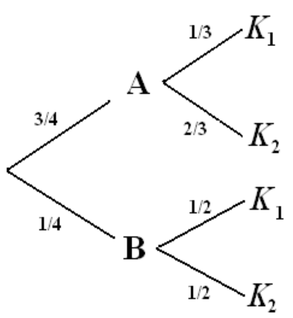
C_1: الجزيئة تدخل إلى الخزان K_1.

C_2: الجزيئة تدخل إلى الخزان K_2.

2. نقذف 5 جزيئات متتالية عبر هذه المصفاة وبصفة مستقلة. نعتبر أنّ عدد الجزيئات المقذوفة كاف بما يحافظ على النسبتين 75% و 25% خلال التجربة. احسب احتمال الحادثة « توجد جزيئة واحدة على الأقل في الخزان K_2 »

حلّ- 30 -:

1. نشكل أوّلا شجرة الاحتمالات بناء على المعطيات المتوفرة.



لدينا $p(A)=\frac{3}{4}$ و $p(B)=\frac{1}{4}$

$p_A(k_1)=\frac{1}{3}$ و $p_A(k_2)=\frac{2}{3}$

و $p_B(k_1)=p_B(k_2)=\frac{1}{2}$.

الحادثة A_1 هي تقاطع تحقق الحادثتين:

« الجزيئة هي من النوع A » و « الجزيئة تدخل إلى الخزان K_1 »

ومنه نكتب $p(A_1)=p(A\cap k_1)=p(A).p_A(k_1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.

نفس الشيء بالنسبة إلى A_2 و B_1 و B_2 حيث ينتج:

$p(A_2)=p(A\cap k_2)=p(A).p_A(k_2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ ،

$p(B_1)=p(B\cap k_1)=p(B).p_B(k_1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ ،

$p(B_2)=p(B\cap k_2)=p(B).p_B(k_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ ،

بما أنّ A وB تشكلان تجزئة لمجموعة الإمكانيات، فإنّه ينتج حسب قانون الاحتمالات الكلية

$$p(C_1) = p(A \cap k_1) + p(B \cap k_1) = p(A_1) + p(B_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$p(C2) = 1 - p(C1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

2. عند قذف 5 جزيئات عبر المصفات، فإنّ احتمال أنّ تدخل كل واحدة منها إلى الخزان K_1 هو $\frac{3}{8}$.

وبما أنّ هذه الجزيئات مستقلة عن بعضها، فإنّ احتمال دخولها جمعا إلى الخزان K_1 هو $\left(\frac{3}{8}\right)^5$.

احتمال تحقق الحادثة النافية « توجد جزيئة واحدة على الأقل في الخزان K_2 » هو $1-\left(\frac{3}{8}\right)^5$.