الخليل للرياضيات
قويسم

سنة **ثانية** ثانوي
الشعب:
علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي
education-onec-dz.blogspot.com

سلسلة تمارين حول:

دراسة الدوال

[مع أسئلة متنوعة في دراسة الدوال والإجابة عنها]

إعداد الأستاذ:
قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:
[14 أفريل 2022]

.1

أسئلة متنوعة في دراسة الدوال والإجابة عنها

السؤال	الإجابة
فسّر بيانيا: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب، معادلته: $x = a$
فسّر بيانيا: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا محور الفواصل معادلته: $y = b$
فسر بيانيا: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$ عند $\pm\infty$
بيّن أن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f)	نبرهن أنّ: $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
بيّن أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته ملاحظة: ◆ خاص بشعبتي: رياضيات + تقني رياضي	• إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$ نبرهن: $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ ومعادلة المستقي هي: $y = ax + b$ ◆ إذا لم يكن ذلك: نحسب العددين a وb من $\mathbb{R}$ كما يلي: $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$ ومعادلة المستقي هي: $y = ax + b$
فسر بيانيا: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$	المنحنيين (C_f) و(C_g) متقاربان عند $\pm\infty$
ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $(\Delta): y = ax + b$ ◆ نطبق نفس الإجابة على السؤال التالي: ادرس وضعية المنحنيين (C_f) و(C_g)، بوضع: $d(x) = f(x) - g(x)$	ندرس إشارة الفرق: $d(x) = f(x) - y$ • $d(x) > 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع فوق (Δ) • $d(x) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقطع (Δ) • $d(x) < 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع تحت (Δ)

الإجابة	السؤال
نبين أنّ: $\begin{cases} (2\alpha - x) \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$	بيّن أنّ النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f)
نستنتج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\Omega(\alpha;\beta)$	بيّن أنّ: $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ ، ماذا تستنتج؟
نبين أنّ: $\begin{cases} (2\alpha - x) \in D_f \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$	بيّن أنّ المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f)
نستنتج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$	بيّن أنّ $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ، ماذا تستنتج؟
نبين أنّ: $\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	بيّن أنّ الدالة f فردية
نبين أنّ: $\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	بيّن أنّ الدالة f زوجية
نستنتج أنّ: الدالة f زوجية ، و المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.	بين أنّ: $f(-x) - f(x) = 0$ أو $f(-x) = f(x)$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أنّ: الدالة f فردية، ومبدأ المعلم $O(0;0)$ مركز تناظر لـ (C_f)	بين أنّ: $f(-x) + f(x) = 0$ أو $f(-x) = -f(x)$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أنّ: المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$	بين أنّ: $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أنّ: المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\beta}{2}\right)$	بين أنّ: $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أنّ: المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \alpha$	بين أنّ: $f(2\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أنّ: المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \frac{\alpha}{2}$	بين أنّ: $f(\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أن الدالة f دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله a	بين أنّ: $f(x + a) = f(x)$ ماذا تستنتج؟

الصيغة العادية لمعادلة المماس في النقطة $\omega(a;b)$ تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة a	نكتب المعادلة $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ ثم نحسب $f(a)$ و $f'(a)$ و نعوض في المعادلة أعلاه
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الترتيبة b	نبحث عن a بحل المعادلة $f(a)=b$ ثم نكتب معادلة المماس عند a
عين بيانيا العدد المشتق $f'(a)$ ◆ ملاحظة: معامل توجيه المماس $= f'(x_0)$	معامل التوجيه $= \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = f'(x)$ حيث A وB نقطتين من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها يساوي α ؟	نبحث عن a بحل المعادلة $f'(a)=\alpha$ ثم نعوض الحلول في معادلة المماس (عدد الحلول يمثل عدد المماسات)
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذو المعادلة $y = \alpha x + \beta$	نبحث عن a بحل المعادلة $f'(a)=\alpha$ ثم نعوض الحلول في معادلة المماس (عدد الحلول يمثل عدد المماسات)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(\alpha;\beta)$ ؟	نبحث عن a بحل المعادلة $\beta = f'(a)(\alpha - a) + f(a)$ (عدد الحلول يمثل عدد المماسات)
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذو المعادلة $y = \alpha x + \beta$ (في معلم متعامد ومتجانس)	نبحث عن a بحل المعادلة $f'(a) = -\dfrac{1}{\alpha}$ (عدد الحلول يمثل عدد المماسات)

إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة $(a, b, c, \dots)$

أحيانا تعطى لنا عبارة الدالة بثوابت مجهولة $(a, b, c, \dots)$ ويُطلب منا تعيينها علما أنّ المعطيات المباشرة وغير المباشرة تكون بعدد الثوابت:

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت: $(a, b, c, \dots)$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل. (أو (C_f) يقبل ذروة في النقطة $A(x_0; y_0)$)	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y = mx + k$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

رسم منحنى (C_g) إنطلاقا من المنحنى (C_f)

إذا كان	فإنّ
$g(x) = f(x+a) + b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$
$g(x) = -f(x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل
$g(x) = f(-x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب
$g(x) = -f(-x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$g(x) = f(\lvert x \rvert)$	الدالة g زوجية و (C_g) منطبقا على (C_f) لما $x \geq 0$ و (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لما $x \leq 0$
$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	(C_g) ينطبق على (C_f) لما (C_f) يكون فوق محور الفواصل وَ (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل لما (C_f) يكون تحت محور الفواصل

.2

قواعد أساسية في دراسة النهايات

◄ نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

• النهاية عند $\pm\infty$ لكثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2+x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2)=+\infty$

ملاحظة: يمكن استعمال هذه القاعدة حتى ولو كان كثير الحدود مركب في دالة ناطقة أو جذرية او أسية الخ...

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\left((x^2-1)e^{-x^3-2x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left((x^2)e^{-x^3}\right)=+\infty$$

• النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$

مثال :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2}\right)=3$$

◄ حالات عدم التعيين:

❶ $\frac{0}{0}$ ❷ $0\times\infty$ ❸ $\frac{\infty}{\infty}$ ❹ $+\infty-\infty$

◄ طرق إزالة حالات عدم التعيين:

1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ حيث:

$$f(x_0)=g(x_0)=0$$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهما على الشكل: $(x-x_0)Q(x)$ ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد:

مثال 1:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{4x+7}{x+3}\right)=\frac{11}{4}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^3+8}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to-2}\left(\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to-2}\left(\frac{x^2-2x+4}{x-2}\right)=-3$$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2+3x-7$ على الشكل: $(x-1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax+b$ ومنه:

$$(x-1)Q(x)=(x-1)(ax+b)=ax^2+(b-x)x-b$$

$$\begin{cases}a=4\\ b-a=3\\ -b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ b=7\end{cases}\Rightarrow 4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$$

ط2: القسمة الإقليدية:

مثال:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+8 & x+2\\ \cline{2-2}
\underline{-x^3-2x^2} & x^2-2x+4\\
\quad -2x^2+8 & \\
\quad \underline{+2x^2+4x} & \\
\quad +4x+8 & \\
\quad \underline{-4x-8} & \\
\quad\quad 0 &
\end{array}$$

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

مثال 1: $p(x)=\underbrace{4}_{a}x^2+\underbrace{3}_{b}x\underbrace{-7}_{c}$ ، $x_0=1$

معاملات $p(x)$	$c=-7$	$b=3$	$a=4$	
الجذر x_0	7	4	0	$x_0=1$
معاملات $Q(x)$	$c'=0$	$b'=7$	$a'=4$	

$$\Rightarrow p(x)=(x-1)(4x+7)$$

مثال 2: $p(x)=x^3-x^2-4x+4$ ، $x_0=2$

معاملات $p(x)$	$d=4$	$c=-4$	$b=-1$	$a=1$	
الجذر x_0	-4	2	2	0	$x_0=2$
معاملات $Q(x)$	$d'=0$	$c'=-2$	$b'=1$	$a'=1$	

$$\Rightarrow p(x)=(x-2)(x^2+x-2)$$

2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال 1:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)=\frac{1}{2}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{5-x}+2}\right)=-\frac{3}{2}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال3) أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال4)

مثال 3:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}{\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^2-\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)^2}{x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x+1+|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}\right)=\frac{1}{2}$$

مثال 4:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(x\left(\underbrace{2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}_{\to1}\right)\right)=-\infty$$

3) استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=f'(2)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\sqrt{x-1}\quad;\quad f(2)=1\quad;\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)=1$$

$$f(x)=\sin(x)\quad;\quad f(0)=0\quad;\quad f'(x)=\cos(x)$$

$$f=v\circ u:\begin{cases}\lim_{x\to a}u(x)=b\\ \lim_{x\to b}v(x)=c\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=c$$

◄ المستقيمات المقاربة:

❶	$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$	⇐ **المستقيم** $x=a$ **مقارب عمودي (يوازي محور التراتيب)**
❷	$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b$	⇐ **المستقيم** $y=b$ **مقارب أفقي (يوازي محور الفواصل)**
❸	$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ **حيث** $a\neq0$	⇐ **المستقيم** $y=ax+b$ **مقارب مائل**

◄ الوضع النسبي بين منحنى ومستقيم:

- **إذا كان** $f(x)-y_{(\Delta)}>0$ **فإن منحنى الدالة** f **فوق المستقيم** (Δ)
- **إذا كان** $f(x)-y_{(\Delta)}<0$ **فإن منحنى الدالة** f **تحت المستقيم** (Δ)
- **إذا كان** $f(x)-y_{(\Delta)}=0$ **فإن منحنى الدالة** f **يقطع المستقيم** (Δ)

مثال: نعتبر f **الدالة العددية المعرفة على** $\mathbb{R}-\{-1\}$ **بـ:**

$$f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+2}{(x+1)^2}\right)=0$$

ومنه (C_f) **يقبل مستقيما مقاربا مائلا** (d) **بجوار** $\pm\infty$ **معادلته:**

$$y_{(d)}=x+1$$

- **تحديد وضعية** (C_f) **بالنسبة إلى** (d)**:**

$$f(x)-(x+1)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2>0$ **ومنه الإشارة من البسط**

$$3x+2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad$ $\frac{-2}{3}$ $\quad +\infty$
$f(x)-y_{(d)}$	$-$ ‖ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

- (C_f) **تحت** (Δ) **لما** $x\in\ ]-\infty;-1[\ \cup\ ]-1;-\frac{2}{3}[$
- (C_f) **يقطع** (Δ) **لما** $x\in=-\frac{2}{3}$
- (C_f) **تحت** (Δ) **لما** $x\in\ ]-\frac{2}{3};+\infty[$

◄ أمثلـــة:

مثال 1: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{3x^2-1}}{2-x}\right)$ ح . ع . ت من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{3x^2-1}}{2-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}}{2-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\sqrt{3-\frac{1}{x^2}}}{\frac{2}{x}-1}\right)=\sqrt{3}$$

مثال 2: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}+x-2\right)$ ح . ع . ت من الشكل $(+\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}+x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}+x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+x-2\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}\right)\right)=+\infty$$

مثال 3: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-3}\right)$ ح . ع . ت من الشكل $(+\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-3}\right)\left(\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-3}\right)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(2x^2-1)-(2x^2-3)}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-3}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2-3}}\right]=0$$

مثال 4: $\lim_{\substack{x\to1\\ >}}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$ ح . ع . ت من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ >}}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)=\lim_{\substack{x\to1\\ >}}\left(\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}\right)=\lim_{\substack{x\to1\\ >}}(x+1)=0$$

3.
التمارين

التمريـــــن 01

[نهاية دالة ناطقة]

من أجل دالة f، احسب النهايات التالية:

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+2)$

❷ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right)$

❸ $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\left(\dfrac{x^2+3x-1}{x-2}\right)$

❹ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-1}{x-2}\right)$

❺ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\dfrac{2x+1}{-x^2-3x+4}\right)$

❻ $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^3+4x^2+3x-1}{(x+1)^2}\right)$

التمريـــــن 02

[نهاية دالة صماء]

من أجل دالة f، احسب النهايات التالية:

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+2}+x\right)$

❷ $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ >}}\left(\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-25}}\right)$

❸ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}}\left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-2}\right)$

❹ $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x^2+5}}{x-2}\right)$

❺ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)$

❻ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

❼ $\lim\limits_{x\to 9}\left(\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)$

❽ $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

التمريـــــن 03

[نهاية دالة باستعمال العدد المشتق]

من أجل دالة f، وباستعمال نهاية دالة باستعمال العدد المشتق، احسب النهايات التالية:

❶ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x-1}{x}\right)$

❷ $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x\sqrt{x}-4x+4\sqrt{x}}{x-4}\right)$

❸ $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\dfrac{\sin x}{x-\pi}\right)$

❹ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(-2x)}{x}\right)$

❺ $\lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}\right)$

❻ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

التمريـــن 04

[المشتقات]

f دالة، احسب دالتها المشتقة في كل حالة مما يلي:

❶ $f(x)=\sqrt{2\sin^2 x+1}$ ❷ $f(x)=\sqrt{2x-3}+x$

❸ $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$ ❹ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-1}$

❺ $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ ❻ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+3}}$

التمريـــن 05

[المستقيمات المقاربة]

I) بيّن أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب، يطلب تعيين معادلة له، في كل حالة مما يلي:

❶ $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$ ، $I=\mathbb{R}-\{-1\}$

❷ $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}$ ، $I=\mathbb{R}^*$

❸ $f(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$ ، $I=\mathbb{R}-\{-1\}$

❹ $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ، $I=]2;+\infty[$

❺ $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2+x-2}$ ، $I=]-\infty;-2[$

التمريـــن 06

[المستقيمات المقاربة]

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$$

❶ عين الأعدا الحقيقية: a، b، c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ يكون:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$$

❷ استنتج أنّ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

❸ حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d).

التمريـــن 07

[المستقيمات المقاربة]

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{(x-1)^2(x+1)}{x+2}$$

و الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 3x + 5$$

❶ عين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ يكون:

$$f(x) = g(x) + \frac{a}{x+2}$$

❷ احسب $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - g(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

التمريـــــن 08

[دراسة دالة عددية]

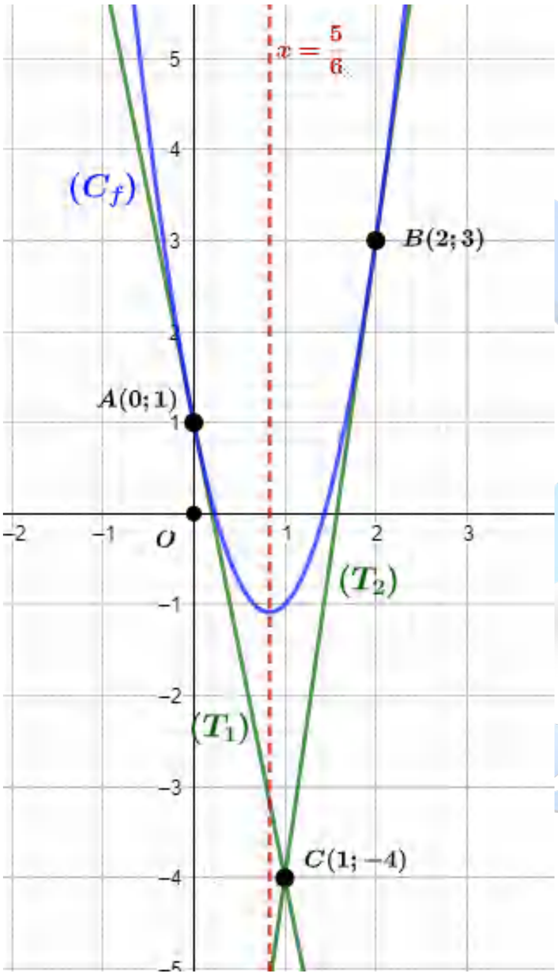
I) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(C_f) تمثيلها البياني المعطى في الشكل المقابل:

حيث: (C_f) يمر بالنقطتين $A(0;1)$ و $B(2;3)$ ،

والمماسين (T_1) و (T_2) في النقطتين A وB يتقاطعان في النقطة $C(1;-4)$



❶

أ/ اكتب معادلتي المماسين عند النقطتين A و B.

ب/ استنتج $f'(0)$ و $f'(2)$

❷

أ/ أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c.

ب/ ادرس تغيرات الدالة f

❸ أوجد المماسات لـ (C_f) التي تمر بالمبدأ O

❹ بين أنّ المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) .

II) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = 3x^2 - 5|x| + 1$$

❶ بين أنّ h دالة زوجية

❷ اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

❸ وضح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحنى الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه.

التمريـــــن 09

[دراسة دالة عددية]

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g .

❷ احسب $g(-2)$ ، ثم حل المعادلة $g(x) = 0$

❸ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}$$

❶ بين أنّ:

$$f'(x)=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

❷ ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

❸ a، b، c ثلاث أعداد حقيقية، بين أنّ:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$$

❹

أ/ بين أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل وليكن (Δ)، يطلب تعيين معادلتيهما.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❺ ارسم المنحنى (C_f) علما أن (C_f) يقطع حامل محور الفوصل في النقطة α ذات الفاصلة -0.2

❻ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث: $f(x)=2x+m$

III) h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=f(|x|)$

❶ بين أنّ الدالة h زوجية.

❷ وضح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) . ثم أنشئه.

التمرين 10

[دراسة دالة عددية]

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ عين الاعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y=x-3$، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

❷ ادرس تغيرات الدالة f.

❸ اثبت أنّ (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3)، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2).

❹ مثل بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ، ثم المنحنى (C_f) .

❺ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)+3x-m=0$.

❻ g دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ بـ

$$g(x)=f(|x|)$$

أ/ بين أنّ الدالة g زوجية.

ب/ بيّن أنه يمكن إنشاء (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم مثل بيانيا (C_g) في المعلم السابق.

التمريـــــن 11

[دراسة دالة عددية]

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

❷ اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

حيث: a، b و c أعدادا حقيقية يطلب تعيينها.

❸ استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

❹ حدد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل.

❺ مثل بيانيا في المعلم السابق المستقيمات المقاربة، والمنحني (C_f) .

التمريـــــن 12

[دراسة دالة عددية]

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=x^3+3x^2-4$، وليكن ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

❶ ادرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول التغيرات.

❷ عين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات.

❸ برهن أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

❹ عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.

❺ مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

❻ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة: $x^3+3x^2-4-m=0$.

التمريـــــن 13

[دراسة دالة عددية]

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في م.م.م $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيت

❷

أ/ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ يطلب تعيين معادله له.

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

❸

أ/ بين أنه منهما كان $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإنّ:
$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$
ب/ عين اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4. اكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
5. بين أن النقطة $\omega(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
6. مثل بيانيا كل من (Δ)، (T) و (C_f)

التمرين 14

[دراسة دالة عددية]

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 3x + b$$
حيث a و b ، و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

I) عين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 .

II) نفرض أنّ $a = -1$ ، $b = 1$ ؛

1. ادرس تغيرات الدالة f.
2. احسب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$.
3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 .
4. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (Δ).
5. مثل بيانيا كل من (T) و (C_f) .

التمرين 15

[دراسة دالة عددية]

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :
$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x + 2}$$
و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. عين العددين الحقيقين a و b بحيث المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل، ثم بيّن أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل:
$$f(x) = 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + 2x + 2}$$
2. ادرس تغيرات الدالة f، ثم شكل جدول التغيرات.
3. بين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب تعيين معادلته.
4. عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الاحداثيات.
5. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).
6. نسمي ω نقطة تقاطع المنحنى (C_f) و (Δ)، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحنى (C_f) .
7. عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω.
8. مثل بيانيا كل من (T)، (Δ) و (C_f) .

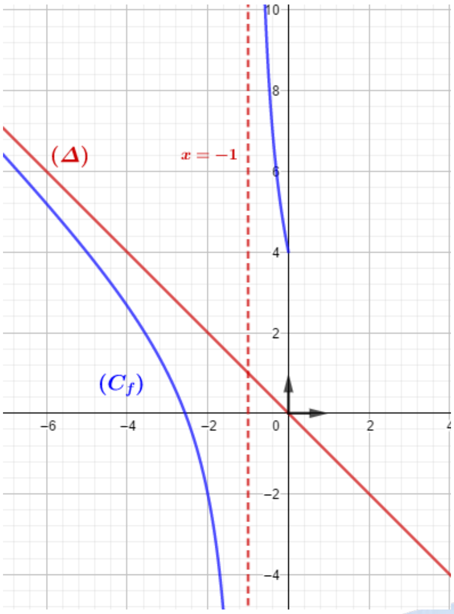
التمريـــن 16

[دراسة دالة عددية]

I) f دالة معرفة على $I = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;0\right[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس كما هو مبين في الشكل



❶

أ/ احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب/ بقراءة بيانية ودون دراسة تغيرات الدالة f شكل جدول تغيراتها

❷ g دالة معرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ كما يلي:

$$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم السابق

أ/ احسب نهاية g عند $+\infty$

ب/ تحقق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادله له.

ج/ ادرس تغيرات الدالة g.

II) k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي:

$$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$$

❶ اكتب $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

❷ اكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) للدالة k عند الناقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$.

❸ ارسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) .

بالتوفيق

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

4. الحلول

-حلول مقترحة-

التمريـــــن 01

من أجل دالة f، حساب النهايات التالية:

❶ $$\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+2)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$$

❷ $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n-1+1)(n+1)}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right)=\lim_{n\to+\infty}(n)$$
$$=+\infty$$

❸ $$\lim_{\substack{x\to2\\>}}\left(\frac{x^2+3x-1}{x-2}\right)=\frac{4+6-1}{0^+}=\frac{9}{0^+}=+\infty$$

❹ $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

❺ $$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\left(\frac{2x+1}{-x^2-3x+4}\right):$$

لدينا: $-x^2+3x-4=0$ لحلها نستعمل المميز Δ

$$\Delta=(-3)^2-4(-1)(4)=25$$

ومنه: $x_1=-4$ و $x_2=1$

لدينا: إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$-x^2-3x+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

لما $x\underset{<}{\to}1$ نجد $(-x^2-3x+4)>0$ ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\left(\frac{2x+1}{-x^2-3x+4}\right)=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

❻ $$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^3+4x^2+3x-1}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

❼ $$\lim_{x\to9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}\right)=\lim_{x\to9}\left(\frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}\right)=\lim_{x\to9}\left(\frac{1}{3+\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

❽ $$\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to3}\left(\frac{x+1+2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\right)$$
$$=\lim_{x\to3}\left(\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right)=\boxed{\frac{1}{4}}$$

التمريـــن 02

من أجل دالة f، حساب النهايات التالية:

❶

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+2}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$$
$$=+\infty$$

---

❷

$$\lim_{\substack{x\to5\\>}}\left(\frac{x-5}{\sqrt{x^2-25}}\right)=\lim_{\substack{x\to5\\>}}\left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{\left(\sqrt{x^2-25}\right)\left(\sqrt{x^2-25}\right)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to5\\>}}\left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{x^2-25}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to5\\>}}\left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{x^2-5^2}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to5\\>}}\left(\frac{(x-5)\sqrt{x^2-25}}{(x-5)(x+5)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to5\\>}}\left(\frac{\sqrt{x^2-25}}{(x+5)}\right)$$
$$=\frac{0}{10}$$
$$=0$$

---

❸

$$\lim_{\substack{x\to-2\\>}}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}\right)=\lim_{\substack{x\to-2\\>}}\left(\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x-2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\>}}\left(\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to-2\\>}}\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$$
$$=\frac{1}{0^+}$$
$$=+\infty$$

❹

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+5}}{x}\right)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}\right)$$
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{x}\right)$$
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}\right)$$
$$=\sqrt{4}$$
$$=2$$

---

❺

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1-\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+2}-x^2-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right)}\right)$$
$$=0$$

---

❻

$$\lim_{\substack{>\\x\to-1}}\left(x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)=-\sqrt{\frac{2}{0^+}}$$
$$=-\infty$$

التمريـــــن 03

من أجل دالة f، حساب النهايات التالية:

❶ $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$$

نضع: $g(x)=\cos x$

ومنه: $g'(x)=-\sin x$

وَ: $g(0)=1$

اذن:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)$$
$$=g'(0)$$
$$=0$$

❷

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{x\sqrt{x}-4x+4\sqrt{x}}{x-4}\right)$$

نضع: $g(x)=x\sqrt{x}-4x+4\sqrt{x}$

ومنه:

$$g'(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}-4+\frac{4}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{3x-8\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}}$$

وَ: $g(4)=0$

اذن:

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{x\sqrt{x}-4x+4\sqrt{x}}{x-4}\right)=\lim_{x\to4}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-4}\right)$$
$$=g'(4)$$
$$=\frac{12-16+4}{4}$$
$$=\frac{0}{4}$$
$$=0$$

---

❸

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x}{x-\pi}\right)$$

نضع: $g(x)=\sin x$

ومنه: $g'(x)=\cos x$

وَ: $g(\pi)=0$

إذن:

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x}{x-\pi}\right)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x-0}{x-\pi}\right)$$
$$=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{g(x)-g(\pi)}{x-\pi}\right)$$
$$=g'(\pi)$$
$$=-1$$

---

❹

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(-2x)}{x}\right)$$

نضع: $g(x)=\sin(-2x)$

ومنه: $g'(x)=-2\cos x$

وَ: $g(\pi)=0$

إذن:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(-2x)}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(-2x)-0}{x-0}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}\right)$$
$$=g'(0)$$
$$=-2$$

5

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}\right)$$

نضع: $g(x)=\sqrt{x+3}$

ومنه: $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

وَ: $g(6)=3$

إذن:

$$\lim_{x\to 6}\left(\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}\right)=\lim_{x\to 7}\left(\frac{g(x)-g(6)}{x-6}\right)=g'(6)=\frac{1}{6}$$

6

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

نضع: $x^2=t$

لما: $x^2\to 1$ **نجد:** $t\to 1$

ومنه:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{\substack{t\to 1\\ <}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)=\lim_{\substack{t\to 1\\ <}}\left(\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}\times\sqrt{1-t}}\right)=\lim_{\substack{t\to 1\\ <}}\left(\frac{\sqrt{1-t}}{1-t}\right)=\lim_{\substack{t\to 1\\ <}}\left(-\frac{\sqrt{1-t}}{t-1}\right)$$

نضع: $g(t)=\sqrt{1-t}$

ومنه: $g'(t)=\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}$

وَ: $g(1)=0$

إذن:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\lim_{\substack{t\to 1\\ <}}\left(-\frac{\sqrt{1-t}}{t-1}\right)=\lim_{\substack{t\to 1\\ <}}\left(-\frac{g(t)-g(1)}{t-1}\right)=-g'(1)=+\infty$$

التمريـــــن 04

حساب مشتقة الدالة f في كل حالة مما يلي:

1 $f(x)=\sqrt{2x-3}+x$

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}+1=\frac{1+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}}$$

❷ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-4}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-(\sqrt{x}-4)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{\frac{x-1-2x+8\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{8\sqrt{x}-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

---

❸ $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$

$$f'(x)=\frac{-\sin x(\sin x-1)-\cos x\cdot\cos x}{(\sin x-1)^2}$$
$$=\frac{-\sin^2 x+\sin x-\cos^2 x}{(\sin x-1)^2}$$
$$=\frac{\sin x-1}{(\sin x-1)^2}$$
$$=\frac{1}{\sin x-1}$$

---

❹ $f(x)=\sqrt{2\sin^2 x+1}$

$$f'(x)=\frac{2\cdot 2\cos x\cdot\sin x}{2\sqrt{2\sin^2 x+1}}$$
$$=\frac{2\cos x\cdot\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x+1}}$$

---

❺ $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x\cdot x^2}{(x^2-4)^2}$$
$$=\frac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2}$$
$$=\frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

---

❻ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{x+3}}$

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-2}}\sqrt{x+3}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\sqrt{2x-2}}{x+3}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-2}}-\frac{\sqrt{2x-2}}{2\sqrt{x+3}}}{x+3}$$
$$=\frac{\frac{2(x+3)-(2x-2)}{2\sqrt{(2x-2)(x+3)}}}{x+3}$$
$$=\frac{\frac{x+3-x+1}{\sqrt{(2x-2)(x+3)}}}{x+3}$$
$$=\frac{4}{(x+3)\sqrt{(2x-2)(x+3)}}$$

التمريـــــن 05

I) تبيين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب (d) ، في كل حالة مما يلي:

❶ $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

لدينا:

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x=-1$

---

❷ $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}$

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)=1$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=1$

---

❸ $f(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x+\frac{4}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{4}{x+1}\right]=0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=x$

---

❹ $f(x)=\dfrac{-x+1}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+1}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=0$

---

❺ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right)=0$$

ومنه منحني الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته $y=0$

التمرين 06

❶ تعيين الأعداد الحقيقية: a، b، c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$ يكون: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$:

$$\begin{aligned}
f(x)&=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}\\
&=\frac{(ax+b)(x+1)^2+cx+d}{(x+1)^2}\\
&=\frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+cx+d}{(x+1)^2}\\
&=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+cx+d}{(x+1)^2}\\
&=\frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+b+d}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}a=1\\2a+b=3\\a+2b+c=6\\b+d=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=3\\d=2\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

❷ استنتاج أنّ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) عند $\pm\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+1)] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x+2}{(x+1)^2}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x+2}{x^2+2x+1}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{x}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y_{(d)} = x + 1$

❸ تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d):

لدينا:

$$f(x) - (x+1) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة الفرق من البسط:

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

إذن:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f(x) - y_{(d)}$	$-$	‖ $-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (d) لما: $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;-\frac{2}{3}\right[$.
- (C_f) يقطع (d) لما: $x = -\frac{2}{3}$.
- (C_f) فوق (d) لما: $x \in \left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$.

التمريـــن 07

❶ تعيين العدد الحقيقي a بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ يكون: $f(x) = g(x) + \frac{a}{x+2}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{(x-1)^2(x+1)}{x+2}\\ &= \frac{(x^2-2x+1)(x+1)}{x+2}\\ &= \frac{x^3-2x^2+x+x^2-2x+1}{x+2}\\ &= \frac{x^3-x^2-x+1}{x+2}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$f(x)=g(x)+\frac{a}{x+2}$$
$$=x^2-3x+5+\frac{a}{x+2}$$
$$=\frac{(x^2-3x+5)(x+2)+a}{x+2}$$
$$=\frac{x^3-3x^2+5x+2x^2-6x+10+a}{x+2}$$
$$=\frac{x^3-x^2-x+10+a}{x+2}$$

بالمطابقة نجد:

$$10+a=1 \Rightarrow a=-9$$

إذن:

$$f(x)=g(x)-\frac{9}{x+2}$$

❷ **حساب** $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ **:**

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[-\frac{9}{x+2}\right]=0$$

- **تفسير النتيجة هندسيا:**

المنحنى الممثل للدالة f والمنحنى للدالة g متقاربان بجوار $\pm\infty$

التمريـــــن 08

(I

❶ **كتابة معادلتي المماسين عند النقطتين A و B:**

• **لدينا (T_1) يمر من النقطتين A و C**

ومنه شعاع توجيه المستقيم (AC) هو شعاع توجيه لـ (T_1):

$$\overrightarrow{AC}=\binom{1-0}{-4-1}\Rightarrow \overrightarrow{AC}=\binom{1}{-5}=\binom{-b}{a}$$

إذن معادلة المستقيم (T_1) هي:

$$(T_1): -5x+(-1)y+c=0$$

نعوض النقطة A في معادلة المستقيم (T_1) نجد:

$$-5(0)-(1)+c=0\Rightarrow c=1$$

إذن: $(T_1): -5x-y+1=0$

أي: $\boxed{(T_1): y=-5x+1}$

• **ولدينا (T_2) يمر من النقطتين B و C**

ومنه شعاع توجيه المستقيم (BC) هو شعاع توجيه لـ (T_2):

$$\overrightarrow{BC}=\binom{1-2}{-4-3}\Rightarrow \overrightarrow{BC}=\binom{-1}{-7}=\binom{-b}{a}$$

إذن معادلة المستقيم (T_2) هي:

$$(T_2): -7x+(1)y+c=0$$

نعوض النقطة B في معادلة المستقيم (T_2) نجد:

$$-7(2)+(3)+c=0\Rightarrow c=11$$

إذن: $(T_2): -7x+y+11=0$

أي: $\boxed{(T_1): y=7x-11}$

❷ استنتاج $f'(0)$ و $f'(2)$:

صورة المشتقة لدالة f عند نقطة M ، هي معامل توجيه المماس عند النقطة M، ومنه:

$$f'(2)=7 \quad \text{و} \quad f'(0)=-5$$

❸ ايجاد الأعداد الحقيقية a، b و c:

لدينا منحنى الدالة f يمر من النقطة $A(0;1)$ و $B(2;3)$ ، ولدينا سابقا $f'(0)=-5$

ومنه:

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=3 \\ f'(0)=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(0)^2+b(0)+c=1 \\ a(2)^2+b(2)+c=3 \\ 2a(0)+b=-5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ b=-5 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \\ c=1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x)=3x^2-5x+1$$

❹ دراسة تغيرات الدالة f:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 6x-5=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{5}{6}$$

❺ ايجاد المماسات لـ (C_f) التي تمس المبدأ O:

لايجاد المماسات التي تمس (C_f) في النقطة $O(0;0)$ نعوض النقطة O في معادلة المماس العامة، ثم نحل المعادلة:

$$f'(x)(x_O-x)+f(x)=y_O \Rightarrow (6x-5)(0-x)+3x^2-5x+1=0$$
$$\Rightarrow -6x^2+5x+3x^2-5x+1=0$$
$$\Rightarrow -3x^2+1=0$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \text{أو} \\ x=-\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{أو} \\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسين في النقطتين ذات الفاصلتين $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ يمران بالمبدأ O. نسميهما (T_3) و (T_4)

- ايجاد معادلة لـ (T_3):

$$(T_3): y=f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$=\left(6\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-5\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-5\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+1$$
$$=2\sqrt{3}x-2-5x+\frac{5\sqrt{3}}{3}+1-\frac{5\sqrt{3}}{3}+1$$
$$=(2\sqrt{3}-5)x$$

- ايجاد معادلة لـ (T_4):

$$(T_4): y = f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$= \left(6\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-5\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-5\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+1$$
$$= -2\sqrt{3}x-2-5x-\frac{5\sqrt{3}}{3}+1+\frac{5\sqrt{3}}{3}+1$$
$$= -(2\sqrt{3}+5)x$$

❻ تبيين أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f) :

تذكير

محور تناظر:

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a-x\in D_f \\ f(2a-x)=f(x) \end{cases}$$

• **لدينا:** $x\in D_f$ **معناه** $x\in\mathbb{R}$ **معناه** $(-x)\in\mathbb{R}$ **معناه** $\left(2\left(\frac{5}{6}\right)-x\right)\in\mathbb{R}$

• **ولدينا:**

$$f\left(2\left(\frac{5}{6}\right)-x\right)=f\left(\frac{5}{3}-x\right)$$
$$=3\left(\frac{5}{3}-x\right)^2-5\left(\frac{5}{3}-x\right)+1$$
$$=3\left(\frac{5}{3}\right)^2-6\left(\frac{5}{3}\right)x+3x^2-\frac{25}{3}+5x+1$$
$$=\frac{25}{3}-10x+3x^2-\frac{25}{3}+5x+1$$
$$=3x^2-5x+1$$
$$=f(x)$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{5}{6}$ محور تناظر لـ (C_f)

(II

❶ تبيين أنّ h دالة زوجية:

$$h(-x)=3(-x)^2-5|-x|+1$$
$$=3x^2-5|x|+1$$
$$=h(x)$$

$h(-x)=h(x)$ **معناه أن الدالة h زوجية.**

❷ كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

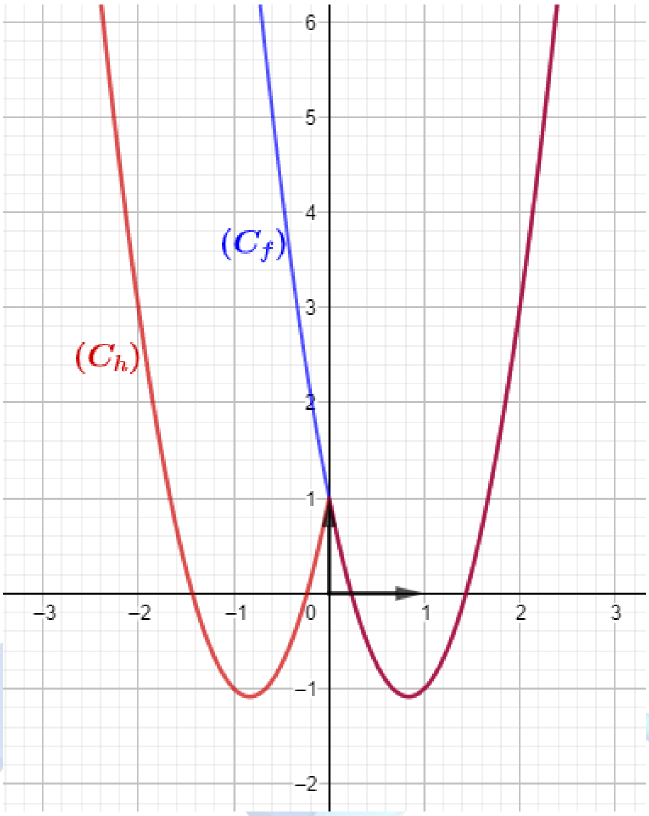
$$h(x)=3x^2-5|x|+1$$
$$=\begin{cases}3x^2-5x+1 & ; \quad x\geq 0\\ 3(-x)^2-5(-x)+1 & ; \quad x\leq 0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}f(x) & ; \quad x\geq 0\\ f(-x) & ; \quad x\leq 0\end{cases}$$

❸ توضيح كيف يتم إنشاء (C_h) المنحنى الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) :

لما $x\geq 0$ **لدينا:** $h(x)=f(x)$ ، **ومنه** (C_h) **ينطبق على** (C_f) **لما** $x\geq 0$

وبما أنّ الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

- إنشاء (C_h) :



التمريـــــن 09

(I

❶ دراسة تغيرات الدالة g:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 6x + 3 \\ &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2 \end{aligned}$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ حساب $g(-2)$:

$$g(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$$

- حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا (-2) جذر لـ $g(x)$ ومنه:

$$\begin{aligned} g(x) &= \big(x - (-2)\big)(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b \\ &= x^3 + (a + 2) + (b + 2a)x + 2b \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ b + 2a = 3 \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x + 2)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x+1=0 \end{cases}$$

لحل المعادلة $(x^2+x+1=0)$ نستعمل المميز Δ : $\Delta = 1-4=-3<0$

ومنه $(x^2+x+1)>0$ في $\mathbb{R}$

اذن:

$$g(x)=0 \Longrightarrow x=-2$$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶ تبيين أنّ: $f'(x)=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$:

$$f'(x)=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2-2(x+1)(2x^3+7x^2+8x+2)}{(x+1)^4}$$
$$=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)-2(2x^3+7x^2+8x+2)}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{6x^3+14x^2+8x+6x^2+14x+8-4x^3-14x^2-16x-4}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2x^3+6x^2+6x+4}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f، وتشكيل جدول تغيراتها:

- تعيين النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{(0^-)^2}=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\left(\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}\right)=\frac{-1}{(0^+)^2}=-\infty$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$(x+1)^3=0 \Rightarrow (x+1)^2(x+1)=0$$
$$\Rightarrow x+1=0$$
$$\Rightarrow x=-1$$

ومنه إشارة $f'(x)$ كالآتي:

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
$2g(x)$	$-$	0	$+$	‖	$+$
$(x+1)^3$	$-$		$-$	‖	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$+$

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ **تبيين أنّ:** $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b)+b+c}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 7 \\ a + 2b = 8 \\ b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -1 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

❹

أ/ **تبيين أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين:**

لدينا: $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$

ومنه: (C_f) **يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار** $-\infty$ **معادلته** $x = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (2x+3)] &= \lim_{x \to \pm\infty} \left[2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} - (2x+3)\right] \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{-1}{(x+1)^2}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه: (C_f) **يقبل مستقيم مقارب مائل** (Δ) **بجوار** $\pm\infty$ **معادلته** $y_{(\Delta)} = 2x + 3$

ب/ **دراسة وضعية** (C_f) **بالنسبة إلى** (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

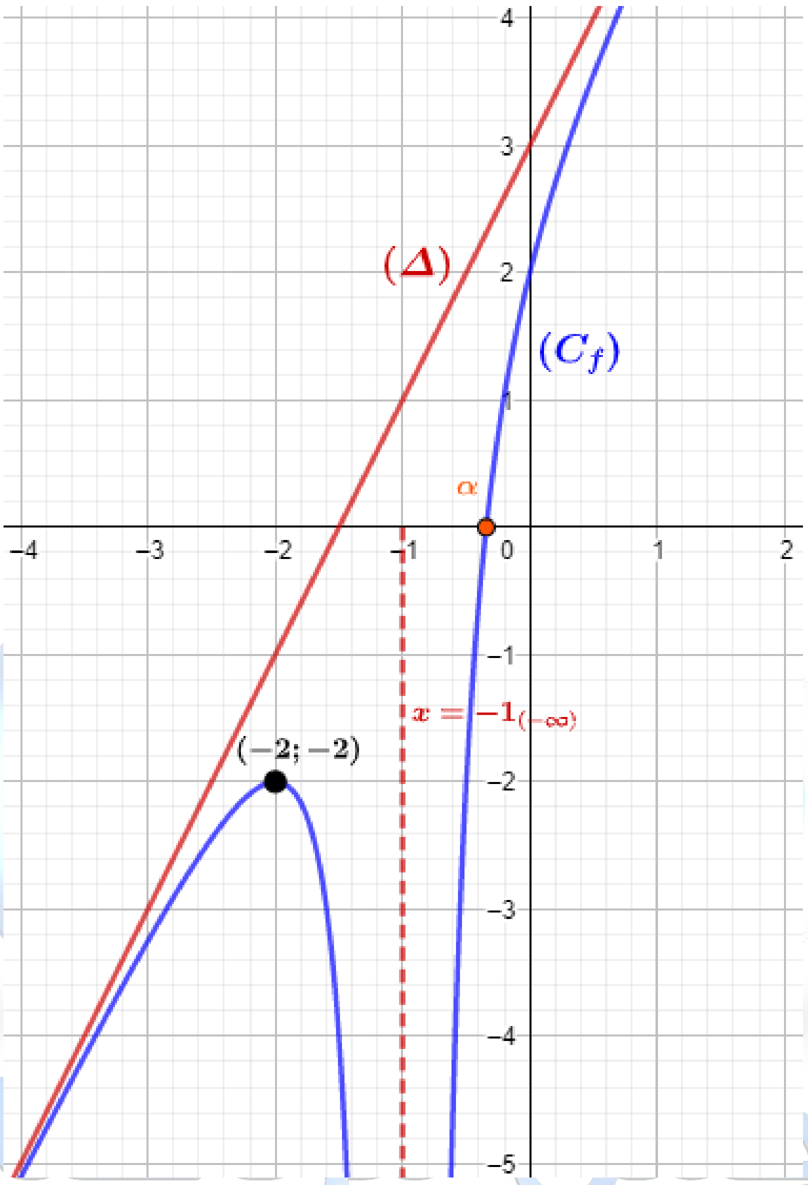
لدينا $(x+1)^2 > 0$ **ومنه** $\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) < 0$

إذن (C_f) **تحت** (Δ) **لما** $x \in D_f$.

❺ **رسم المنحنى** (C_f) **؛**

- **نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة** $x = -1$ **بجوار** $-\infty$.
- **نرسم المستقيم المقارب المائل** (Δ) **ذو المعادلة** $y_{(\Delta)} = 2x + 3$.
- **نعين النقطة** α **نقطة تقاطع** (C_f) **مع محور الفوصل.**
- **نعين النقطة ذات الاحداثيات** $(-2; -2)$ **لتسهيل الرسم**

باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f) . مع الاستعانة بوضعية (C_f) بالنسبة (Δ).



❻ المناقشة البيانية

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات المائلة ذات المعادلة $y_m = 2x + m$، وهي:

لما	$m < 2$	المعادلة تقبل حلين سالبين
لما	$m = 2$	المعادلة تقبل حل معدوم وحل مضاعف
لما	$2 < m < 3$	المعادلة تقبل حلين متمايزين ومختلفين في الإشارة
لما	$m \geq 3$	المعادلة لا تقبل حلول

(III

❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية:

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

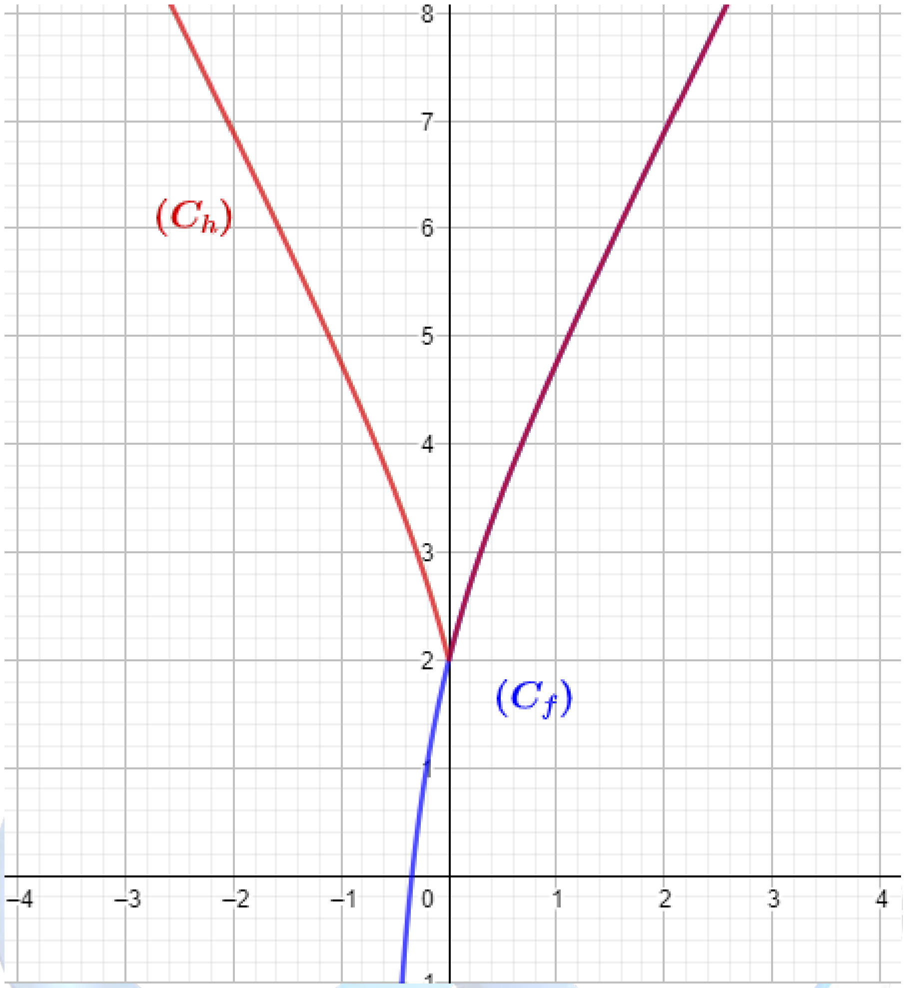
$h(-x) = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية.

❷ رسم المنحنى (C_h) :

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $x \in \mathbb{R}_+$

وبما أنّ الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب.



التمريـــــن 10

❸ تعيين الاعداد الحقيقية a ، b و c:

لـ (C_f) مستقيم مقارب معادلته $y = x - 3$، ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3. معناه:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}-(x-3)\right)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{x-2}-(x-3)\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c-(x-3)(x-2)}{x-2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c-x^2+2x+3x-6}{x-2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a-1)x^2+(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0$$

هذه النهاية لا تحقق إلا إذا كان: $(a-1=0)$ ومنه $\boxed{a=1}$

وعليه:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x+c-6}{x-2}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(b+5)x}{x}\right)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(b+5)=0$$

$$\Rightarrow b+5=0$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-5}$$

لدينا:

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-ax^2-bx-c}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{2ax^2-4ax+bx-2b-ax^2-bx-c}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{ax^2-4ax-2b-c}{(x-2)^2}$$

ومنه:

$$f'(3)=0\Rightarrow\frac{a(3)^2-4a(3)-2b-c}{\left((3)-2\right)^2}=0$$
$$\Rightarrow\ 9a-12a-2b-c=0$$
$$\Rightarrow -3a-2b-c=0$$

بتعويض قيمة a و b نجد:

$$\Rightarrow -3(1)-2(-5)-c=0$$
$$\Rightarrow \boxed{c=7}$$

إذن:

$$f(x)=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$$

❹ دراسة تغيرات الدالة f:

- <u>تعيين النهايات:</u>

$$\bullet\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-5x+7}{x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(x)$$
$$=-\infty$$

$$\bullet\ \lim_{\substack{x\to2\\<}}\left(\frac{x^2-5x+7}{x-2}\right)=-\infty$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x\to2\\<}}\left(\frac{6}{0^-}\right)=-\infty \text{ و } \lim_{\substack{x\to2\\<}}(x-2)=0^-$$

$$\bullet\ \lim_{\substack{x\to2\\>}}\left(\frac{x^2-5x+7}{x-2}\right)=+\infty$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x\to2\\>}}\left(\frac{6}{0^+}\right)=+\infty \text{ و } \lim_{\substack{x\to2\\>}}(x-2)=0^+$$

$$\bullet\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x+7}{x-2}\right)=+\infty$$

- <u>تعيين $f'(x)$:</u>

$$f'(x)=\frac{ax^2-4ax-2b-c}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{(1)x^2-4(1)x-2(-5)-(7)}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0$$
$$\Rightarrow x^2-4x+3=0$$

لحل المعادلة السابقة نستعمل المميز Δ:

$$\Delta=(-4)^2-4(1)(3)=4$$

ومنه:

$$\begin{cases} x=\dfrac{4+\sqrt{4}}{2}=3 \\ \text{أو} \\ x=\dfrac{4-\sqrt{4}}{2}=1 \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $f'(x)=0$ هي: $s=\{1;3\}$

- **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	‖	0	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-3	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

❺ **اثبات أنّ (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3):**

(C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) معناه أنّ المعادلة $f'(x)=-3$ تقبل حلان:

لدينا:

$$f'(x)=-3 \Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=-3$$
$$\Rightarrow x^2-4x+3+3(x-2)^2=0$$
$$\Rightarrow x^2-4x+3+3x^2+12-12x=0$$
$$\Rightarrow 4x^2-16x+15=0$$

نحسب المميز Δ ونستخرج الحلين، فنجد: $\Delta=16$ **ومنه:**

$$x_2=\frac{5}{2} \quad ; \quad x_1=\frac{3}{2}$$

ولدينا:

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2} \quad ; \quad f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{7}{2}$$

إذن احداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 مع المماسين (D_1) و (D_2) هما على الترتيب:

$$M_2\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \quad ; \quad M_1\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$$

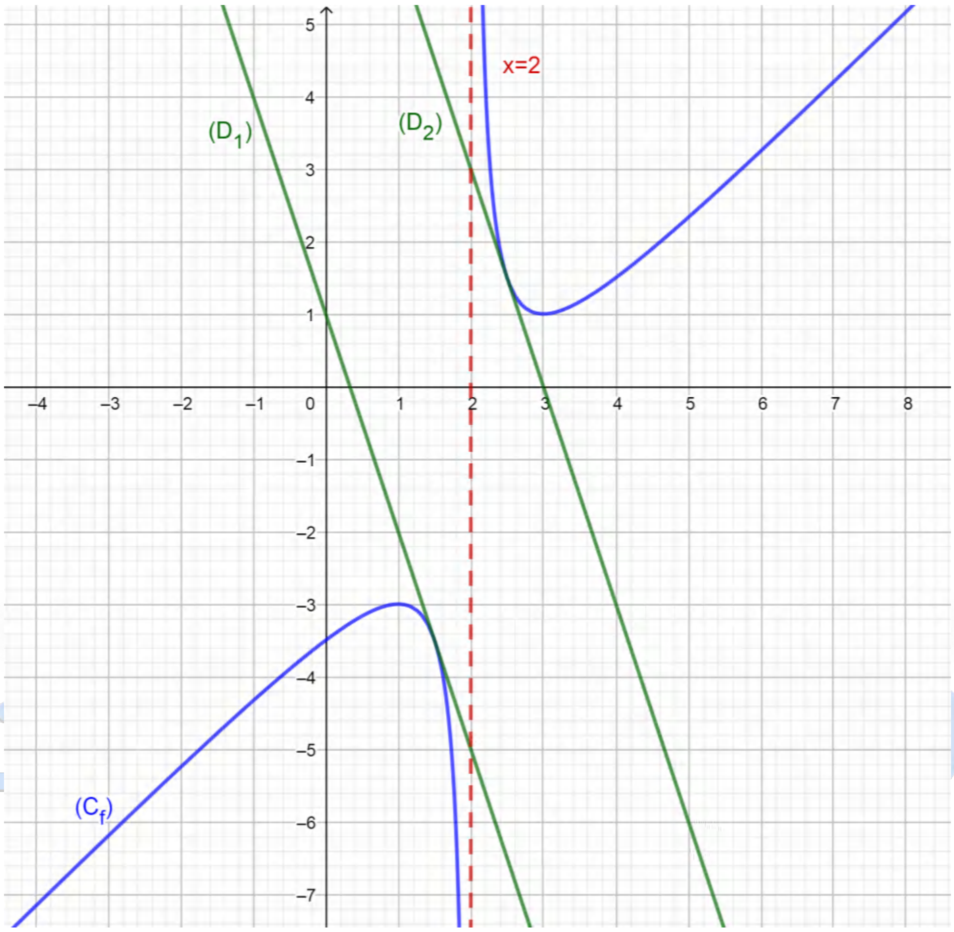
ولدينا:

$$(D_1): y=f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$(D_1):=\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\left(\frac{3}{2}\right)+3}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)-2\right)^2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)+7}{\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$(D_1): = -3x + \frac{9}{2} - \frac{7}{2}$$
$$(D_1): = -3x + 1$$
$$(D_2): y = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \left(\frac{5}{2}\right)\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$(D_2): y = -3x + \frac{15}{2} + \frac{3}{2}$$
$$(D_2): y = -3x + 9$$

ومنه معادلتي المماسين (D_1) **و** (D_2) **هما على الترتيب:** $y_{(D_1)} = -3x + 1$ **و** $y_{(D_2)} = -3x + 9$

❻ التمثيل البياني:



❼ المناقشة البيانية:

$$f(x) + 3x - m = 0 \Rightarrow f(x) = -3x + m$$

حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) **مع المستقيمات ذو المعادلة** $y_m = -3x + m$

ومنه:

لما	$m < 1$	**المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر موجب**
لما	$m = 1$	**المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا**
لما	$1 < m < 9$	**المعادلة لا تقبل حلول**
لما	$m = 9$	**المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا**
لما	$m > 9$	**المعادلة تقبل حلان موجبان**

❽

أ/ **تبيين أنّ الدالة** g **زوجية:**

لدينا:

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية.

ب/ تبيين أنه يمكن إنشاء (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) :

لدينا:

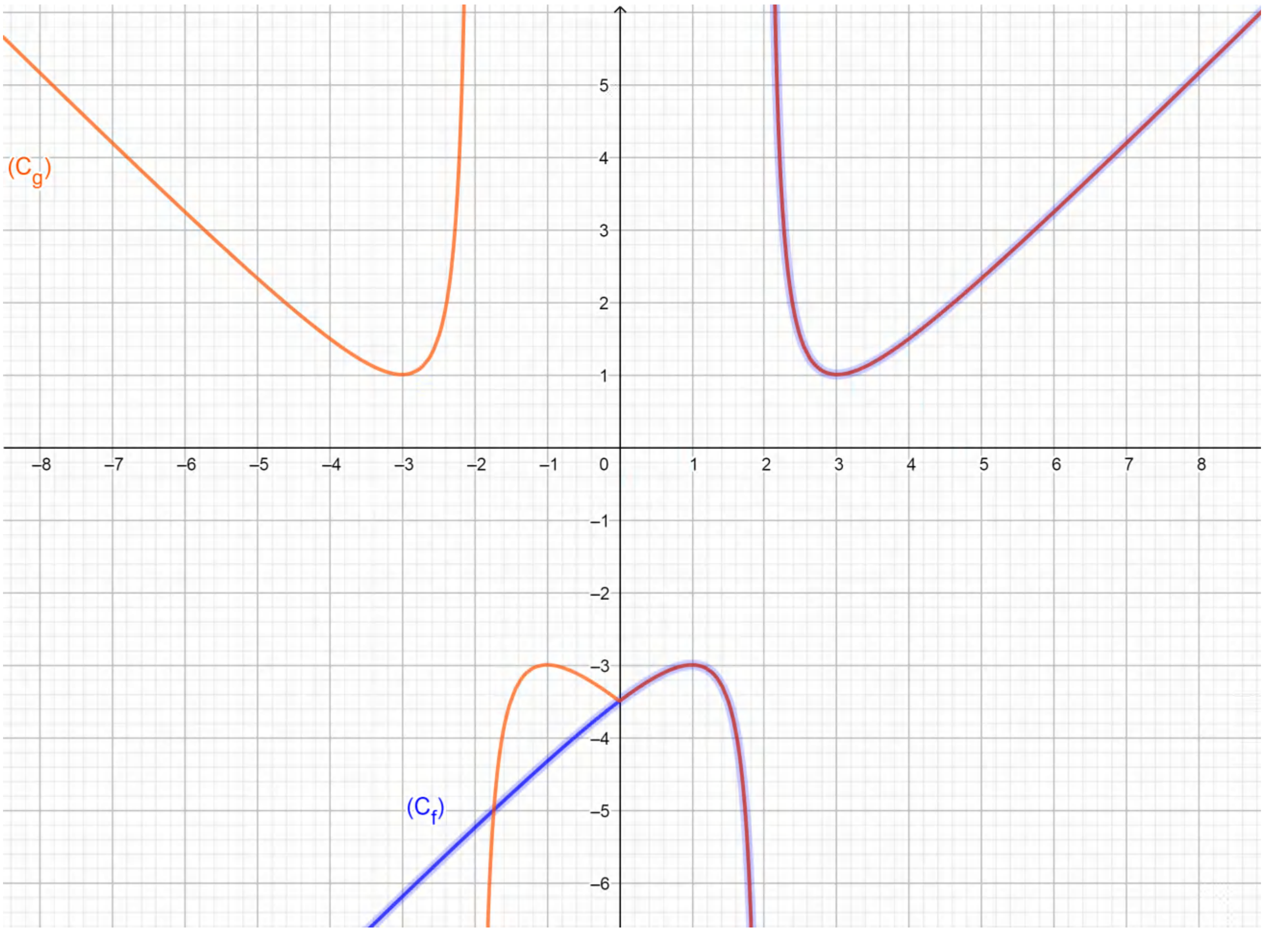
$$g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه لما $x \geq 0$ (C_f) ينطبق على (C_g)

ولما: $x \leq 0$ (C_f) يناظر (C_g) بالنسبة إلى محور التراتيب.

- تمثيل بيانيا (C_g) في المعلم السابق:

المنحني (C_f) والمنحني (C_g) والجزء الملون بالنفسجي يمثل تطابق (C_f) مع (C_g)



التمرين 11

❶ تعيين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x + 1}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \left(\dfrac{x^2 + x - 3}{x + 1}\right) = +\infty$

لأنّ:

$\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} (x + 1) = 0^-$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to -1}} \left(\frac{x^2+x-3}{0^-}\right) = +\infty$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$

❷ **اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 نجد:** $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x+1} \\ &= \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2+ax+bx+b+c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2+x(a+b)+b+c}{x+1} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

أي:

$$f(x) = x - \frac{3}{x+1}$$

- **استنتاج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) :**

بما أنّ: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{x^2+x-3}{x+1}\right) = +\infty$

فإنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - \frac{3}{x+1} - x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{3}{x+1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته $y = x$.

❸ **تحديد الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم المقارب المائل:**

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - x = \frac{-3}{x+1} &\Rightarrow f(x) - x = \frac{3}{-x-1} \\ &\Rightarrow -x - 1 \neq 0 \\ &\Rightarrow x \neq -1 \end{aligned}$$

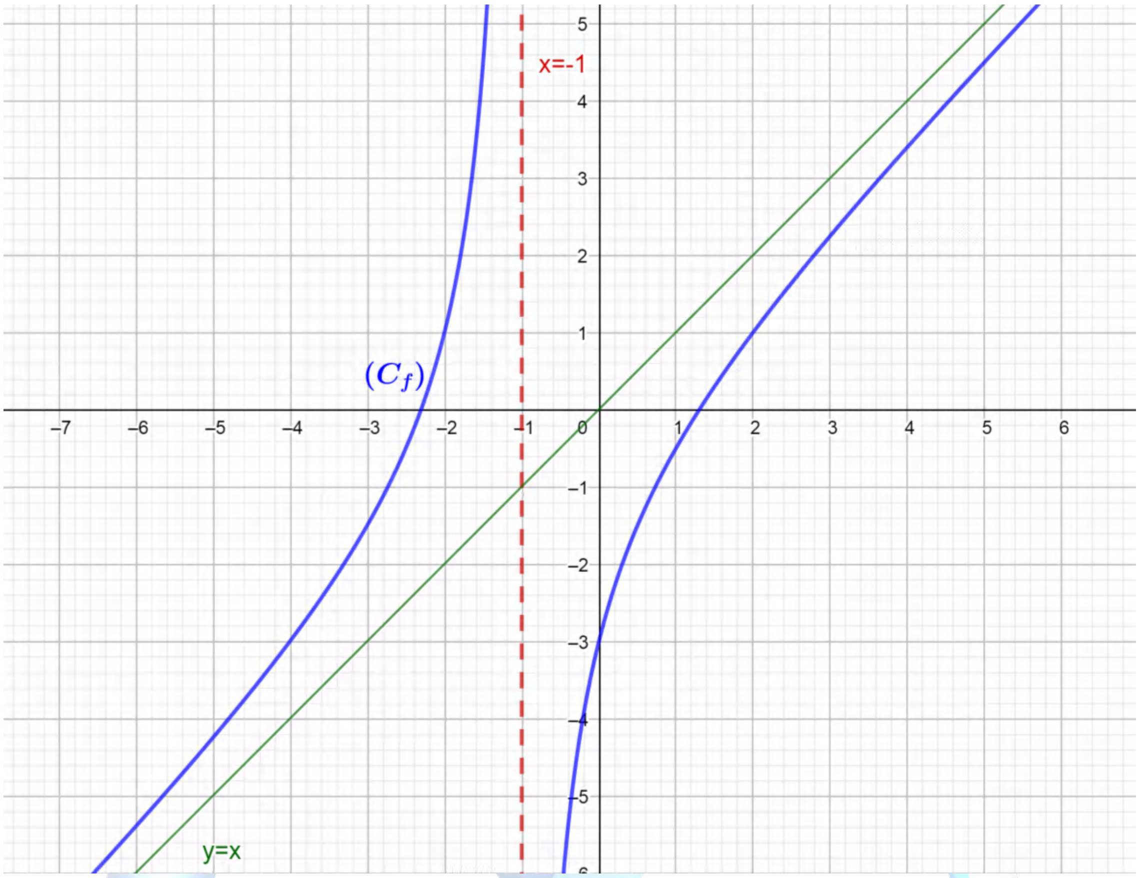
ومنه:

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	$-$
الوضعية	(C_f) **فوق** (D)	(C_f) **تحت** (D)

❹ **التمثيل البياني:**

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- **نرسم المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة:** $x = -1$
- **نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة:** $y = x$
- **باستعمال جدول الوضع النسبي والنهايات نمثل المنحنى** (C_f)



التمريـــــن 12

❶ دراسة تغيرات الدالة f ، ثم انجاز جدول التغيرات:

- **تعيين النهايات:**

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2-4)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\left(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)\right)=-\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-4)=+\infty$$

- **تعيين $f'(x)$:**

$$f'(x)=3x^2+6x$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Rightarrow 3x^2+6x=0\\ &\Rightarrow 3x(x+2)=0\\ &\Rightarrow \begin{cases}3x=0\\ \text{أو}\\ x+2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ \text{أو}\\ x=-2\end{cases}\end{aligned}$$

- **جدول تغيرات الدالة f:**

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

❷ تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

تذكير

لتعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$.
- لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور التراتيب نقوم بحساب $f(0)$.

- **مع محور الفواصل:**

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

لدينا:

$$f(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$$

نلاحظ أنّ 1 حل للمعادلة $f(x) = 0$ ، ومنه لحل المعادلة نستعمل طريقة المطابقة أو القسمة الاقليدية:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$$
$$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b$$
$$\Rightarrow f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (b-a)x - b$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a - 1 = 3 \\ b - a = 0 \\ -b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

ومنه:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 4) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases}$$

لدينا: $x - 1 = 0$ **ومنه:** $x = 1$

ولدينا: $x^2 + 4x + 4 = 0$**: لحلها نستعمل المميز Δ:**

$$\Delta = 4^2 - 4(1)(4) = 0$$

ومنه المعادلة السابقة تقبل جذر مضاعف هو $x = -\frac{4}{2}$ **أي** $x - 2$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي ؛ $s = \{1; -2\}$ وهي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل.

- **مع محور التراتيب:**

$$f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$

إذن (C_f) يقطع محور التراتيب في النقطة ذات الاحداثيات $(0; -4)$

❸ **برهان أن النقطة $\omega(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :**

تذكير

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

لدينا:

$x \in \mathbb{R}$ **معناه:** $-\infty < x < +\infty$ **معناه:** $-\infty < -x < +\infty$ **معناه** $-\infty < \underbrace{2(-1) - x}_{2\alpha - x} < +\infty$

معناه $(2(-1) - x) \in \mathbb{R}$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(2(-1) - x) + f(x) &= (-2 - x)^3 + 3(-2 - x)^2 - 4 + x^3 + 3x^2 - 4 \\ &= -(-2 - x)^2(2 + x) + 3(2 + x)^2 - 8 + x^3 + 3x^2 \\ &= -(4 + x^2 + 4x)(2 + x) + 12 + 3x^2 + 12x - 8 + x^3 + 3x^2 \\ &= -8 - 4x - 2x^2 - x^3 - 8x - 4x^2 + 4 + 6x^2 + 12x + x^3 \\ &= -4 \\ &= 2(-2) \end{aligned}$$

ومنه النقطة ω **مركز تناظر للمنحني** (C_f) .

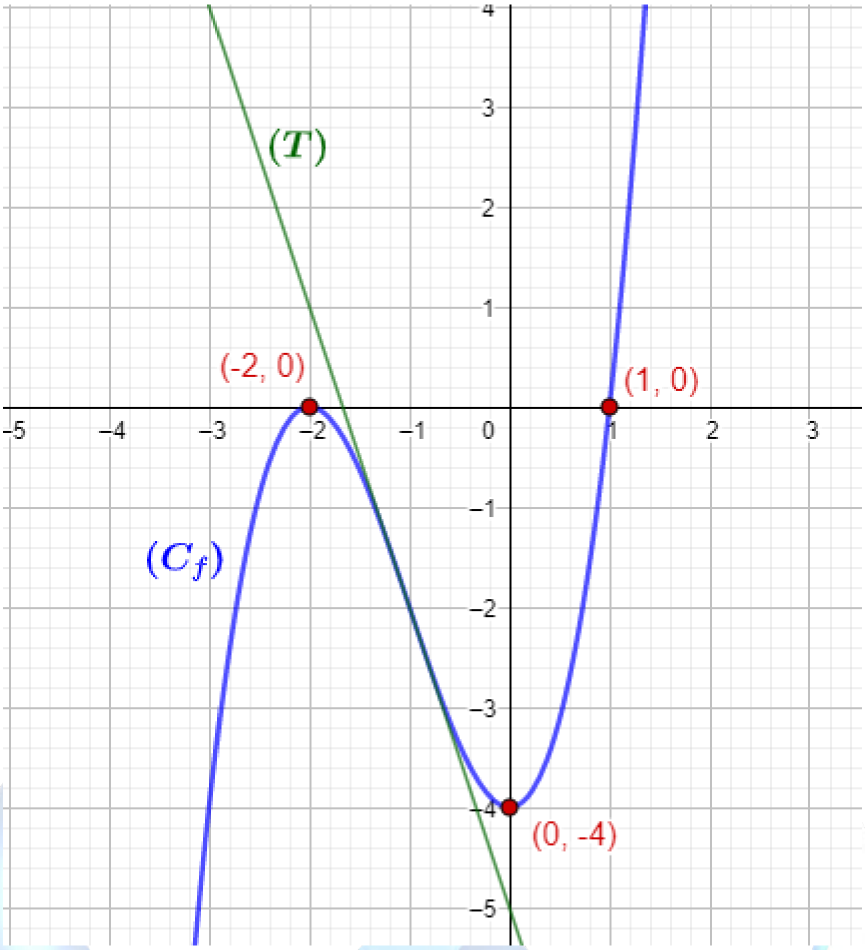
❹ **تعيين معادلة للمماس** (T) **عند النقطة** ω**:**

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1) \\ &= \big(3(-1)^2 + 6(-1)\big)(x + 1) + (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 \\ &= -3x - 3 - 2 \\ &= -3x - 5 \end{aligned}$$

ومنه معادلة المماس (T) **هي** $y = -3x - 5$.

❺ **التمثيل البياني كل من** (T) **و** (C_f) **:**

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:



❻ **المناقشة البيانية:**

لدينا:

$$x^3+3x^2-4-m=0 \Rightarrow f(x)=m$$

ومنه حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y=m$ وعليه المناقشة أفقية:

لما	$m<-4$	**أي**	$x<-4$	**للمعادلة حل وحيد سالب**
لما	$m=-4$	**أي**	$x=-4$	**المعادلة تقبل حلين أحدهما سالب والأخر مضاعف**
لما	$-4<m<0$	**أي**	$-4<x<0$	**المعادلة تقبل حلان سالبان وحل موجب**
لما	$m=0$	**أي**	$x=0$	**المعادلة تقبل حل مضاعف سالب وحل موجب**
لما	$m>0$	**أي**	$x>0$	**المعادلة تقبل حل وحيد موجب**

التمريـــــن 13

❶ **حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:**

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}(x)$$
$$=-\infty$$
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
- $$\lim_{\substack{< \\ x\to-1}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to-1}}\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)$$

$$= \frac{4}{0^-}$$
$$= -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)$$
$$= \frac{4}{0^+}$$
$$= +\infty$$

- **التفسير الهندسي:**

لدينا: $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ **و** $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$

ومنه المنحنى (C_f) **يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار** $\pm\infty$ **معادلته:** $x = -1$.

❷

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية a **،** b **و** c**:**

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
$$= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$
$$= \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$$

إذن:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$$

ب/ استنتاج أنّ (C_f) **يقبل مستقيم مقارب مائل** (Δ) **بجوار** $\pm\infty$ **:**

لدينا:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - x + 1\right]$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{4}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) **يقبل مستقيم مقارب مائل** (Δ) **بجوار** $\pm\infty$ **معادلته:** $y_{(\Delta)} = x - 1$

ج/ دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة إلى** (Δ)**:**

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{4}{x+1}$$

إشارة الفرق من إشارة $x + 1$**:**

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ومنه:

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- **الوضعية:**

- (C_f) **تحت** (Δ) **لما** $x \in \,]-\infty; -1[$

- (C_f) يقطع (Δ) لما $x=-1$ أي في النقطة ذات الاحداثيات $(-1;-2)$.
- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1;+\infty[$

❸

أ/ تبيين أنه منهما كان $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ فإنّ: $f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$:

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)-x^2-3}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

نقوم بتحليل: (x^2+2x-3)

لدينا: $\Delta=2^2-4(1)(-3)=16$

ومنه: $x=\frac{-2+4}{2}$ أو $x=\frac{-2-4}{2}$

أي: $x=1$ أو $x=-3$

أي: $\left(x^2+2x-3=(x-1)\left(x-(-3)\right)\right)$

إذن:

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $(x+1)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x+3)$:

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

❹ كتابة معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y_{(T)}=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$=\frac{-3}{1}x+\frac{3}{1}$$
$$=-3x+3$$

❺ تبيين أن النقطة $\omega(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

• لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ معناه: $x<-1$ أو $x>-1$

معناه: $(-x)>1$ أو $(-x)<1$ معناه $(2(-1)-x)>-1$ أو $(2(-1)-x)<-1$

معناه: $(2(-1)-x) \in]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

إذن: $(2(-1)-x)\in D_f$

• **ولدينا:**

$$\begin{aligned}f(2(-1)-x)+f(x)&=f(-2-x)+f(x)\\&=\frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1}+\frac{x^2+3}{x+1}\\&=\frac{4+x^2+4x+3}{-x-1}+\frac{x^2+3}{x+1}\\&=\frac{x^2+4x+7}{-(x+1)}+\frac{x^2+3}{x+1}\\&=\frac{-x^2-4x-7+x^2+3}{(x+1)}\\&=\frac{-4x-4}{(x+1)}\\&=\frac{-4(x+1)}{(x+1)}\\&=-4\\&=2(-2)\end{aligned}$$

لدينا: $\begin{cases}(2(-1)-x)\in D_f\\ f(2(-1)-x)+f(x)=2(-2)\end{cases}$ **ومنه:** $\omega(-1;-2)$ **مركز تناظر للمنحنى** (C_f)

مركز التناظر:

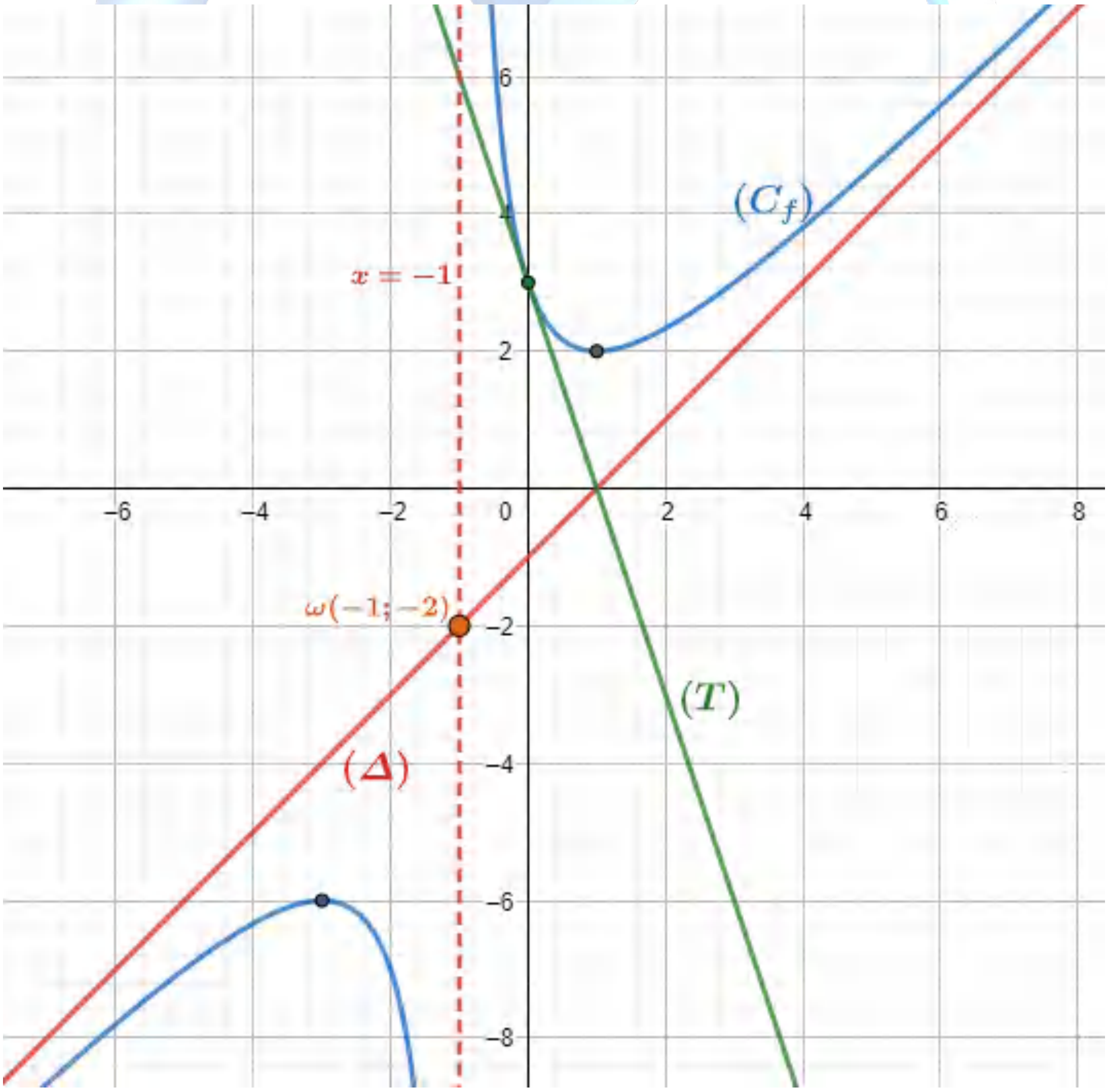
نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$\begin{cases}2\alpha-x\in D_f\\ f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta\end{cases}$

أو

$\begin{cases}(\alpha+x)\in D_f\\ (\alpha-x)\in D_f\\ f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=2\beta\end{cases}$

❻ **التمثيل البياني:**



التمريـــــن 14

I) تعيين العددين a و b حتى تقبل الدالة f قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 :

الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8 معناه:

$$\begin{cases} f(3) = -8 \\ f'(3) = 0 \end{cases}$$

لدينا:

$$f'(x) = x^2 + 2ax - 3$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(3) = 0 &\Rightarrow 3^2 + 2a(3) - 3 = 0 \\ &\Rightarrow 6a = -6 \\ &\Rightarrow \boxed{a = -1} \end{aligned}$$

و لدينا:

$$\begin{aligned} f(3) = -8 &\Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + a(3)^2 - 3(3) + b = -8 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3}(3)^3 + (-1)(3)^2 - 3(3) + b = -8 \\ &\Rightarrow 9 - 9 + 9 + b = -8 \\ &\Rightarrow \boxed{b = 1} \end{aligned}$$

إذن:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$$

II) نفرض أنّ $a = -1$ ، $b = 1$:

❶ دراسة تغيرات الدالة f:

- **تعيين النهايات:**

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1\right) = +\infty$$

- **تعيين $f'(x)$:**

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

لدينا:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز Δ:

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16$$

ومنه:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = 3 \\ \text{أو} \\ x = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} = -1 \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f'(x) = 0$ هي : $s = \{-1; 3\}$

- **جدول التغيرات:**

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

❷ حساب $f(5)$ ، $f(0)$ ، $f(-1)$ و $f(-2)$:

- $f(5)=\frac{1}{3}(5)^3-(5)^2-3(5)+1=\frac{8}{3}$
- $f(0)=\frac{1}{3}(0)^3-(0)^2-3(0)+1=1$
- $f(-1)=\frac{1}{3}(-1)^3-(-1)^2-3(-1)+1=\frac{8}{3}$
- $f(-2)=\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)^2-3(-2)+1=\frac{1}{3}$

❸ كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة A التي فاصلتها 1 :

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$(T): y=(1^2-2(1)-3)(x-1)-\frac{8}{3}$$
$$(T): y=-4x+4-\frac{8}{3}$$
$$(T): y=-4x+\frac{4}{3}$$

ومنه معادلة المماس (Δ) هي: $y=-4x+\frac{4}{3}$.

❹ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ):

لدينا:

$$f(x)-y_{(\Delta)}=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1+4x-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلة ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}=(x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$
$$=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x-\alpha x^2-\beta x-\gamma$$
$$=\alpha x^3+(\beta-\alpha)x^2+(\gamma-\beta)x-\gamma$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta-\alpha=-1\\ \gamma-\beta=1\\ -\gamma=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}\\ \beta=-\frac{2}{3}\\ \gamma=\frac{1}{3}\end{cases}$$

ومنه:

$$\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}=(x-1)\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(x^2-2x+1)$$
$$=\frac{1}{3}(x-1)(x-1)^2$$

$$= \frac{1}{3}(x-1)^3$$

لدينا:

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	$-\infty$ $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

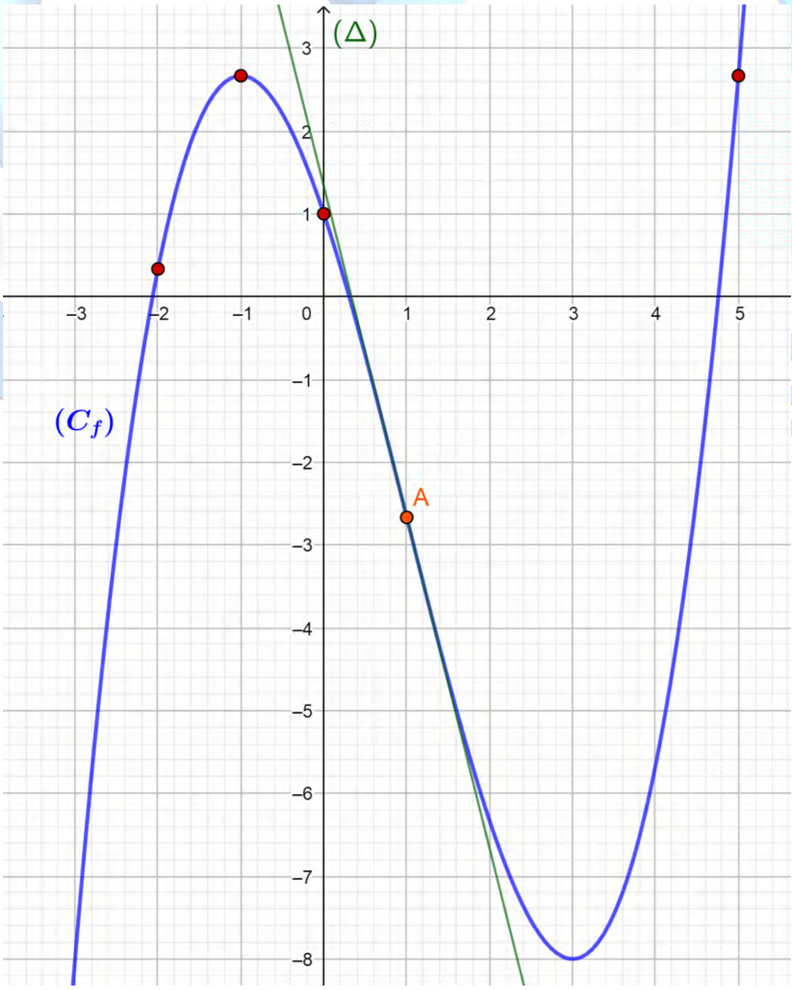
ومنه الوضعية النسبية:

- (C_f) فوق Δ لما: $x \in]1; +\infty[$.
- (C_f) يقطع Δ لما: في النقطة A ذات الاحداثيات $A\left(1; -\frac{8}{3}\right)$
- (C_f) تحت Δ لما: $x \in]-\infty; 1[$.

❺ **التمثيل البياني:**

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نعيّن بعض النقط المساعدة $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(0)$ و $f(5)$.
- نعيّن النقطة A نقطة تقاطع المنحني (C_f) والمماس (Δ)
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة: $y = -4x + \frac{4}{3}$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



التمريـــن 15

❶ تعيين العددين الحقيقين a و b:

المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0;\frac{7}{2}\right)$ مماسا موازيا لمحور الفواصل معناه:

$$\begin{cases} f(0)=\frac{7}{2} \\ f'(0)=0 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(0)=\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{(0)^2+a(0)+b}{(0)^2+2(0)+2}=\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{b}{2}=\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow b=7$$

ولدينا:

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(x^2+2x+2)-(2x+2)(x^2+ax+7)}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$=\frac{2x^3+4x^2+4x+ax^2+2ax+2a-2x^3-2ax^2-14x-2x^2-2ax-14}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$=\frac{(2-a)x^2-10x+2a-14}{(x^2+2x+2)^2}$$

بما أن $f'(0)=0$ لدينا:

$$f'(0)=0 \Rightarrow \frac{(2-a)(0)^2-10(0)+2a-14}{((0)^2+2(0)+2)^2}=0$$
$$\Rightarrow 2a-14=0$$
$$\Rightarrow a=7$$

اذن:

$$f(x)=\frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}$$

- تبيين أنّ $f(x)$ تكتب على الشكل: $f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$

$$f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$=\frac{x^2+2x+2+5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$=\frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}$$

إذن:

$$f(x)=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

❷ دراسة تغيرات الدالة f:

- <u>تعيين النهايات:</u>

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)$
$=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}\right)=1$

- دراسة $f'(x)$:

لدينا:

$$f'(x)=\frac{(2-a)x^2-10x+2a-14}{(x^2+2x+2)^2}$$

ومنه:

$$f'(x)=\frac{-5x^2-10x}{(x^2+2x+2)^2}$$

لدينا:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-5x^2-10x}{(x^2+2x+2)^2}=0$$
$$\Rightarrow -5x^2-10x=0$$
$$\Rightarrow -5x(x+2)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}-5x=0\\ \text{أو}\\ x+2=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{أو}\\ x=-2\end{cases}$$

- تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	1

❸ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x))=\lim_{x\to-\infty}(f(x))=1$$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

❹ تعيين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات:

- تقاطع (C_f) مع (xx'):

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{x^2+7x+7}{x^2+2x+2}=0$$
$$\Rightarrow x^2+7x+7=0$$

بعد حساب المميز Δ نجد: $\Delta=21$ و:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-7+\sqrt{21}}{2}\cong-1.21\\ x_2=\dfrac{-7-\sqrt{21}}{2}\cong-5.79\end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(xx')=\{(-5.79;0),(-1.21;0)\}$$

- تقاطع (C_f) مع (yy'):

لدينا سابقا

$$f(0)=\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;\frac{7}{2}\right)\right\}$$

❺ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

$$f(x)-y_{(\Delta)}=1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}-1$$
$$=\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$

لدينا: $(x^2+2x+2)>0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$5x+5=0\Rightarrow x=-1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

- الوضعية النسبية:

- لما $x\in]-\infty;-1[$: (C_f) تحت (Δ).
- لما $x=-1$: (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات $\omega(-1;1)$
- لما $x\in]-1;+\infty[$: (C_f) فوق (Δ)

❻ برهان أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f) :

$$f(2\alpha-x)+f(x)=f(-2-x)+f(x)$$
$$=1+\frac{5(-2-x)+5}{(2+x)^2+2(-2-x)+1}+1+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$=2+\frac{-10-5x+5}{x^2+2x+2}+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$=2-\frac{(5x+5)}{x^2+2x+2}+\frac{5x+5}{x^2+2x+2}$$
$$=2$$
$$=2(1)$$

ومنه النقطة $\omega(-1;1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

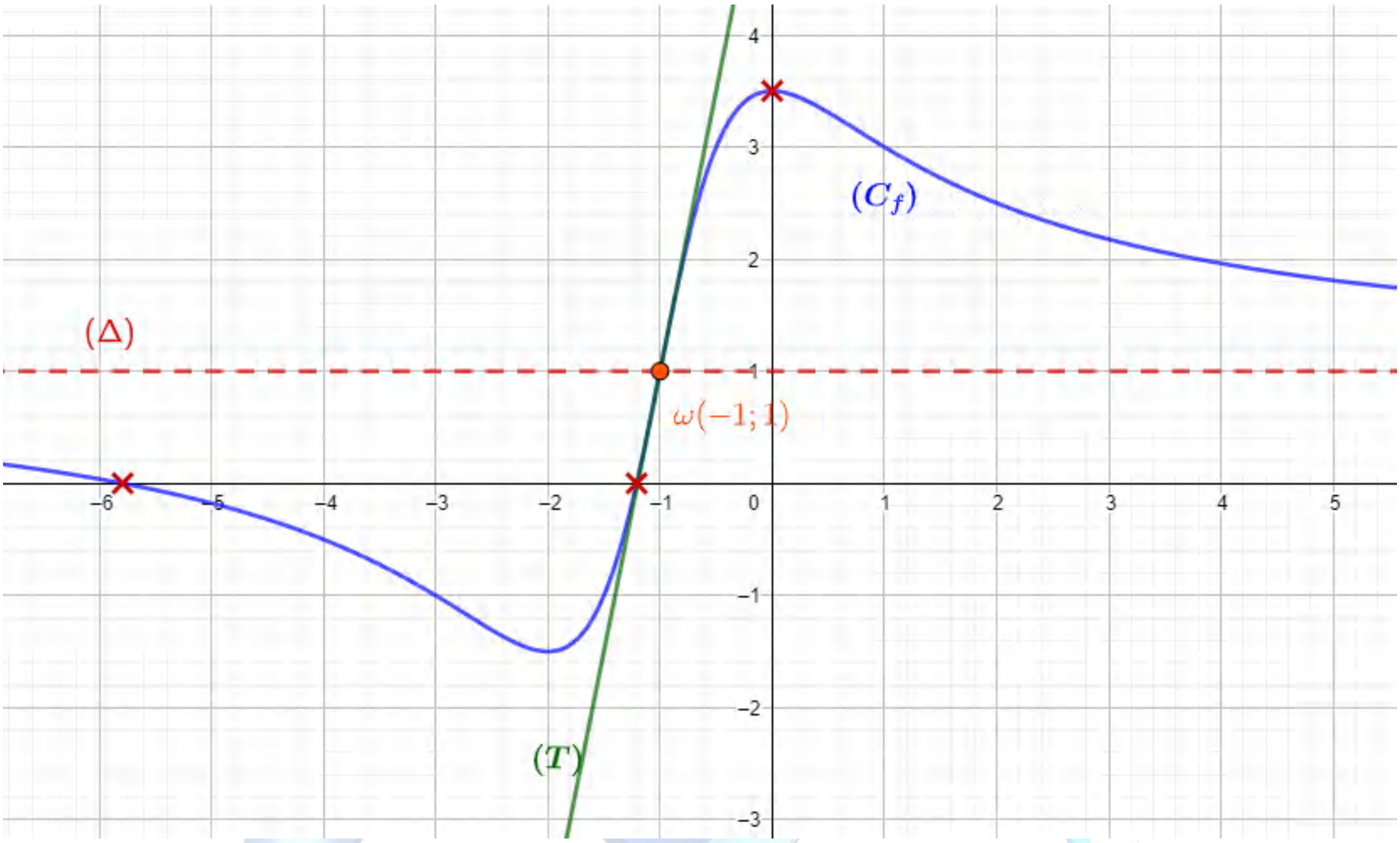
❼ تعيين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω:

$$(T):y=f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1)$$
$$(T):y=\frac{-5+10}{(1-2+2)^2}(x+1)+1$$
$$(T):y=5x+6$$

❽ التمثيل البياني لكل من (T)، (Δ) و (C_f) :

لتمثيل المنحني البياني نتبع الخطوات التالية:

- نرسم المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y=1$
- نعين النقطة ω مركز تناظر المنحني (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الاحداثيات
- نرسم المماس (T) ذو المعادلة $y=-5x+6$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نمثل المنحني (C_f) .



التمريـــــن 16

I)

❶

أ/ حساب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x+\underbrace{\frac{4}{x+1}}_{0}\right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{< \\ x\to-1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to-1}}\left(-x+\frac{4}{\underbrace{x+1}_{0}}\right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to-1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to-1}}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة بقراءة بيانية:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 4$

❷

أ/ حساب نهاية g عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{\underbrace{x+1}_{0}}\right) = +\infty$$

ب/ التحقق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[g(x)-x] &= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x+1}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه (C_g) **يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار** $+\infty$ **معادلته** $y=x$

ج/ دراسة تغيرات الدالة g:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 1-\frac{4}{(x+1)^2}\\ &= \frac{x^2+2x+1-4}{(x+1)^2}\\ &= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\\ &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

لدينا: $(x+1)^2>0$ **و** $(x+3)>0$ **ومنه إشارة** $g'(x)$ **من إشارة** $(x-1)$

لدينا:

$$x-1=0 \Longrightarrow x=1$$

ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

(II

❶ كتابة $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned}k(x) &= |x|+\frac{4}{x+1}\\ &= \begin{cases} x+\dfrac{4}{x+1} & ; x\in\,]0;+\infty[\\ -x+\dfrac{4}{x+1} & ; x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;0[\end{cases}\\ &= \begin{cases} g(x) & ; x\in\,]0;+\infty[\\ f(x) & ; x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;0[\end{cases}\end{aligned}$$

❷ كتابة معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$:

لدينا:

$$f'(x)=-1-\frac{4}{(x+1)^2}$$

ومنه:

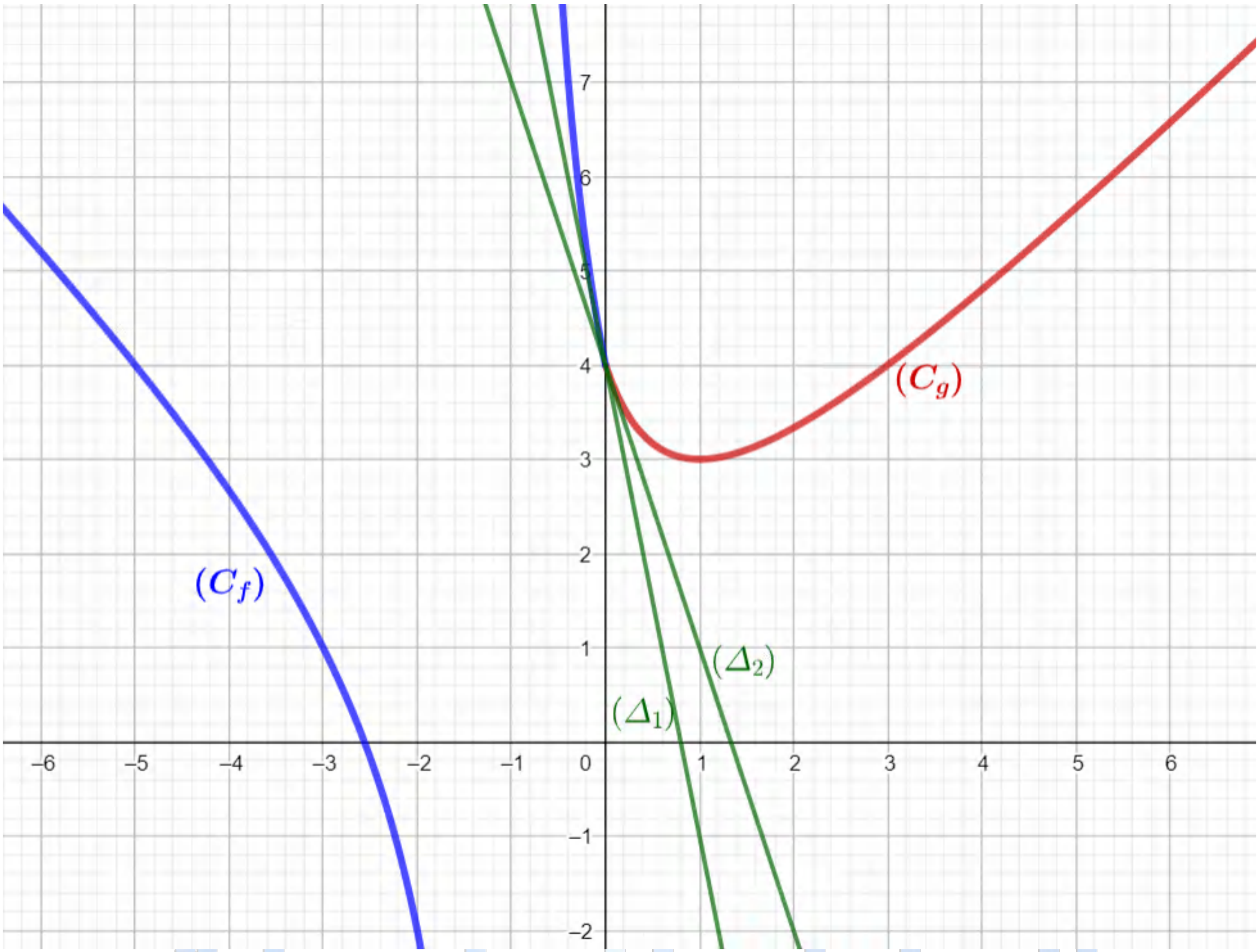
$$\begin{aligned}y_{(\Delta_1)} &= f'(0)x+f(0)\\ &= -5x+4\end{aligned}$$

ولدينا:

$$y_{(\Delta_2)} = g'(0)x+g(0)$$

$= -3x + 4$

❸ رسم (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_k) :



بالتوفيق

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل