المسألة رقم 01 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ يكون :

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}$$

2) عين الدالتين u و v بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ يكون : $f(x)=(v\circ u)(x)$

3) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4) برهن أن النقطة $\Omega(-1;3)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_f) .

5) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=|f(x)|$

أ- أكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة .

ب- إشرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_g) للدالة g إنطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة f .

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $h(x)=f(|x|)$

أ- عين مجموعة تعريف الدالة h .

ب- أثبت أن الدالة h زوجية .

جـ- إشرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h إنطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة f .

حل مقترح :

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ يكون :

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}$$

بتوحيد المقامات نجد : $f(x)=\frac{ax+a+b}{x+1}$ و منه بالمطابقة مع عبارة الدالة f نحصل على :

أي : $\begin{cases} a=3 \\ a+b=-2 \end{cases}$ و عليه تكون : $\begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases}$ $\quad f(x)=3-\frac{5}{x+1}$

طريقة أخرى : بكتابة : $f(x)=\frac{3x-2}{x+1}=\frac{3x+3-5}{x+1}=\frac{3x+3}{x+1}-\frac{5}{x+1}$ أي :

$f(x)=\frac{3(x+1)}{x+1}-\frac{5}{x+1}$ و بما أن $x\neq -1$ ينتج : $f(x)=3-\frac{5}{x+1}$ و منه نجد : $\begin{cases} a=3 \\ b=-5 \end{cases}$

2) تعيين الدالتين u و v بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ يكون : $f(x)=(v\circ u)(x)$

من السؤال 1) نعلم أن : $f(x)=3-\frac{5}{x+1}$ و منه نفكك الدالة f على النحو الآتي :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right] & x+1 \arrow[r, "v"] & 3-\frac{5}{x+1} \end{tikzcd}$$

$f=v\circ u$ بحيث : $u(x)=x+1$ و $v(x)=3-\frac{5}{x}$

3) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$:

• على المجال $]-\infty,-1[$: الدالة u تآلفية متزايدة تماما على المجال $]-\infty,-1[$ لأن $1\succ 0$ بحيث من أجل كل $x\in]-\infty,-1[$ فإن $x\prec -1$ و منه يكون $x+1\prec 0$ أي من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty,-1[$ فإن

$u(x)\prec 0$ و بالتالي : $u(x)\in]-\infty,0[$ و بما أن الدالة $x\mapsto -\frac{5}{x}$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty,0[$ لأن

الدالة مقلوب $x\mapsto \frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0[$ و $-5\prec 0$ فإن الدالة $v:x\mapsto 3-\frac{5}{x}$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty,0[$ لأن للدالتين $x\mapsto -\frac{5}{x}$ و v نفس إتجاه التغير .

<u>**نتيجة**</u> **:** **للدالتين u و v نفس إتجاه التغير ؛ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال** $]-\infty,-1[$.

• على المجال $]-1,+\infty[$: الدالة u تآلفية متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$ لأن $1\succ 0$ بحيث من أجل كل $x\in]-1,+\infty[$ فإن $x\succ -1$ و منه يكون $x+1\succ 0$ أي من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1,+\infty[$ فإن $u(x)\succ 0$ و بالتالي : $u(x)\in]0,+\infty[$ و بما أن الدالة $x\mapsto -\frac{5}{x}$ متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ لأن

الدالة مقلوب $x\mapsto \frac{1}{x}$ متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و $-5\prec 0$ فإن الدالة $v:x\mapsto 3-\frac{5}{x}$ متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ لأن للدالتين $x\mapsto -\frac{5}{x}$ و v نفس إتجاه التغير .

<u>**نتيجة**</u> **:** **للدالتين u و v نفس إتجاه التغير ؛ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال** $]-1,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

4) البرهان أن النقطة $\Omega(-1;3)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_f) :

نستعمل قانون مركز التناظر الآتي : $f(2\times(-1)-x)+f(x)=2\times 3$ أي $f(-2-x)+f(x)=6$.

من أجل $x\in D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ فإن $x\neq -1$ و منه $-x\neq 1$ و منه $-2-x\neq -1$ إذن $-2-x\in D_f$

أي $f(-2-x)+f(x)=\dfrac{3(-2-x)-2}{(-2-x)+1}+\dfrac{3x-2}{x+1}$

أي $f(-2-x)+f(x)=\dfrac{-8-3x}{-1-x}+\dfrac{3x-2}{x+1}$ أي $f(-2-x)+f(x)=\dfrac{8+3x}{x+1}+\dfrac{3x-2}{x+1}$

أي $f(-2-x)+f(x)=\dfrac{8+3x+3x-2}{x+1}$ أي $f(-2-x)+f(x)=\dfrac{6x+6}{x+1}$

$f(-2-x)+f(x)=\dfrac{6(x+1)}{x+1}$ و منه نحصل على : $f(-2-x)+f(x)=6=2\times 3$

نتيجة : النقطة Ω ذات الإحداثيات $(-1;3)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=|f(x)|$

أ- كتابة عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة :

نعلم أن : $\begin{cases} g(x)=f(x) & si\ f(x)\geq 0 \\ g(x)=-f(x) & si\ f(x)\leq 0 \end{cases}$

$g(x)=|f(x)|=\left|\dfrac{3x-2}{x+1}\right|$ و حتى نجد كتابة g دون رمز القيمة المطلقة يجب دراسة إشارة النسبة $\dfrac{3x-2}{x+1}$

في الجدول الآتي :

x	$-\infty$	-1		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$3x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	||	$-$	0	$+$

إذن يكون : $f(x)\geq 0$ على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[$ و يكون : $f(x)\leq 0$ على المجال

$\left]-1,\dfrac{2}{3}\right]$ ، و منه نستنتج أن :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{3x-2}{x+1} & si \quad x\in \left]-\infty,-1\right[\cup\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right[\\ g(x)=\dfrac{2-3x}{x+1} & si \quad x\in \left]-1,\dfrac{2}{3}\right] \end{cases}$$

ب- شرح كيفية إستنتاج التمثيل البياني (C_g) للدالة g إنطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة f :

إذا كان $x\in \left]-\infty,-1\right[\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$ فإن $g(x)=f(x)$ و منه فالتمثيل البياني (C_g) ينطبق على (C_f) .

إذا كان $x\in \left]-1,\frac{2}{3}\right]$ فإن $g(x)=-f(x)$ و منه فالتمثيل البياني (C_g) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $h(x)=f(|x|)$

أ- تعيين مجموعة تعريف الدالة h :

تكون الدالة h معرفة إذا و فقط إذا كان $|x|\in D_f$ معناه إذا و فقط إذا كان $|x|\neq -1$ و هذا الأمر محقق دوما لأن $|x|\geq 0$ و منه نستنتج أن : $D_h=\mathbb{R}$

ب- إثبات أن الدالة h زوجية :

من أجل كل $x\in D_h$ أي $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ أي $-x\in D_h$

و من جهة أخرى : من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_h$ فإن : $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$ لأن من خواص القيمة المطلقة لعدد حقيقي نعلم أن : $|-x|=|x|$ ، و منه h دالة زوجية .

جـ- شرح كيفية إستنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h إنطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة f :

- إذا كان $x\in[0,+\infty[$ فإن $|x|=x$ و منه يكون $h(x)=f(x)$ و بالتالي فالتمثيل البياني (C_h) للدالة h

ينطبق على التمثيل البياني (C_f) للدالة f .

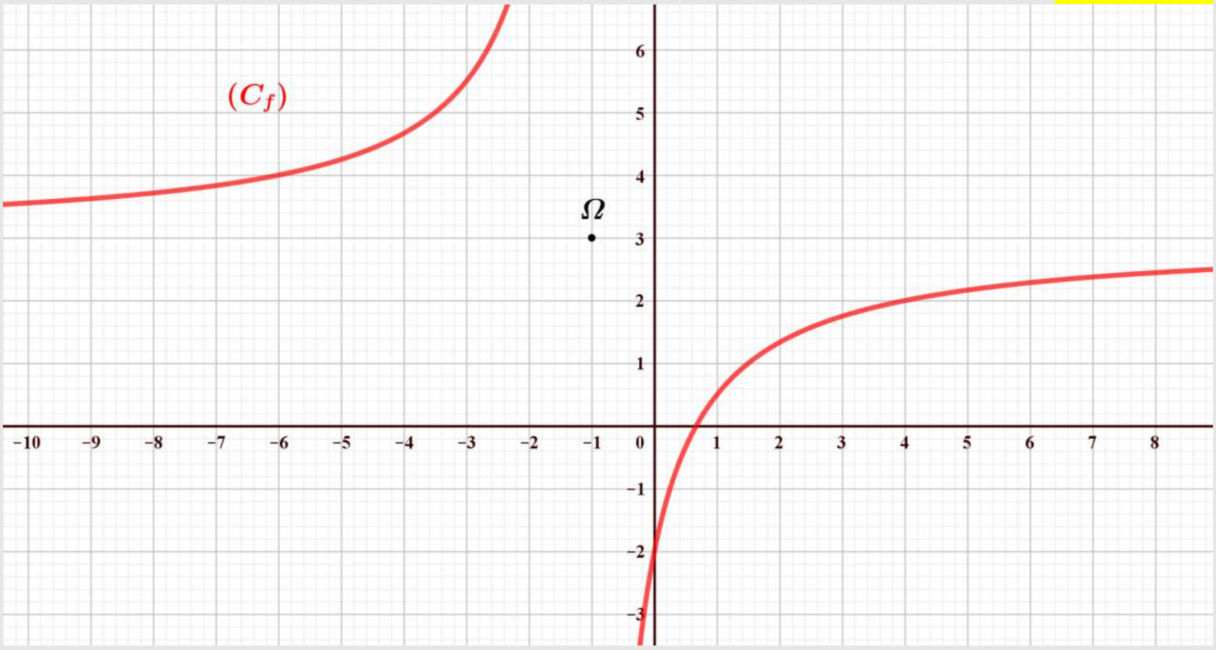
- إذا كان $x \in]-\infty,0]$ فإن $|x| = -x$ و منه يكون $h(x) = f(-x)$ و بالتالي فالتمثيل البياني (C_h) للدالة h متناظر مع التمثيل البياني (C_f) للدالة f بالنسبة لمحور التراتيب (h زوجية)

التمثيلات البيانية (C_f) ، (C_g) و (C_h) :

بما أن $f(x) = 3 - \frac{5}{x+1}$ فإن العبارة $f(x)$ تكتب من الشكل الآتي : $f(x) = k(x+a)+b$ بحيث

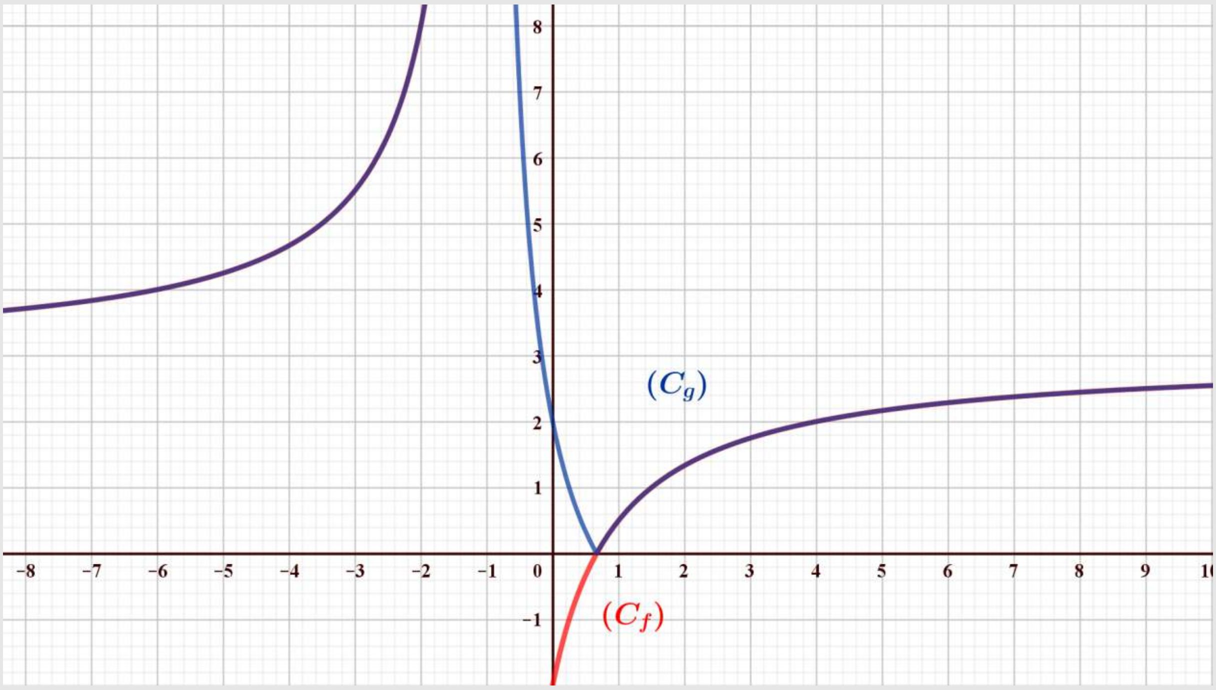
$k(x) = -\frac{5}{x}$ و $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$ و منه (C_f) هو صورة (C_k) التمثيل البياني للدالة k بالإنسحاب الذي شعاعه

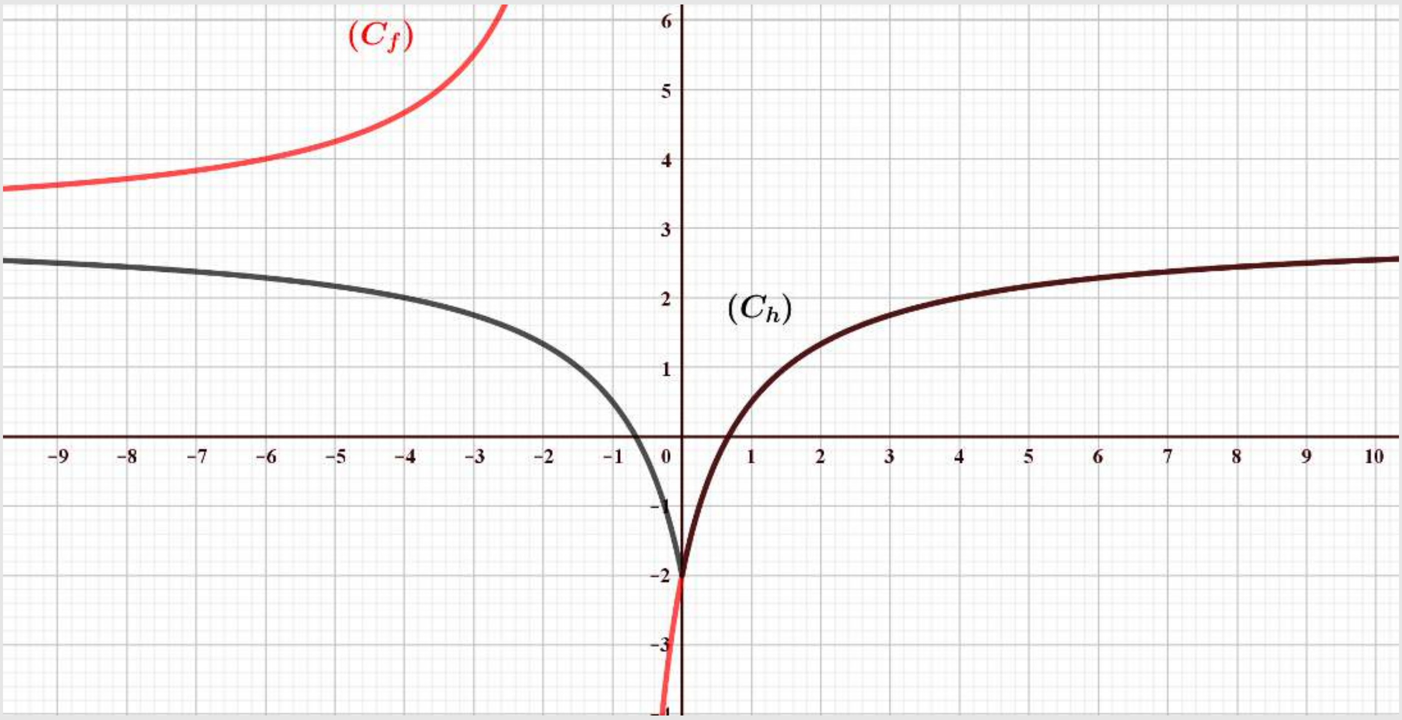
$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (أنشئ أولا بيان الدالة k بالإستعانة بـ (H) بيان الدالة مقلوب)



إنشاء المنحنى (C_g) في معلم مستقل لمساعدة التلميذ على الفهم الجيد و التمييز بين المنحنيات :

و كذلك إنشاء المنحنى (C_h) في معلم مستقل لمساعدة التلميذ على الفهم الجيد و التمييز بين المنحنيات :





مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح ...

<u>الأستاذ</u> : حناش نبيل