السلسلة رقم 02

كثيرات الحدود

- العمليات على كثيرات الحدود
- جذور كثير حدود
- حل معادلات ومتراجحات من الدرجة الثانية والثالثة

التمرين رقم 01

في كل حالة ممّا يلي: عيّن قيم m حتى يكون α جذرا لكثير الحدود p.

1. $p(x)=mx^2-2mx-4m-2 \quad ;\alpha=4$
2. $p(x)=2m^2x^4+mx-m \quad ;\alpha=-1$
3. $p(x)=-m^2x^3+m(2m-3)x^2+3x \quad ;\alpha=2$

التمرين رقم 02

عيّن في كل حالة قيم الأعداد الحقيقية a، b و c حتى يتساوى كثيرا الحدود P و Q.

1. $\begin{cases} P(x)=(x-1)(x+2) \\ Q(x)=ax^3+bx^2+x+c \end{cases}$
2. $\begin{cases} P(x)=x^2+2x-4 \\ Q(x)=\dfrac{a}{3}x^2+7bx-10c \end{cases}$
3. $\begin{cases} P(x)=2x^2+4x+5 \\ Q(x)=(ax+1)(2x+b)+c \end{cases}$
4. $\begin{cases} P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c) \\ Q(x)=x^3+3x^2+5x+3 \end{cases}$

التمرين رقم 03

في كل حالة من الحالات الآتية:

1) بيّن أنّ α جذر لكثير الحدود p.

2) حلّل $p(x)$، ثمّ عيّن كل جذوره.

1. $p(x)=x^3+x^2-7x-3 \quad ;\alpha=-3$
2. $p(x)=4x^3+4x^2-9x-9 \quad ;\alpha=-1$
3. $p(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2+x-5 \quad ;\alpha=2$
4. $p(x)=x^4-3x^2+2x \quad ;\alpha=1$

التمرين رقم 04

نعطى المعادلة: $ax^2+5x+\frac{6}{a}=0...(*)$، حيث a عدد حقيقي غير معدوم.

1) بيّن أنّ $(*)$ تقبل حلّين متمايزين x_1 و x_2، من أجل كل $a\neq 0$، لا يطلب تعيينهما.

2) بيّن أنّ x_1 و x_2 من نفس الإشارة.

3) ناقش حسب إشارة a إشارة الحلين x_1 و x_2.

4) عيّن قيمة a إذا علمت أنّ $x_1+x_2=5$، استنتج عندئذ الجداء x_1x_2.

التمرين رقم 05

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

1. $3x^4-8x^2+4=0$
2. $2x-9\sqrt{x}+7=0$
3. $\frac{x+3}{x-1}+\frac{x}{x+3}=\frac{2}{5}$
4. $\sqrt{5x+2}=x+1$
5. $\frac{9}{x^2}+4x^2-12\leq 0$
6. $\sqrt{1-2x}\geq\sqrt{x^2+1}$
7. $\frac{-6x^2}{x^2-1}>\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}$
8. $\frac{2}{x^2+3x+2}\leq\frac{1}{x+2}$
9. $\frac{1}{x^{2020}+14x^{1442}+2021}>0$

التمرين رقم 06

ليكن p كثير الحدود المعرّف على $\mathbb{R}$ بـ:
$$p(x)=2x^3-13x^2+27x-18$$

1) بيّن أنّ $\frac{3}{2}$ جذر لـ p.

2) أوجد الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون لكل $x\in\mathbb{R}$: $p(x)=(2x-3)(ax^2+bx+c)$.

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=0$.

4) أ- ادرس إشارة $p(x)$ ثمّ استنتج إشارة $p\left(\frac{2021}{2020}\right)$.

ب- عيّن حلول المتراجحة $2x-13<-\frac{27}{x}+\frac{18}{x^2}$.

5) نضع: $q(x)=\frac{p(x)}{\sqrt{2x-1}}$.

أ- عيّن قيم x حتى يكون لـ $q(x)$ معنى.

ب- استنتج حلول المتراجحة $q(x)>0$.

التمرين رقم 07

يعطى كثير الحدود: $p(x)=3x^3-2x^2-19x+\lambda$، حيث λ عدد حقيقي.

1) عيّن قيمة λ حتى يكون -2 جذرا لـ $p(x)$.

2) نأخذ $\lambda=-6$:

احسب $p(3)$ ثمّ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=0$.

3) ادرس حسب قيم x إشارة $p(x)$، ثمّ استنتج حلول المتراجحة $p(x)<0$.

4) أ- عيّن حلول المعادلة $p(2-x)=0$ ثمّ استنتج تحليلا لـ $p(2-x)$.

ب- ادرس إشارة $p(2-x)$، ثمّ استنتج حلول المتراجحة $p(2-x)<0$.

التمرين رقم 08

ليكن p كثير الحدود المعرف على $\mathbb{R}$ بالعبارة:
$$p(x)=x^3+2x^2-3$$

1) احسب $p(1)$ ثمّ حلّل $p(x)$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=0$، ثمّ استنتج حلول المعادلة $x^6+2x^4-3=0$.

3) ادرس إشارة $p(x)$، ثمّ استنتج حلول المتراجحة $p(x)<0$.

4) نضع: $Q(x)=\frac{x^3+2x^2-3}{-2x^2-3x+5}$.

أ- عيّن قيم x حتى تكون العبارة $Q(x)$ معرّفة.

ب- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $Q(x)\le 0$.

التمرين رقم 09

1) احسب $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:
$$x^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{6}=0...(1)$$
$$-4x^2+2\left(1+\sqrt{3}\right)x=\sqrt{3}...(2)$$

3) استنتج حلول المعادلة $-x+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sqrt{x}=\sqrt{6}$.

4) استنتج حلول الجملة ذات المجهولين الحقيقيين a و b التالية:
$$\begin{cases} a+b=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ ab=\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

التمرين رقم 10

P كثير حدود حيث: $P(x)=4x^3-13x-6$.

1) بيّن أنّ P يقبل القسمة على $x+\frac{1}{2}$.

2) جد كثير الحدود Q الذي يحقّق:
$$P(x)=(2x+1)\times Q(x)$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$، ثمّ استنتج حلول المعادلة $4x^2|x|-13|x|-6=0$.

4) ادرس إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$، ثمّ استنتج حلول المتراجحة $\frac{P(x)}{4-x^2}\ge 0$.

التمرين رقم 11

ليكن p كثير الحدود المعرّف على $\mathbb{R}$ بـ:

$$p(x)=-x^4+x^3+5x^2-3x-6$$

1) احسب $p(2)$ و $p(-1)$ ثم حلّل $p(x)$.

2) ادرس إشارة $p(x)$ ثمّ استنتج على $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة $p(x)\geq 0$.

3) حل في $\mathbb{R}^+$ المتراجحة التالية:

$$x^2-x\sqrt{x}-5x+3\sqrt{x}+6\geq 0$$

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$|x-1|^3+5(x-1)^2=(x-1)^4+3|x-1|+6$$

التمرين رقم 12

P_m كثير حدود و m وسيط حقيقي حيث:

$$P_m(x)=(m+1)x^3+(m-1)x^2-(m+2)x-m+2$$

1) عيّن قيمة m حتى يكون 1 جذرا لـ P_m.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$P_m(x)=(x-1)\left[(m+1)x^2+2mx+m-2\right]$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P_0(x)\geq 0$.

4) نضع: $Q_m(x)=(m+1)x^2+2mx+m-2$.

أ- عيّن قيم الوسيط m التي نجعل $Q_m(x)<0$ للّ x من $\mathbb{R}$.

ب- استنتج حلول المتراجحة $P_{-3}(x)\geq 0$.

التمرين رقم 13

نعتبر المعادلة (E) التالية:

$$x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0\ldots(E)$$

1) نحقّق أنّ 0 ليس حلا لـ (E).

2) بيّن أنّه إذا كان a حلا لـ (E) فإنّ $\frac{1}{a}$ كذلك حل لـ (E).

3) أثبت أنّ (E) تكافئ المعادلة (E'):

$$x^2-4x+2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0\ldots(E')$$

4) بيّن أنّ (E') تكتب كما يلي:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

5) استنتج حلول المعادلة (E).

التمرين رقم 14

لتكن المعادلة ذات المجهول الحقيقي x:

$$2x^4-21x^3+14x^2-21x+2=0\ldots(I)$$

1) بيّن أنّ حل المعادلة (I) يكافئ حل المعادلة التالية: $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0\ldots(II)$.

2) بوضع $t=x+\frac{1}{x}$، استنتج حلول المعادلة (I).

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة:

$$2x^4-21x^3+14x^2-21x+2\leq 0$$

التمرين رقم 15

نعتبر كثير الحدود f_m المعرف كما يلي:

$$f_m(x)=(2m-1)x^3+(5m-5)x^2+(4m-8)x+m-4$$

حيث m وسيط حقيقي.

1) بيّن أنّ f_m يقبل القسمة على $x+1$ مهما كانت قيمة m.

2) أوجد كثير الحدود g_m الذي يحقّق:

$$f_m(x)=(x+1)\times g_m(x)$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\frac{f_4(x)}{f_1(x)}\geq 0$.

4) عيّن قيم الوسيط m في كل حالة ممّا يلي:

أ- المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل 3 حلول متمايزة.

ب- المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.

ج- المعادلة $f_m(x)=0$ تقبل 3 حلول سالبة.