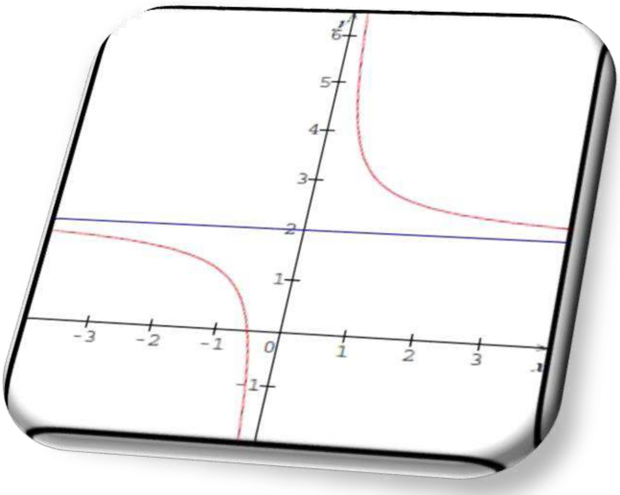
الرياضيات في الثانوية

تمارين متنوعة في محور الدوال العددية

مرفقة بحلول مفصلة

18 تمرين

للسنة الثانية ثانوي



كتابة الأستاذ :

حناش نبيل

Octobre 2021

التمرين رقم 01 :

أذكر إن كانت الدالتان f و g متساويتان في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=x+2$ و $g(x)=\sqrt{(x+2)^2}$

2) $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$ و $g(x)=|x|$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

5) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(x-1)(x+1)}$ و $g(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x^2-1}$

6) $f(x)=1+\dfrac{2}{x+3}$ و $g(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$

التمرين رقم 02 :

عين $f\circ g$ و $g\circ f$ بعد تعيين مجموعة تعريف $f\circ g$ و $g\circ f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2x$ و $g(x)=-3x$

2) $f(x)=x-3$ و $g(x)=2x+3$

3) $f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$ و $g(x)=2x$

4) $f(x)=2x^2-1$ و $g(x)=4x^2-3x$

5) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}-3$

6) $f(x)=3x-2$ و $g(x)=\cos(x-1)$

التمرين رقم 03 :

فكك الدالة f إلى مركب دالتين بسيطتين في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=(x-1)^2$

2) $f(x)=(x+2)^2+1$

3) $f(x)=\frac{1}{2x+3}$

4) $f(x)=\sqrt{x+1}$

5) $f(x)=\sqrt{x-1}+2$

6) $f(x)=\cos(x-1)$

7) $f(x)=\left|\frac{2x}{5}-1\right|$

التمرين رقم 04 :

f و g دالتان حيث : $f(x)=-\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=2x$

1- عين مجموعة تعريف الدالتين f و g ثم عين مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$

2- أحسب $g\circ f(x)$

3- استنتج إتجاه تغير الدالة $g\circ f$ بالإعتماد على تغيرات الدالتين f و g .

التمرين رقم 05 :

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=2x-1$ و $g(x)=3x^2+1$

1) عرف الدوال : $g\circ f$ ، $f\circ g$ ، $f\circ f$ ، $g\circ g$

2) هل الدالتان $f\circ g$ و $g\circ f$ متساويتان ؟

3) أكتب الدالة g على شكل مركب دالتين بسيطتين يطلب تحديدهما .

التمرين رقم 06 :

أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{2}{x}+3$ $\quad I=]0,+\infty[$

2) $f(x)=3x^2+2$ $\quad I=]-\infty,0]$

3) $f(x)=(3-2x)^2$ $\quad I=\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$

4) $f(x)=(x+2)^2-1$ $\quad I=[-2,+\infty[$

5) $f(x)=\sqrt{2-x}$ $\quad]-\infty,2]$

6) $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ $\quad I=[1,+\infty[$

7) $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad I=[0,\pi]$

8) $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ $\quad I=[0,\pi]$

التمرين رقم 07 :

f و g دالتان معرفتان على المجال $I=[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x$ و $g(x)=x^2$

أثبت أن الدالة $f+g$ متزايدة تماما على المجال I .

التمرين رقم 08 :

f دالة معرفة على المجال $]-\infty,0]$ بـ : $f(x)=x^2+|x|$

1) أثبت أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$.

2) إستنتج إتجاه تغير الدالتين $2f-5$ ، $-3f+2$ على المجال $]-\infty,0]$.

التمرين رقم 09 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+x+1$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

2) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) التمثيل البياني للدالة f إنطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها ثم أنشئ (C_f) .

3) بين كيف يمكن إستنتاج التمثيلات البيانية للدوال الآتية : $g(x)=f(x+2)$ ،
$h(x)=f(x)+1$ ، $k(x)=f(x-2)+1$ ، $u(x)=-f(x)$ ، $v(x)=|f(x)|$
$w(x)=f(|x|)$.

التمرين رقم 10 :

1) أثبت بطريقتين مختلفتين أن النقطة $\Omega(a,b)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

أ- $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ ، $\Omega(-1,1)$

ب- $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ ، $\Omega(1,2)$

2) أثبت بثلاث طرق مختلفة أن المستقيم الذي معادلة له $x=a$ محور تناظر للمنحنى (C_f) :

أ- $f(x)=x^2+4x+3$ ، $x=-2$

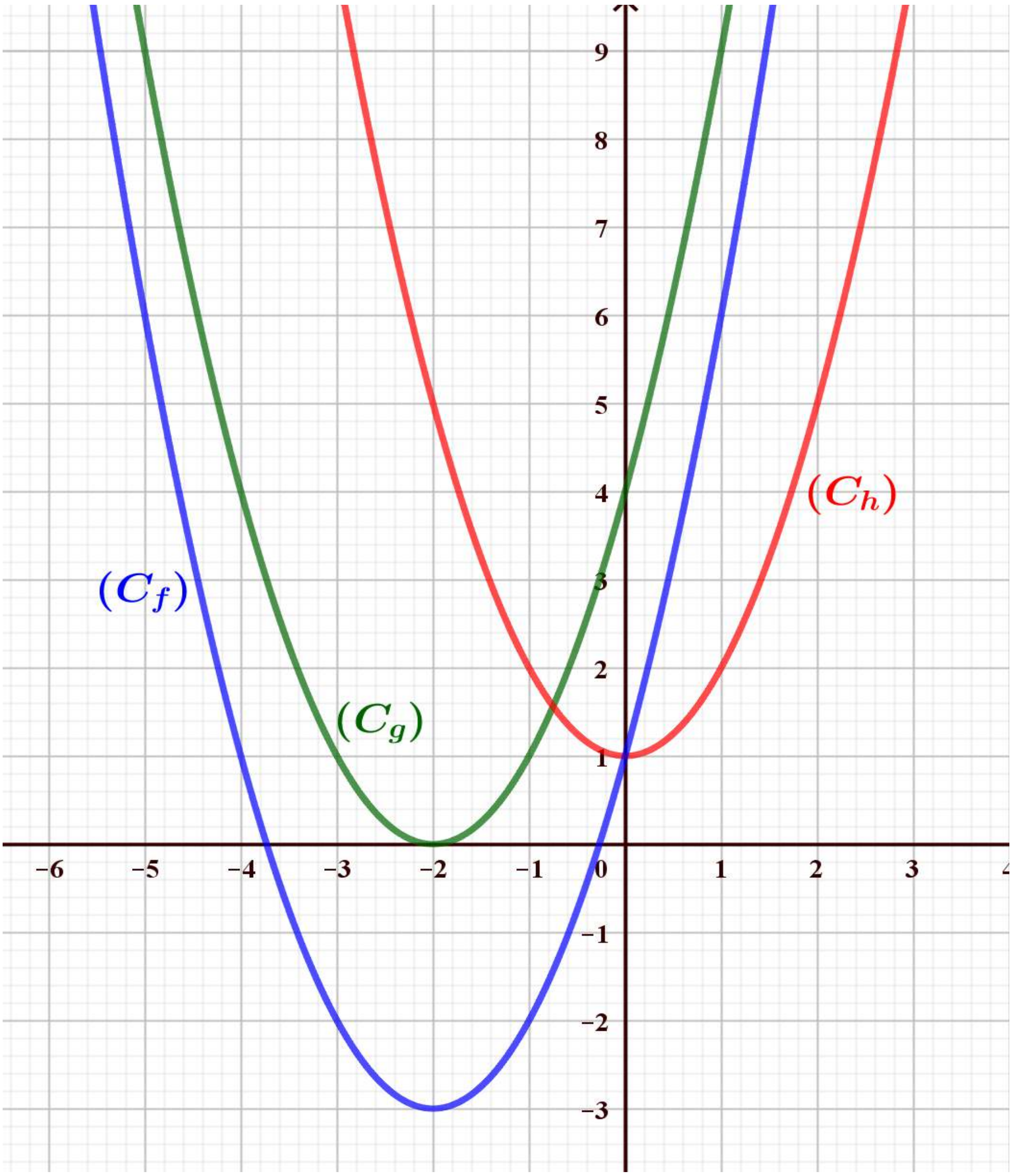
ب- $f(x)=\sqrt{x^2+6x+10}$ ، $x=-3$

التمرين رقم 11 :

(C_f) ، (C_g) و (C_h) صور لمنحنى الدالة "مربع" بإنسحاب شعاعه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ على الترتيب كما هو موضح في الشكل أدناه .

1) عين مركبتا كل من الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

2) عين دستور الدوال f ، g و h .



التمرين رقم 12 :

f ، g و h دوال معرفة كما يلي :

$$f(x)=3x-\frac{1}{3x} \quad ، \quad g(x)=1-\frac{1}{3x} \quad و \quad h(x)=3x-1$$

1) فكك الدالة f إلى مجموع دالتين u و v يطلب تعيينهما .

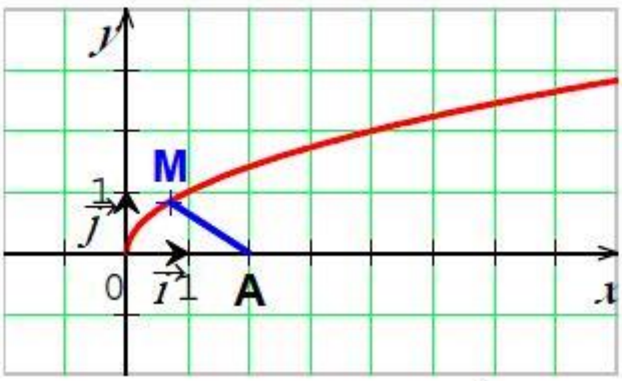
2) عين إتجاه تغير الدالتين u و v على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$.

3) أحسب و بسط $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

4) هل الدالتان $\dfrac{f}{g}$ و h متساويتان ؟

التمرين رقم 13 :

في مستو مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر المنحني (C) الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ و النقطة A التي إحداثييها $(2,0)$.



الهدف من هذه المسألة هو تعيين النقطة من (C) الأقرب من A .

ليكن x عدد حقيقي موجب و M النقطة من (C) التي فاصلتها x .

1) عبر عن AM بدلالة x .

2) لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

أ- ما هي العلاقة الموجودة بين AM و $f(x)$ ؟

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $[0,+\infty[$.

جـ- استنتج إحداثيي النقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

التمرين رقم 14 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(x+1)(x-4)$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

2) إشرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_f) للدالة f إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة "مربع"

ثم أنشئ (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$: $g(x)=f(x)$

ب- أثبت أن g دالة زوجية .

جـ- إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) التمثيل البياني للدالة g بالإعتماد على (C_f) ثم أنشئ (C_g) .

التمرين رقم 15 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{5-x}{2x-6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين إحداثيي نقط تقاطع المنحني $\left(C_f\right)$ مع محوري الإحداثيات .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 فإن : $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x-3}$

3) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ : $g\left(x\right)=\frac{1}{x-3}$

أ- بين أنه يمكن كتابة g على شكل مركب دالتين يطلب تعيينهما .

ب- أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أنه من أجل كل x حيث $3<x<5$ فإن : $f\left(x\right)>0$

5) أثبت أن النقطة $\omega\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني $\left(C_f\right)$.

6) بالإعتماد على التمثيل البياني للدالة "مقلوب" ، أنشئ المنحني $\left(C_f\right)$.

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f\left(x\right)=m$.

التمرين رقم 16 :

f الدالة المعرفة كما يلي : $f\left(x\right)=\frac{2x+6}{x-1}$

1) أ- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- عين العددين الحقيقيين α ، β بحيث من أجل كل x من D_f يكون : $f\left(x\right)=\alpha+\frac{\beta}{x-1}$

جـ- استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$

2) نعتبر الدالة g حيث : $g\left(x\right)=\sqrt{\frac{2x+6}{x-1}}$

أ- عين D_g مجموعة تعريف الدالة g .

ب- بين أن g هي مركب دالتين يطلب تعيينهما .

جـ- استنتج إتجاه تغير الدالة g على المجالين $]-\infty;-3]$ و $]1,+\infty[$.

التمرين رقم 17 :

I- f الدالة المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

✓ بين أن : $(f\circ f)(x)=x$ ثم استنتج قيمة $(f\circ f\circ f)(2)$

II- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=\alpha x+\beta$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^*$ و $\beta\in\mathbb{R}$

✓ عرف الدالة $g\circ g$

✓ عين الثنائية $(\alpha;\beta)$ التي من أجلها يكون : $g\circ g=g$

التمرين رقم 18 :

يعطى جدول التغيرات لدالة f معرفة على المجال $[-3,4]$ كما يلي :

x	-3		-1		0		2		3		4
$f(x)$	4	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	5	↘	2

- نعتبر الدوال g ، h ، k و u المعرفة بـ :

$$g(x)=[f(x)]^2 \qquad ; \qquad h(x)=-f(x)$$

$$u(x)=\sqrt{f(x)} \quad ; \quad k(x)=\frac{1}{f(x)}$$

1) حدد إشارة $f(x)$ على المجال $[-3,4]$.

2) عين مجموعة تعريف كل من الدوال g ، h ، k و u .

3) باستعمال إتجاه تغير مركب دالتين ، شكل جدول تغيرات الدوال g ، h ، k و u .

4) أنشئ (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، ثم استنتج (C_h) و كذا المنحنيين (C_p) و (C_q) للدالتين p و q المعرفتين كما يلي :

$$p(x)=f(-x) \quad ; \quad q(x)=|f(x)|$$

حل التمرين رقم 01 :

(1 $f(x)=x+2$ و $g(x)=\sqrt{(x+2)^2}$

لدينا : $D_f=D_g$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=\sqrt{(x+2)^2}=|x+2|$ ، إذن $f\neq g$.

(2 $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$

$D_f=D_g$ و من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=f(x)$ ، إذن $f=g$.

(3 $f(x)=\dfrac{x^2}{|x|}$ و $g(x)=|x|$

$D_f=\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$ و $D_g=\mathbb{R}$ ، إذن $f\neq g$.

(4 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$

نعين D_f و D_g : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x\geq 0$ و $\sqrt{x}-1\neq 0$ أي $x\geq 0$ و $x\neq 1$ و منه $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$ و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x\geq 0$ و $x-1\neq 0$ أي $x\geq 0$ و $x\neq 1$ و منه $D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$ ، إذن $D_f=D_g$. و من جهة أخرى من أجل كل $x\in D_f$ فإن :

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}=g(x)$ و منه نستنتج أن : $f=g$.

(5 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(x-1)(x+1)}$ و $g(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x^2-1}$

نعين D_f و D_g : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $(x-1)(x+1)\neq 0$ يكافئ $(x-1)\neq 0$ و $(x+1)\neq 0$ يكافئ $x\neq 1$ و $x\neq -1$ و منه $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2-1\neq 0$ يكافئ $(x-1)(x+1)\neq 0$ يكافئ $x\neq -1$ و $x\neq 1$ و منه $D_g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ، إذن

$D_f = D_g$. و من جهة أخرى من أجل كل $x \in D_g$ فإن : $g(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{(x-1)(x+1)} = f(x)$

و منه نستنتج أن : $f = g$.

(6 $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x+3}$ و $g(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$

نعين D_f و D_g : تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+3 \neq 0$ أي $x \neq -3$ و منه

$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ و تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $(x-3)^2 \neq 0$ أي إذا و فقط إذا كان

$x-3 \neq 0$ أي $x \neq 3$ و منه $D_g = \mathbb{R} - \{3\}$ ، إذن $D_f \neq D_g$. و منه نستنتج أن : $f \neq g$.

حل التمرين رقم 02 :

تعيين $f \circ g$ و $g \circ f$ بعد تعيين مجموعة تعريف $f \circ g$ و $g \circ f$ في كل حالة من الحالات التالية :

(1 $f(x) = 2x$ و $g(x) = -3x$

$D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(-3x) = 2(-3x) = -6x$ و

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x) = -3(2x) = -6x$.

(2 $f(x) = x-3$ و $g(x) = 2x+3$

$D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x+3) = 2x+3-3 = 2x$ و

$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x-3) = 2(x-3)+3 = 2x-3$.

(3 $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ و $g(x) = 2x$

نعين $D_{f \circ g}$: من أجل كل $x \in D_g$ أي $x \in \mathbb{R}$ فإن $g(x) \in D_f$ معناه $g(x) \neq -1$ أي $2x \neq -1$ و منه

$x \neq -\frac{1}{2}$ ، إذن $D_{f\circ g} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ و من أجل كل $x \in D_{f\circ g}$ فإن :

$$f\circ g(x) = f[g(x)] = f(2x) = -\frac{1}{2x+1}$$

نعين $D_{g\circ f}$: من أجل كل $x \in D_f$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ أي $x \neq -1$ فإن $f(x) \in D_g$ معناه $f(x) \in \mathbb{R}$

إذن $D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$ و من أجل كل $x \in D_{g\circ f}$ فإن :

$$g\circ f(x) = g[f(x)] = g\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{2}{x+1}$$

(4 $f(x) = 2x^2 - 1$ و $g(x) = 4x^2 - 3x$

$D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$f\circ g(x) = f[g(x)] = f(4x^2 - 3x) = 2(4x^2 - 3x)^2 - 1$ أي

$f\circ g(x) = 32x^4 - 48x^3 + 18x^2 - 1$ و

$g\circ f(x) = g[f(x)] = 4(2x^2 - 1)^2 - 3(2x^2 - 1)$ أي $g\circ f(x) = 16x^4 - 22x^2 + 7$.

(5 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$ و $g(x) = \frac{1}{x} - 3$

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x^2 + 2x \geq 0$ أي إذا و فقط إذا كان $x(x+2) \geq 0$ و باستعمال

جدول الإشارة نجد : $D_f =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

نعين $D_{f\circ g}$: من أجل كل $x \in D_g$ أي $x \in \mathbb{R}^*$ أي $x \neq 0$ فإن $g(x) \in D_f$ معناه

$g(x) \in]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$ أي $g(x) \leq -2$ أو $g(x) \geq 0$ أي $\frac{1}{x}-3 \leq -2$ أو $\frac{1}{x}-3 \geq 0$ معناه

$\frac{1}{x} \leq 1$ أو $\frac{1}{x} \geq 3$ معناه $x \in]-\infty,0[\cup [1,+\infty[$ أو $x \in \left]0,\frac{1}{3}\right]$ و منه

$x \in]-\infty,0[\cup \left]0,\frac{1}{3}\right] \cup [1,+\infty[$ ، إذن : $D_{f\circ g} =]-\infty,0[\cup \left]0,\frac{1}{3}\right] \cup [1,+\infty[$

و من أجل كل $x \in D_{f\circ g}$ فإن : $f \circ g(x) = f\left[g(x)\right] = \sqrt{\left(\frac{1}{x}-3\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}-3\right)}$ أي

$$f \circ g(x) = \sqrt{\frac{3x^2-4x+1}{x^2}}$$

نعين $D_{g\circ f}$: من أجل كل $x \in D_f$ أي $x \in]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$ فإن $f(x) \in D_g$ معناه $f(x) \neq 0$ أي

$\sqrt{x^2+2x} \neq 0$ أي $x^2+2x \neq 0$ أي $x(x+2) \neq 0$ معناه $x \neq 0$ و $x \neq -2$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-2,0\}$

إذن بالتقاطع ينتج : $x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ و منه $D_{g\circ f} =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

و من أجل كل $x \in D_{g\circ f}$ فإن : $g \circ f(x) = g\left[f(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} - 1$ أي

$$g \circ f(x) = \frac{1-\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$$

6) $f(x) = 3x-2$ و $g(x) = \cos(x-1)$

$D_{f\circ g} = D_{g\circ f} = \mathbb{R}$ ، و من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f \circ g(x) = f\left[g(x)\right] = 3\cos(x-1)-2$ و

$g \circ f(x) = g\left[f(x)\right] = \cos(3x-2-1) = \cos(3x-3)$

حل التمرين رقم 03 :

تفكيك الدالة f إلى مركب دالتين بسيطتين في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=(x-1)^2$

لدينا : $x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} (x-1)^2$

$f=v\circ u$ حيث : $u:x\mapsto x-1$ و $v:x\mapsto x^2$

2) $f(x)=(x+2)^2+1$

لدينا : $x \xrightarrow{u} x+2 \xrightarrow{v} (x+2)^2+1$

$f=v\circ u$ حيث : $u:x\mapsto x+2$ و $v:x\mapsto x^2+1$

3) $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$

لدينا : $x \xrightarrow{u} 2x+3 \xrightarrow{v} \dfrac{1}{2x+3}$

$f=v\circ u$ حيث : $u:x\mapsto 2x+3$ و $v:x\mapsto \dfrac{1}{x}$

4) $f(x)=\sqrt{x+1}$

لدينا : $x \xrightarrow{u} x+1 \xrightarrow{v} \sqrt{x+1}$

$f=v\circ u$ حيث : $u:x\mapsto x+1$ و $v:x\mapsto \sqrt{x}$

5) $f(x)=\sqrt{x-1}+2$

لدينا : $x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} \sqrt{x-1}+2$

$f=v\circ u$ حيث : $u:x\mapsto x-1$ و $v:x\mapsto \sqrt{x}+2$

6) $f(x)=\cos(x-1)$

لدينا : $x \xrightarrow{u} x-1 \xrightarrow{v} \cos(x-1)$

$f = v \circ u$ حيث : $u : x \mapsto x-1$ و $v : x \mapsto \cos x$

7) $f(x) = \left|\frac{2x}{5} - 1\right|$

لدينا : $x \xrightarrow{u} \frac{2x}{5} - 1 \xrightarrow{v} \left|\frac{2x}{5} - 1\right|$

$f = v \circ u$ حيث : $u : x \mapsto \frac{2x}{5} - 1$ و $v : x \mapsto |x|$

حل التمرين رقم 04 :

f و g دالتان حيث : $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ و $g(x) = 2x$

1- تعيين مجموعة تعريف الدالتين f و g ثم تعيين مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$:

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x+1 \neq 0$ أي إذا و فقط إذا كان $x \neq -1$ و منه $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

مجموعة تعريف الدالة g هي $\mathbb{R}$.

حيث : $D_{g \circ f} = \{x / x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

من أجل كل $x \in D_f$ أي $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ أي $x \neq 1$ فإن $f(x) \in D_g$ معناه $f(x) \in \mathbb{R}$ و منه ينتج أن :

$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

2- حساب $g \circ f(x)$:

من أجل كل $x \in D_{g \circ f}$ فإن : $g \circ f(x) = g[f(x)] = -\frac{2}{x+1}$

3- استنتاج إتجاه تغير الدالة $g \circ f$ بالإعتماد على تغيرات الدالتين f و g :

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty,-1[$ و $]-1,+\infty[$ لأن f هي مركب الدالة

$u:x\mapsto x+1$ (تآلفية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$) متبوعة بالدالة $v:x\mapsto -\frac{1}{x}$ و هي متزايدة تماما على

المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ ، الدالة g هي دالة خطية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

من أجل كل $x\in]-\infty,-1[$ فإن : $x<-1$ و منه $x+1<0$ و منه $\frac{1}{x+1}<0$ و بالتالي $-\frac{1}{x+1}>0$ أي

$f(x)>0$ أي $f(x)\in]0,+\infty[$ حيث أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و منه فالدالة

$g\circ f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty,-1[$.

من أجل كل $x\in]-1,+\infty[$ فإن : $x>-1$ و منه $x+1>0$ و منه $\frac{1}{x+1}>0$ و بالتالي $-\frac{1}{x+1}<0$

أي $f(x)<0$ أي $f(x)\in]-\infty,0[$ حيث أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty,0[$ و منه فالدالة

$g\circ f$ متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$.

حل التمرين رقم 05 :

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-1$ و $g(x)=3x^2+1$

1) تعريف الدوال : $g\circ f$ ، $f\circ g$ ، $f\circ f$ ، $g\circ g$:

لدينا : $D_{g\circ f}=D_{f\circ g}=D_{f\circ f}=D_{g\circ g}=\mathbb{R}$

من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$$\begin{cases} g\circ f(x)=g[f(x)]=3(2x-1)^2+1=12x^2-12x+4 \\ f\circ g(x)=f[g(x)]=2(x^2+1)-1=2x^2+1 \\ f\circ f(x)=f[f(x)]=2(2x-1)-1=4x-3 \\ g\circ g(x)=g[g(x)]=3(3x^2+1)^2+1=27x^4+18x^2+4 \end{cases}$$

2) الدالتان $g\circ f$ و $f\circ g$ غير متساويتين و نكتب $g\circ f\neq f\circ g$.

3) كتابة الدالة g على شكل مركب دالتين بسيطتين يطلب تحديدهما :

لدينا : $x\xrightarrow{u}x^2\xrightarrow{v}3x^2+1$

حيث : $g = v \circ u$ و $u : x \mapsto x^2$ و $v : x \mapsto 3x+1$

حل التمرين رقم 06 :

دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

(1 $f(x) = \dfrac{2}{x} + 3$ $\qquad I =]0,+\infty[$

إذا اعتبرنا الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = \dfrac{1}{x}$ يكون لدينا : $f = 2g+3$

للدالتين f و $2g$ نفس إتجاه التغير لأن f من الشكل $f = \lambda g + k$ حيث $\lambda = 2 > 0$ و $k = 3$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و منه الدالة $2g$ متناقصة تماما على $]0,+\infty[$ ، إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.

(2 $f(x) = 3x^2 + 2$ $\qquad I =]-\infty,0]$

إذا اعتبرنا الدالة g المعرفة على $]-\infty,0]$ بـ : $g(x) = x^2$ يكون لدينا : $f = 3g+2$

للدالتين f و $3g$ نفس إتجاه التغير لأن f من الشكل $f = \lambda g + k$ حيث $\lambda = 3 > 0$ و $k = 2$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$ و منه الدالة $3g$ متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ ، إذن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$.

(3 $f(x) = (3-2x)^2$ $\qquad I = \left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ بـ : $u(x) = 3-2x$ و حيث من أجل كل x من المجال $\left]-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ يكون $x \leq \dfrac{3}{2}$ و منه $-2x \geq -3$ و منه $3-2x \geq 0$ أي $u(x) \geq 0$ أي $u(x) \in [0,+\infty[$ ،

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $v(x) = x^2$ و عليه فإن :

$f = v \circ u$. بما أن الدالة u متناقصة تماما على $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$ (لأنها تآلفية و $a=-2<0$) و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ (الدالة مربع) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$.

4) $f(x)=(x+2)^2-1$ $\qquad I=[-2,+\infty[$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[-2,+\infty[$ بـ : $u(x)=x+2$ و حيث من أجل كل x من المجال $[-2,+\infty[$ يكون $x\geq -2$ و منه $x+2\geq 0$ أي $u(x)\geq 0$ أي $u(x)\in[0,+\infty[$ ، نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $v(x)=x^2-1$ و عليه فإن :

$f = v \circ u$. بما أن الدالة u متزايدة تماما على $[-2,+\infty[$ (لأنها تآلفية و $a=1>0$) و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ (لأن الدالة مربع متزايدة تماما على $[0,+\infty[$) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متزايدة تماما على $[-2,+\infty[$.

5) $f(x)=\sqrt{2-x}$ $\qquad]-\infty,2]$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $]-\infty,2]$ بـ : $u(x)=2-x$ و حيث من أجل كل x من المجال $]-\infty,2]$ يكون $x\leq 2$ و منه $-x\geq -2$ و منه $2-x\geq 0$ أي $u(x)\geq 0$ أي $u(x)\in[0,+\infty[$ ، نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $v(x)=\sqrt{x}$ و عليه فإن :

$f = v \circ u$. بما أن الدالة u متناقصة تماما على $]-\infty,2]$ (لأنها تآلفية و $a=-1<0$) و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ (دالة الجذر التربيعي) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,2]$.

6) $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ $\qquad I=[1,+\infty[$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ : $u(x)=x-1$ و حيث من أجل كل x من المجال $[1,+\infty[$ يكون $x\geq 1$ و منه $x-1\geq 0$ أي $u(x)\geq 0$ أي $u(x)\in[0,+\infty[$ ، نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـ : $v(x)=\sqrt{x}+2$ و عليه فإن :

$f=v\circ u$. بما أن الدالة u متزايدة تماما على $[1,+\infty[$ (لأنها تآلفية و $a=1>0$) و الدالة v متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ (لأن دالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على $[0,+\infty[$) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين تكون الدالة f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$.

(7 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad I=[0,\pi]$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بـ : $u(x)=x+\frac{\pi}{4}$ و حيث من أجل كل x من المجال $[0,\pi]$ يكون $0\leq x\leq\pi$ و منه $\frac{\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{4}$ أي $u(x)\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ بـ : $v(x)=\sin x$ و عليه فإن :

$f=v\circ u$. الدالة u متزايدة تماما على $[0,\pi]$ (لأنها تآلفية و $a=1>0$) ، لكن الدالة v ليست رتيبة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ (أنظر الدائرة المثلثية) حيث أن الدالة $v:x\mapsto\sin x$ متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$ ($\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$)

✓ $u(x)\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ معناه : $\frac{\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{2}$ و منه $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ أي $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

✓ $u(x)\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$ معناه : $\frac{\pi}{2}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{4}$ و منه $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\pi$ أي $x\in\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$

إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ لأن للدالتين u

و v نفس إتجاه التغير ، و f متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ لأن للدالتين u و v إتجاها تغير

متعاكسين .

8) $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad I=[0,\pi]$

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بـ : $u(x)=x+\frac{\pi}{6}$ و حيث من أجل كل x من المجال $[0,\pi]$

يكون $0\le x\le\pi$ و منه $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$ أي $u(x)\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

نعتبر الدالة v المعرفة على المجال $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$ بـ : $v(x)=\cos x$ و عليه فإن :

$f=v\circ u$. الدالة u متزايدة تماما على $[0,\pi]$ (لأنها تآلفية و $a=1>0$) ، و الدالة v ليست

رتيبة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$ (أنظر الدائرة المثلثية) حيث أن الدالة $v:x\mapsto\cos x$ متناقصة تماما

على المجال $\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\pi,\frac{7\pi}{6}\right]$ ($\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]=\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]\cup\left[\pi,\frac{7\pi}{6}\right]$)

✓ $u(x)\in\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$ معناه : $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\pi$ و منه $0\le x\le\frac{5\pi}{6}$ أي $x\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$

✓ $u(x)\in\left[\pi,\frac{7\pi}{6}\right]$ معناه : $\pi\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$ و منه $\frac{5\pi}{6}\le x\le\pi$ أي $x\in\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$ لأن للدالتين

u و v إتجاها تغير متعاكسين ، و f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ لأن للدالتين u و v نفس

إتجاه التغير .

حل التمرين رقم 07 :

f و g دالتان معرفتان على المجال $I=[0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x$ و $g(x)=x^2$

إثبات أن الدالة $f+g$ متزايدة تماما على المجال I :

الدالة f هي دالة خطية متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ (لأن $a=1>0$) و الدالة g متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ (الدالة مربع) ، إذن حسب مبرهنة مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I فإن الدالة $f+g$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$.

حل التمرين رقم 08 :

f دالة معرفة على المجال $]-\infty,0]$ بـ : $f(x)=x^2+|x|$

1) إثبات أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,0]$:

إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على المجال $]-\infty,0]$ بـ : $u:x\mapsto x^2$ و $v:x\mapsto|x|$ ، إذن $f=u+v$ حيث أن الدالة u (الدالة مربع) متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ و كذلك الدالة v متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ (دالة القيمة المطلقة) ، إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير مجموع دالتين متناقصتين تماما على مجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$.

ملاحظة هامة : لا يمكن إعطاء قاعدة عامة حول إتجاه تغير مجموع دالتين إحداهما متزايدة تماما على مجال I و الأخرى متناقصة تماما على I ...

مثال 1 : $I=[0,+\infty[$ ، $u:x\mapsto 3x+1$ ، $v:x\mapsto -2x$ و منه :

$u(x)+v(x)=x+1$ ، إذن $u+v$ دالة متزايدة تماما على I .

مثال 2 : $I=[0,+\infty[$ ، $u:x\mapsto -3x+1$ ، $v:x\mapsto 2x$ و منه :

$u(x)+v(x)=-x+1$ ، إذن $u+v$ دالة متناقصة تماما على I .

2) إستنتاج إتجاه تغير الدالتين $2f-5$ ، $-3f+2$ على المجال $]-\infty,0]$:

الدالة $2f-5$ هي من الشكل $\lambda f+k$ حيث $\lambda=2$ ، $k=-3$ و نعلم أن للدالتين $\lambda f+k$ و λf نفس إتجاه التغير ، و بما أن $\lambda=2>0$ فإن للدالتين λf و f نفس إتجاه التغير . بما أن الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ فإن $2f$ متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ و منه نستنتج أن الدالة $2f-5$ متناقصة تماما على $]-\infty,0]$.

بنفس الطريقة ، الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ و بما أن $\lambda=-3<0$ فإن الدالة $-3f$ متزايدة تماما على $]-\infty,0]$ و منه نستنتج أن الدالة $-3f+2$ متزايدة تماما على $]-\infty,0]$ لأن للدالتين $-3f$ و $-3f+2$ نفس إتجاه التغير على $]-\infty,0]$.

حل التمرين رقم 09 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+x+1$

1) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x)=x^2+x+1$ أي $f(x)=(x)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)(x)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

أي $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ و منه ينتج : $\begin{cases}\alpha=1/2\\ \beta=3/4\end{cases}$

2) شرح كيف يمكن إنشاء (C_f) التمثيل البياني للدالة f إنطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية يطلب تعيينها ثم إنشاء (C_f) :

من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ و منه (C_f) صورة (P) التمثيل البياني للدالة

"مربع" بإنسحاب شعاعه $\vec{v}=-\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{3}{4}\vec{j}$.

3) كيفية إستنتاج التمثيلات البيانية للدوال الآتية : $g(x)=f(x+2)$ ، $h(x)=f(x)+1$ ،

$k(x)=f(x-2)+1$ ، $u(x)=-f(x)$ ، $v(x)=|f(x)|$ $w(x)=f(|x|)$.

✓ $g(x)=f(x+2)$: من الشكل $g(x)=f(x+a)+b$ حيث $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$ و منه (C_g) صورة (C_f)

بإنسحاب شعاعه $\vec{u}=-2\vec{i}$.

✓ $h(x)=f(x)+1$: من الشكل $h(x)=f(x+a)+b$ حيث $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$ و منه (C_h) صورة (C_f)

بإنسحاب شعاعه $\vec{u}=\vec{j}$.

✓ $k(x)=f(x-2)+1$: من الشكل $k(x)=f(x+a)+b$ حيث $\begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$ و منه (C_k) صورة

(C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$.

✓ $u(x)=-f(x)$: من الشكل $u=\lambda f$ حيث $\lambda=-1$ ، و منه (C_u) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى

حامل محور الفواصل .

✓ $v(x)=|f(x)|$: إذا كان $f(x)\geq 0$ فإن $|f(x)|=f(x)$ و منه $v(x)=f(x)$ ، إذن لما

$f(x)\geq 0$ فإن (C_v) ينطبق على (C_f) .

إذا كان $f(x)\leq 0$ فإن $|f(x)|=-f(x)$ و منه $v(x)=-f(x)$ ، إذن لما $f(x)\leq 0$ فإن

(C_v) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

✓ $w(x)=f(|x|)$: $D_w=\mathbb{R}$ و هي مجموعة متناظرة بالنسبة إلى 0 ، و من أجل كل عدد حقيقي x

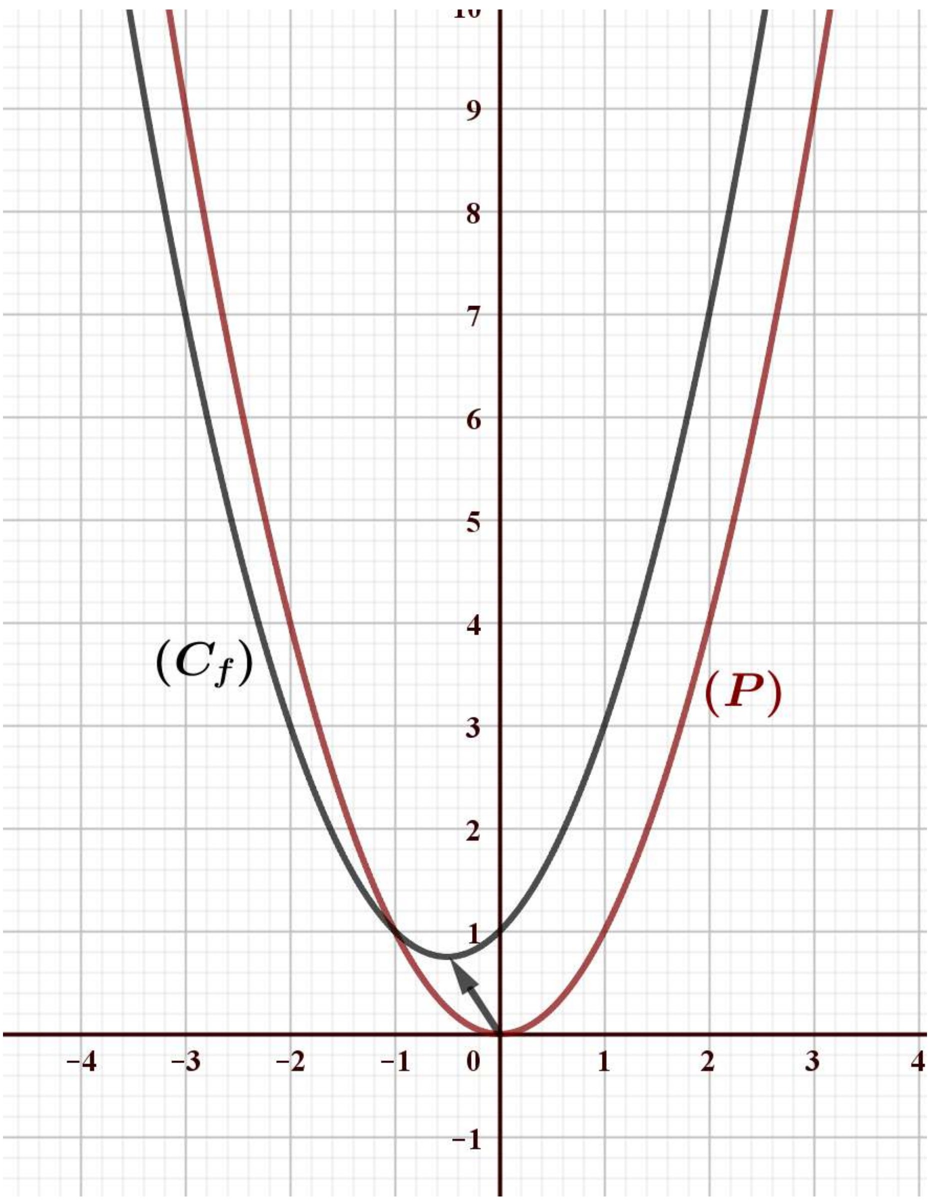
فإن : $w(-x)=f(|-x|)=f(|x|)$ أي $w(-x)=w(x)$ (لأن $|-x|=|x|$) و منه فالدالة w

زوجية .

إذا كان $x \geq 0$: فإن $|x| = x$ و منه $w(x) = f(x)$ ، إذن لما $x \geq 0$ فإن (C_w) ينطبق على (C_f) .

و بما أن الدالة w زوجية فإنه لما $x \leq 0$ يكون (C_w) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

إنشاء (P) و (C_f) :



حل التمرين رقم 10 :

1) إثبات بطريقتين مختلفتين أن النقطة $\Omega(a,b)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

أ- $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$ ، $\Omega(-1,1)$

طريقة 1 : من أجل كل $x\in D_f$ فإن : $2(-1)-x\in D_f$ و $f(-2-x)+f(x)=2(1)$

$x\in D_f$ معناه $x\neq -1$ و منه $-x\neq 1$ و منه $-2-x\neq -2+1$ أي $-2-x\neq -1$ و منه $-2-x\in D_f$

من أجل كل $x\in D_f$ لدينا : $f(-2-x)+f(x)=\dfrac{-2-x+2}{-2-x+1}+\dfrac{x+2}{x+1}$ أي

$f(-2-x)+f(x)=\dfrac{-x}{-x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+2}{x+1}$ أي :

$f(-2-x)+f(x)=\dfrac{2x+2}{x+1}$ أي $f(-2-x)+f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x+1}$ و منه من أجل $x\neq -1$ ينتج

$f(-2-x)+f(x)=2$ أي $f(2(-1)-x)+f(x)=2(1)$ من الشكل $f(2a-x)+f(x)=2b$ و

منه نستنتج أن النقطة $\Omega(-1;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ب- $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ ، $\Omega(1,2)$

طريقة 2 : دساتير تغيير المعلم $\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y+y_0\end{cases}$ حيث $(x_0;y_0)=(1;2)$ و منه $\begin{cases}x=X+1\\ y=Y+2\end{cases}$

لدينا : $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ و منه $2+Y=\dfrac{2(1+X)-1}{1+X-1}$ أي $Y=\dfrac{2X+1}{X}-2$ أي $Y=\dfrac{2X+1-2X}{X}$

و منه $Y=\dfrac{1}{X}$ و هي معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ ، نضع من أجل كل $X\neq 0$ ؛

$g(X)=\dfrac{1}{X}$ و نثبت أن الدالة g فردية :

$D_g=\mathbb{R}^*$ متناظرة بالنسبة إلى 0 : $X\in\mathbb{R}^*$ معناه $X\neq 0$ و منه $-X\neq 0$ ، إذن $-X\in\mathbb{R}^*$

و من أجل كل $X\in D_g$: $g(-X)=\dfrac{1}{-X}=-\dfrac{1}{X}=-g(X)$ ؛ إذن الدالة g فردية .

الإستنتاج : $\Omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2) إثبات بثلاث طرق مختلفة أن المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_f) :

أ- $f(x)=x^2+4x+3$ ، $x=-2$

طريقة 1 : إذا كان من أجل كل عدد حقيقي $x\in D_f$: $2a-x\in D_f$ و $f(2a-x)=f(x)$ فإن المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_f) .

$D_f=\mathbb{R}$ و منه من أجل كل $x\in D_f$ فإن $-\infty<x<+\infty$ و منه $-\infty<-x<+\infty$ و منه $-\infty<-4-x<+\infty$ أي $-4-x\in\mathbb{R}$ و منه $-4-x\in D_f$ أي $2(-2)-x\in D_f$

و من أجل كل $x\in D_f$: $f(-4-x)=(-4-x)^2+4(-4-x)+3$ أي $f(-4-x)=x^2+8x+16-16-4x+3$ أي $f(-4-x)=x^2+4x+3$ و منه ينتج :

$f(-4-x)=f(x)$ ؛ إذن نستنتج أن المستقيم الذي $x=-2$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_f) .

ب- $f(x)=\sqrt{x^2+6x+10}$ ، $x=-3$

طريقة 2 : دساتير تغيير المعلم $\begin{cases}x=X+x_0\\y=Y+y_0\end{cases}$ حيث $(x_0;y_0)=(-3,1)$ و منه $\begin{cases}x=X-3\\y=Y+1\end{cases}$

لدينا : $y=\sqrt{x^2+6x+10}$ و منه $Y+1=\sqrt{(X-3)^2+6(X-3)+10}$ أي $Y+1=\sqrt{X^2+1}$ و منه $Y=\sqrt{X^2+1}-1$ و هي معادلة (C_f) في المعلم الجديد $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$ ،

نضع من أجل كل عدد حقيقي X ؛ $g(X)=\sqrt{X^2+1}-1$ و نثبت أن الدالة g زوجية :

$D_g=\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0 ، و من أجل كل $X\in D_g$:

$g(-X)=\sqrt{(-X)^2+1}-1=\sqrt{X^2+1}-1=g(X)$ ؛ إذن الدالة g زوجية .

الإستنتاج : المستقيم الذي $x=-3$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_f) .

طريقة 3 : إذا كان من أجل كل $x \in D_f$: $a-x \in D_f$ و $a+x \in D_f$ و $f(a-x)=f(a+x)$ فإن المستقيم الذي $x=a$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) .

$D_f=\mathbb{R}$ و منه من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $-3-x \in D_f$ و $-3+x \in D_f$

$f(-3-x)=\sqrt{(-3-x)^2+6(-3-x)+10}$ أي $f(-3-x)=\sqrt{x^2+1}$ و من جهة أخرى :

$f(-3+x)=\sqrt{(-3+x)^2+6(-3+x)+10}$ أي $f(-3+x)=\sqrt{x^2+1}$ ؛ إذن من أجل كل $x \in D_f$

فإن : $-3-x \in D_f$ و $-3+x \in D_f$ و $f(-3-x)=f(-3+x)$

الإستنتاج : المستقيم الذي $x=-3$ معادلة له محور تناظر للمنحني (C_f) .

حل التمرين رقم 11 :

(C_f) ، (C_g) و (C_h) صور لمنحنى الدالة "مربع" بإنسحاب شعاعه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ على الترتيب كما هو موضح في الشكل أدناه .

1) تعيين مركبتا كل من الأشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$:

مركبتا كل شعاع من هذه الأشعة تساوي إحداثيي نقطة ذروة كل من المنحنيات (C_f) ، (C_g) و (C_h) .

- ✓ المنحني (C_f) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(-2,-4)$ ، إذن شعاع الإنسحاب $\vec{u}$ هو $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$
- ✓ المنحني (C_g) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(-2,0)$ ، إذن شعاع الإنسحاب $\vec{v}$ هو $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$
- ✓ المنحني (C_h) يقبل ذروة في النقطة ذات الإحداثيات $(0,1)$ ، إذن شعاع الإنسحاب $\vec{w}$ هو $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

2) تعيين دستور الدوال f ، g و h :

دستور الدالة f يعطى من الشكل : $f(x)=(x+a)^2+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان و (C_f) صورة

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$ و من السؤال السابق ينتج :

$\begin{cases}-a=-2\\ b=-3\end{cases}$ و منه $\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}$ ، إذن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\boxed{f(x)=(x+2)^2-3}$

دستور الدالة g يعطى من الشكل : $g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α ، β عددان حقيقيان و (C_g) صورة

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ و من السؤال السابق ينتج :

$\begin{cases}-\alpha=-2\\ \beta=0\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=0\end{cases}$ ، إذن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\boxed{g(x)=(x+2)^2}$

دستور الدالة h يعطى من الشكل : $h(x)=(x+\gamma)^2+\lambda$ حيث γ ، λ عددان حقيقيان و (C_h) صورة

(P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{w}\begin{pmatrix}-\gamma\\ \lambda\end{pmatrix}$ و من السؤال السابق ينتج :

$\begin{cases}-\gamma=0\\ \lambda=1\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\gamma=0\\ \lambda=1\end{cases}$ ، إذن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $\boxed{h(x)=x^2+1}$

حل التمرين رقم 12 :

f ، g و h دوال معرفة كما يلي :

$$f(x)=3x-\frac{1}{3x} \quad ، \quad g(x)=1-\frac{1}{3x} \quad و \quad h(x)=3x-1$$

1) تفكيك الدالة f إلى مجموع دالتين u و v يطلب تعيينهما :

إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ بـ : $u(x)=3x$ و $v(x)=-\frac{1}{3x}$ فإن $f=u+v$.

2) تعيين إتجاه تغير الدالتين u و v على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ ثم استنتاج إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$:

الدالة u خطية متزايدة تماما على $]-\infty,0[$ (لأن $a=3>0$) و إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على $]-\infty,0[$ بـ : $h(x)=\frac{1}{x}$ فإن $v=-\frac{1}{3}h$ و حيث أن الدالة h (دالة المقلوب) متناقصة تماما على $]-\infty,0[$ فإن الدالة v متزايدة تماما على $]-\infty,0[$ (لأن $-\frac{1}{3}<0$) ، إذن حسب مبرهنة إتجاه تغير مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I فإن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty,0[$.

بنفس خطوات البرهان نبين أن الدالة f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

3) حساب و تبسيط $\frac{f(x)}{g(x)}$:

من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\in\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{3}\right\}$ فإن :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x-\frac{1}{3x}}{1-\frac{1}{3x}}=\frac{\frac{9x^2-1}{3x}}{\frac{3x-1}{3x}}=\frac{9x^2-1}{3x-1} \quad \text{أي} \quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(3x-1)(3x+1)}{3x-1} \quad \text{أي} \quad \frac{f(x)}{g(x)}=3x+1$$

4) $D_h=\mathbb{R}$ لأن h دالة تآلفية ، لكن $D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{3}\right\}$ ، إذن ليس للدالتين h و $\frac{f}{g}$ نفس مجموعة التعريف ، و منه نستنتج أن : $h\neq\frac{f}{g}$.

حل التمرين رقم 13 :

ليكن x عدد حقيقي موجب و M النقطة من (C) التي فاصلتها x .

1) التعبير عن AM بدلالة x :

$M(x,y)$ نقطة من (C) معناه أن إحداثيي النقطة M هما $(x,\sqrt{x})$ ، و حسب قانون المسافة بين نقطتين فإن : $AM=\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}$ أي $AM=\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x}-0)^2}$ و منه نجد :

$\boxed{AM=\sqrt{x^2-3x+4}}$

2) لتكن f **الدالة المعرفة على** $[0,+\infty[$ **كما يلي :** $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

أ- تحديد العلاقة الموجودة بين AM **و** $f(x)$ **:**

$AM=\sqrt{x^2-3x+4}$ **و منه** $AM^2=x^2-3x+4$ **أي** $AM^2=x^2-2\left(\frac{3}{2}\right)x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ **و منه**

$AM^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$ **و منه نستنتج أن :** $AM^2=f(x)$ **أي** $\boxed{AM=\sqrt{f(x)}}$ **.**

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f **ثم تشكيل جدول تغيراتها على المجال** $[0,+\infty[$ **:**

إذا اعتبرنا الدالة u **المعرفة على** $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$ **بـ :** $u(x)=x-\frac{3}{2}$ **حيث من أجل كل** $x\in\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$ **فإن**

$x\le\frac{3}{2}$ **و منه** $x-\frac{3}{2}\le 0$ **و منه** $u(x)\le 0$ **أي** $u(x)\in]-\infty,0]$ **، و لتكن الدالة** v **المعرفة على**

$]-\infty,0]$ **بـ :** $v(x)=x^2+\frac{7}{4}$ **و منه يكون لدينا :** $f=v\circ u$

الدالة u **متزايدة تماما على** $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$ **لأنها تآلفية حيث** $a=1>0$ **و الدالة** v **متناقصة تماما على**

$]-\infty,0]$ **(لأن الدالة "مربع" متناقصة تماما على** $]-\infty,0]$ **) ، للدالتين** u **و** v **إتجاها تغير متعاكسين و**

منه فالدالة f **متناقصة تماما على** $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$ **، إذن بصفة خاصة فالدالة** f **متناقصة تماما على** $\left[0,\frac{3}{2}\right]$

بنفس الطريقة (مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين) نبين أن الدالة f **متزايدة تماما على** $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ **.**

جدول تغيرات الدالة f **:**

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	4 ↘	$\frac{7}{4}$	↗

جـ- إستنتاج إحداثيي النقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن :

نلاحظ من جدول التغيرات أن أصغر قيمة تأخذها الدالة f هي $\frac{7}{4}$ ، حيث من السؤال 2) نعلم أن :

$AM=\sqrt{f(x)}$ و منه أصغر مسافة ممكنة هي $AM=\sqrt{\frac{7}{4}}$ أي $AM=\frac{\sqrt{7}}{2}$ من أجل الفاصلة $x=\frac{3}{2}$.

إستنتاج إحداثيي النقطة M : بما أن $M\in(C)$ فإن إحداثيي M هما $\left(x,\sqrt{x}\right)$ ؛ إذن $M\left(\frac{3}{2},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

حل التمرين رقم 14 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(x+1)(x-4)$

1) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

لدينا : $f(x)=(x+1)(x-4)$ و بالنشر ثم التبسيط نجد $f(x)=x^2-3x-4$ أي

$f(x)=x^2-2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ و منه $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ و هو المطلوب .

2) شرح كيف يمكن إستنتاج التمثيل البياني (C_f) للدالة f إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة "مربع" :

(C_f) صورة (P) التمثيل البياني للدالة "مربع" بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}=\frac{3}{2}\vec{i}-\frac{25}{4}\vec{j}$

3) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$

أ- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $g(x)=f(x)$

من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$ لدينا : $|x|=x$ و منه $g(x)=f(x)$

ب- إثبات أن g دالة زوجية :

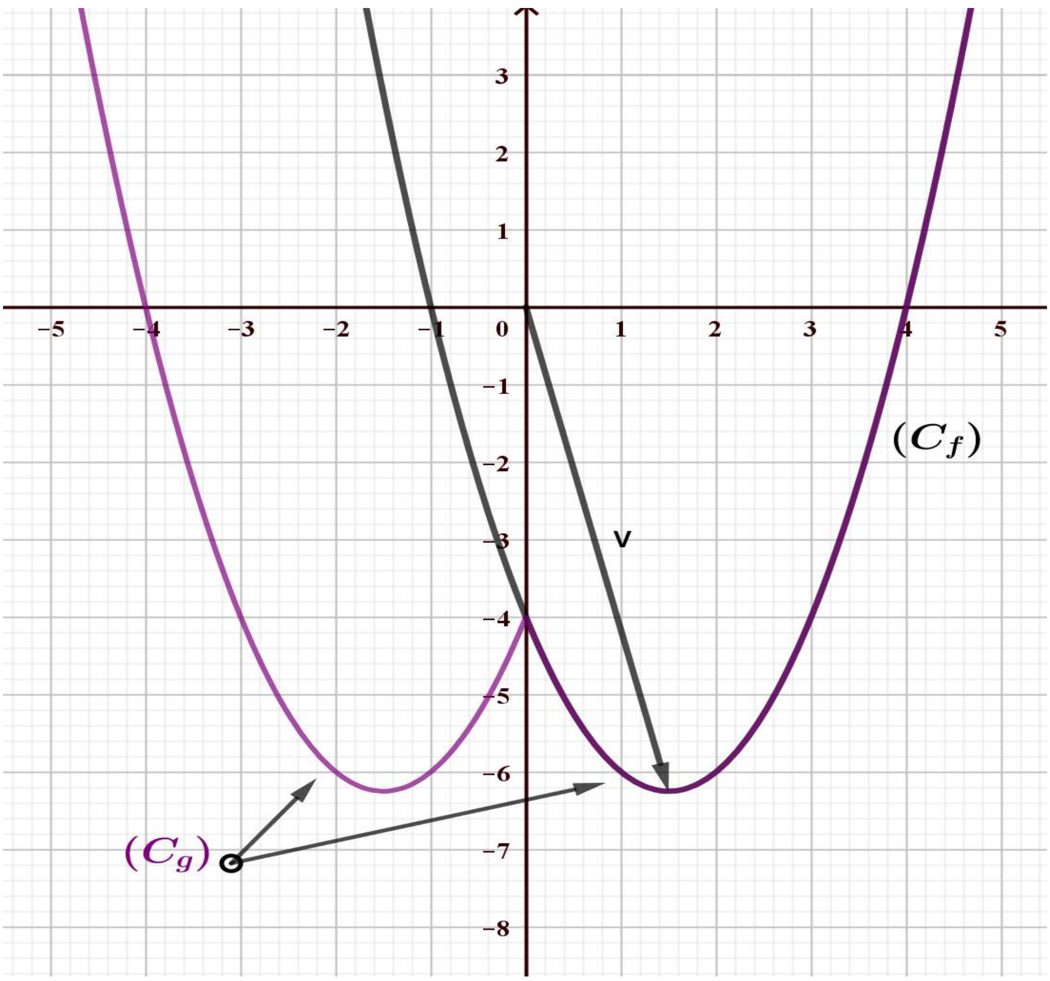
$D_g=\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 : إذا كان $x \in D_g$ فإن $-x \in D_g$

و من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)$ لأن $|-x|=|x|$ أي $g(-x)=g(x)$

و منه فالدالة g زوجية .

جـ- شرح كيف يمكن إنشاء (C_g) التمثيل البياني للدالة g بالإعتماد على (C_f) :

- إذا كان $x \geq 0$ أي $x \in [0;+\infty[$ فإن $g(x)=f(x)$ و منه (C_g) ينطبق على (C_f) .
- و بما أن الدالة g زوجية فإنه لما $x \leq 0$ أي $x \in]-\infty;0]$ فإن (C_g) نظير (C_f) (الواقع في المجال $[0;+\infty[$) بالنسبة إلى محور التراتيب .



حل التمرين رقم 15 :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{5-x}{2x-6}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تعيين إحداثيي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات :

مع حامل محور الفواصل (xx') : نحل المعادلة $f(x)=0$: $f(x)=0$ تكافئ $\dfrac{5-x}{2x-6}=0$ تكافئ $5-x=0$ و $2x-6\neq 0$ ، تكافئ $x=5$ و $x\neq 3$ ؛ إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)=0$ هي $S=\{5\}$ و منه المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 5 .

مع حامل محور التراتيب (yy') : نحسب $f(0)$ فنتحصل على $f(0)=-\dfrac{5}{6}$ و منه المنحني (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة ذات الترتيب $-\dfrac{5}{6}$.

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 فإن : $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x-3}$

$f(x)=\dfrac{5-x}{2x-6}=\dfrac{-x+3+2}{2(x-3)}=\dfrac{-(x-3)+2}{2(x-3)}=\dfrac{-(x-3)}{2(x-3)}+\dfrac{2}{2(x-3)}$ و منه من أجل كل $x\neq 3$

فإن : $f(x)=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{x-3}$ و هو المطلوب .

3) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$

أ- إثبات أنه يمكن كتابة g على شكل مركب دالتين يطلب تعيينهما :

$$x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} \frac{1}{x-3}$$

لدينا : $g=vou$ حيث $u(x)=x-3$ و $v(x)=\dfrac{1}{x}$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

- على المجال $]-\infty;3[$: من أجل $x<3$ فإن $x-3<0$ أي $u(x)<0$ معناه $u(x)\in]-\infty;0[$

و الدالة u $\boxed{\text{متزايدة}}$ تماما على $]-\infty;3[$ (لأنها دالة تآلفية حيث $a=1>0$)

و بما أن الدالة v $\boxed{\text{متناقصة}}$ تماما على $]-\infty;0[$ (الدالة مقلوب) فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فإن f متناقصة تماما على $]-\infty;3[$.

4) نبين أنه من أجل كل x حيث $3<x<5$ فإن : $f(x)>0$

إذا كان $3<x<5$ فإن $0<x-3<2$ و منه $\frac{1}{x-3}>\frac{1}{2}$ و منه $-\frac{1}{2}+\frac{1}{x-3}>-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ أي $f(x)>0$

و هو المطلوب .

5) إثبات أن النقطة $\omega\left(3,-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

من أجل كل $x\in D_f$ فإن : $x\neq 3$ و منه $-x\neq -3$ و منه $2(3)-x\neq 3$ أي $2(3)-x\in D_f$

و من أجل كل $x\in D_f$ لدينا $f(2(3)-x)+f(x)=\frac{5-6+x}{2(6-x)-6}+\frac{5-x}{2x-6}=\frac{x-1}{6-2x}+\frac{5-x}{2x-6}$ أي

$f(2(3)-x)+f(x)=\frac{1-x+5-x}{2x-6}=\frac{6-2x}{2x-6}$ أي $f(2(3)-x)+f(x)=\frac{-(2x-6)}{2x-6}$ ، إذن

$f(2(3)-x)+f(x)=-1=2\left(-\frac{1}{2}\right)$ من الشكل $\boxed{f(2a-x)+f(x)=2b}$.

الإستنتاج : النقطة $\omega\left(3;-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

6) شرح كيفية إنشاء المنحني (C_f) :

لدينا من أجل كل $x\neq 3$: $f(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{x-3}$ و هي من الشكل $f(x)=k(x-3)-\frac{1}{2}$ حيث k هي

دالة المقلوب ، إذن (C_f) صورة (H) التمثيل البياني للدالة "مقلوب" بالإنسحاب الذي شعاعه

$\vec{v}=3\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

7) المناقشة بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m$:

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانيا تمثل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات الأفقية (d_m) الموازية لحامل محور الفواصل و التي $y=m$ معادلة لها .

✓ إذا كان $m<-\frac{5}{6}$ أي $m\in\left]-\infty;-\frac{5}{6}\right[$ فإن المستقيم (d_m) الذي $y=m$ يقطع المنحني (C_f) في نقطة وحيدة فاصلتها موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

✓ إذا كان $m=-\frac{5}{6}$ فإن المستقيم $\left(d_{-\frac{5}{6}}\right)$ يقطع المنحني (C_f) في النقطة ذات الإحداثيات $\left(0;-\frac{5}{6}\right)$ و بالتالي المعادلة $f(x)=-\frac{5}{6}$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل معدوم .

✓ إذا كان $-\frac{5}{6}<m\le-\frac{1}{2}$ أي $m\in\left]-\frac{5}{6};-\frac{1}{2}\right]$ فإن المستقيمات (d_m) لا تقطع المنحني (C_f) و بالتالي المعادلة $f(x)=m$ لا تقبل حلولا .

✓ إذا كان $m>-\frac{1}{2}$ أي $m\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ فإن المستقيمات (d_m) تقطع المنحني (C_f) في نقطة وحيدة ذات فاصلة موجبة تماما و بالتالي المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا و هذا الحل موجب تماما .

(بالأخص من أجل $m=0$ فإن المنحني (C_f) يتقاطع مع حامل محور الفواصل ($y=0$) في نقطة وحيدة فاصلتها هي $x=5$) .

حل التمرين رقم 16 :

f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$

1) أ- تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f :

تكون الدالة f معرفة إذا و فقط إذا كان $x-1\neq 0$ و منه $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

ب- تعيين العددين الحقيقيين α ، β بحيث من أجل كل x من D_f يكون : $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{x-1}$

لدينا : $\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{2(x-1)}{x-1}=\dfrac{2x-2+8}{x-1}=\dfrac{2x+6}{x-1}=f(x)$ و منه من أجل كل $x\neq 1$ فإن :

$f(x)=2+\dfrac{8}{x-1}$ ؛ إذن نجد : $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=8\end{cases}$

جـ- إستنتاج إتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$:

باتباع المخطط : $x\xrightarrow{u}x-1\xrightarrow{v}2+\dfrac{8}{x-1}$ ينتج : $f=v\circ u$ حيث

$u(x)=x-1$ و $v(x)=2+\dfrac{8}{x}$

✓ على المجال $]-\infty;1[$: لدينا $x<1$ و منه $x-1<0$ أي $u(x)<0$ معناه $u(x)\in]-\infty;0[$

و الدالة u متزايدة تماما على $]-\infty;1[$

و بما أن الدالة v متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ لأن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فالدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$.

✓ على المجال $]1;+\infty[$: لدينا $x>1$ و منه $x-1>0$ أي $u(x)>0$ معناه $u(x)\in]0;+\infty[$

و الدالة u متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

و بما أن الدالة v متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ لأن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فالدالة f متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

2) نعتبر الدالة g حيث : $g\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{2x+6}{x-1}}$

أ- تعيين D_g مجموعة تعريف الدالة g :

تكون الدالة g معرفة إذا و فقط إذا كان $\dfrac{2x+6}{x-1}\geq 0$ و $x-1\neq 0$ أي $\dfrac{2x+6}{x-1}\geq 0$ مع $x\neq 1$:

لتحديد قيم x حيث $\dfrac{2x+6}{x-1}\geq 0$ نستعمل جدول الإشارة :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x+6}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

إذن من جدول الإشارة نجد : $D_g=\left]-\infty;-3\right]\cup\left]1;+\infty\right[$

ب- تفكيك الدالة g إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما :

باتباع المخطط : $x\xrightarrow{f}\dfrac{2x+6}{x-1}\xrightarrow{v}\sqrt{\dfrac{2x+6}{x-1}}$ ينتج : $g=v\circ f$

حيث $v\left(x\right)=\sqrt{x}$ " دالة الجذر التربيعي "

جـ- استنتاج إتجاه تغير الدالة g على المجالين $\left]-\infty;-3\right]$ و $\left]1,+\infty\right[$:

✓ على $\left]-\infty;-3\right]$: من أجل كل $x\in\left]-\infty;-3\right]$ فإن $x\leq -3$ و منه $x-1\leq -4$ و منه

و $-\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{x-1}<0$ و منه $-2\leq\dfrac{8}{x-1}<0$ و منه $0\leq 2+\dfrac{8}{x-1}<2$ أي $0\leq f\left(x\right)<2$ معناه

$f\left(x\right)\in\left[0;2\right[$ حيث أن الدالة v متزايدة تماما على $\left[0;2\right[$ و بما أن f متناقصة تماما على $\left]-\infty;-3\right]$ فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فإن g متناقصة تماما على $\left]-\infty;-3\right]$.

✓ على $\left]1;+\infty\right[$: من أجل كل $x\in\left]1;+\infty\right[$ فإن $x>1$ و منه $x-1>0$ و منه $\frac{1}{x-1}>0$ و منه $\frac{8}{x-1}>0$ و منه $2+\frac{8}{x-1}>2$ أي $f\left(x\right)>2$ معناه $f\left(x\right)\in\left]2;+\infty\right[$ حيث أن الدالة v متزايدة تماما على $\left]2;+\infty\right[$ و بما أن f متناقصة تماما على $\left]1;+\infty\right[$ فإنه حسب مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين فإن g متناقصة تماما على $\left]1;+\infty\right[$.

حل التمرين رقم 17 :

I- f الدالة المعرفة على المجال $\left]1,+\infty\right[$ كما يلي : $f\left(x\right)=\frac{x}{x-1}$

✓ نبين أن : $\left(f\circ f\right)\left(x\right)=x$ ثم استنتاج قيمة $\left(f\circ f\circ f\right)\left(2\right)$:

من أجل كل $x\in\left]1;+\infty\right[$ فإن : $f\circ f\left(x\right)=f\left[f\left(x\right)\right]=\frac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x$

إذن $\left(f\circ f\circ f\right)\left(2\right)=f\circ f\left(f\left(2\right)\right)=f\left(2\right)$ و منه $\left(f\circ f\circ f\right)\left(2\right)=2$

II- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g\left(x\right)=\alpha x+\beta$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}^{*}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

✓ تعريف الدالة $g\circ g$:

$D_{g\circ g}=\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$g\circ g\left(x\right)=g\left[g\left(x\right)\right]=\alpha\left(g\left(x\right)\right)+\beta=\alpha\left(\alpha x+\beta\right)+\beta$ و منه $g\circ g\left(x\right)=\alpha^{2}x+\alpha\beta+\beta$

✓ تعيين الثنائية $\left(\alpha;\beta\right)$ التي من أجلها يكون : $g\circ g=g$

$D_{g\circ g}=D_{g}=\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $g\circ g\left(x\right)=g\left(x\right)$ معناه $\alpha^{2}x+\alpha\beta+\beta=\alpha x+\beta$ ، إذن من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن : $\left(\alpha^{2}-\alpha\right)x+\alpha\beta=0$ و منه ينتج :

$\begin{cases}\alpha^2-\alpha=0\\ \alpha\beta=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}\alpha(\alpha-1)=0\\ \alpha\beta=0\end{cases}$ حيث نعلم أن $\alpha\neq 0$ و منه ينتج : $\begin{cases}\alpha-1=0\\ \beta=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\end{cases}$

نتيجة : $(\alpha;\beta)=(1;0)$ و منه $g\circ g=g$ من أجل : $\boxed{g(x)=x}$

حل التمرين رقم 18 :

1) تحديد إشارة $f(x)$ على المجال $[-3;4]$:

x	-3		-1		2		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) تعيين مجموعة تعريف كل من الدوال g ، h ، k و u :

$D_g=D_f=[-3;4]$ ، $D_h=D_f=[-3;4]$ و تكون الدالة k معرفة إذا و فقط إذا كان المقام $f(x)\neq 0$ حيث من جدول الإشارة نلاحظ أن : $f(x)=0$ من أجل $x=-1$ أو من أجل $x=2$

إذن : $D_k=[-3;-1[\cup]-1;2[\cup]2;4]$

و تكون الدالة u معرفة إذا و فقط إذا كان $f(x)\geq 0$ ، و من جدول إشارة الدالة f نجد :

$D_u=[-3;-1]\cup[2;4]$.

3) باستعمال إتجاه تغير مركب دالتين ، تشكيل جدول تغيرات الدوال g ، h ، k و u :

g هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة "مربع" :

- إذا كان $x\in[-3;-1]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x)\in[0;4]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متزايدة تماما على $[0;4]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" إتجاها تغير متعاكسين و منه الدالة g متناقصة تماما على $[-3;-1]$.

- إذا كان $x\in[-1;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x)\in[-1;0]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متناقصة تماما على $[-1;0]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" نفس إتجاه التغير و منه الدالة g متزايدة تماما على $[-1;0]$.
- إذا كان $x\in[0;2]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x)\in[-1;0]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متناقصة تماما على $[-1;0]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" إتجاها تغير متعاكسين و منه الدالة g متناقصة تماما على $[0;2]$.
- إذا كان $x\in[2;3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x)\in[0;5]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متزايدة تماما على $[0;5]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" نفس إتجاه التغير و منه الدالة g متزايدة تماما على $[2;3]$.
- إذا كان $x\in[3;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x)\in[2;5]$ ، و نعلم أن الدالة "مربع" متزايدة تماما على $[2;5]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مربع" إتجاها تغير متعاكسين و منه الدالة g متناقصة تماما على $[3;4]$.
- جدول تغيرات الدالة g : $g(-3)=[f(-3)]^2=4^2=16$ ....

x	-3		-1		0		2		3		4
$g(x)$	16	↘	0	↗	1	↘	0	↗	25	↘	4

بما أن $h=-f$ ($\lambda=-1<0$) فإن للدالتين f و h إتجاها تغير متعاكسين حيث :

- إذا كان $x\in[-3;0]$ أو $x\in[3;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما و منه فالدالة h متزايدة تماما على كل من المجالين $[-3;0]$ و $[3;4]$.
- إذا كان $x\in[0;3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما و منه فالدالة h متناقصة تماما على $[0;3]$.

➢ جدول تغيرات الدالة h : $h(-3)=-f(-3)=-4$ ، $h(-1)=-f(-1)=0$ ....

x	-3		-1		0		2		3		4
$h(x)$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-2

k هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة "مقلوب" :

➢ إذا كان $x\in[-3;-1[$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x)\in]0;4]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $]0;4]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس إتجاه التغير و منه الدالة k متزايدة تماما على $[-3;-1[$.

➢ إذا كان $x\in]-1;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x)\in[-1;0[$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $[-1;0[$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس إتجاه التغير و منه الدالة k متزايدة تماما على $]-1;0]$.

➢ إذا كان $x\in[0;2[$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x)\in[-1;0[$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $[-1;0[$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" إتجاها تغير متعاكسين و منه الدالة k متناقصة تماما على $[0;2[$.

➢ إذا كان $x\in]2;3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x)\in]0;5]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $]0;5]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" إتجاها تغير متعاكسين و منه الدالة k متناقصة تماما على $]2;3]$.

➢ إذا كان $x\in[3;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x)\in[2;5]$ ، و نعلم أن الدالة "مقلوب" متناقصة تماما على $[2;5]$ ؛ إذن للدالتين f و الدالة "مقلوب" نفس إتجاه التغير و منه الدالة k متزايدة تماما على $[3;4]$.

➢ جدول تغيرات الدالة k : $k(-3)=\frac{1}{f(-3)}=\frac{1}{4}$ ، $k(0)=\frac{1}{f(0)}=-1$ ....

x	-3		-1		0		2		3		4
$k(x)$	$\frac{1}{4}$	↗	‖	↗	-1	↘	‖	↘	$\frac{1}{5}$	↗	$\frac{1}{2}$

u هي مركب الدالة f متبوعة بدالة "الجذر التربيعي" :

➢ إذا كان $x\in[-3;-1]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x)\in[0;4]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر التربيعي" متزايدة تماما على $[0;4]$ ؛ إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" إتجاها تغير متعاكسين و منه الدالة u متناقصة تماما على $[-3;-1]$.

إذا كان $x\in[2;3]$ فإن الدالة f متزايدة تماما حيث $f(x)\in[0;5]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر التربيعي" متزايدة تماما على $[0;5]$ ؛ إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" نفس إتجاه التغير و منه الدالة u متزايدة تماما على $[2;3]$.

➢ إذا كان $x\in[3;4]$ فإن الدالة f متناقصة تماما حيث $f(x)\in[2;5]$ ، و نعلم أن دالة "الجذر التربيعي" متزايدة تماما على $[2;5]$ ؛ إذن للدالتين f و دالة "الجذر التربيعي" إتجاها تغير متعاكسين و منه الدالة u متناقصة تماما على $[3;4]$.

➢ جدول تغيرات الدالة u : $u(-3)=\sqrt{f(-3)}=\sqrt{4}=2$ ، $u(3)=\sqrt{f(3)}=\sqrt{5}$ ....

x	-3		-1		2		3		4
$u(x)$	2	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) إنشاء (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، ثم استنتاج (C_h) و كذا المنحنيين (C_p) و (C_q) للدالتين p و q المعرفتين كما يلي :

$$q(x)=|f(x)| \quad ; \quad p(x)=f(-x)$$

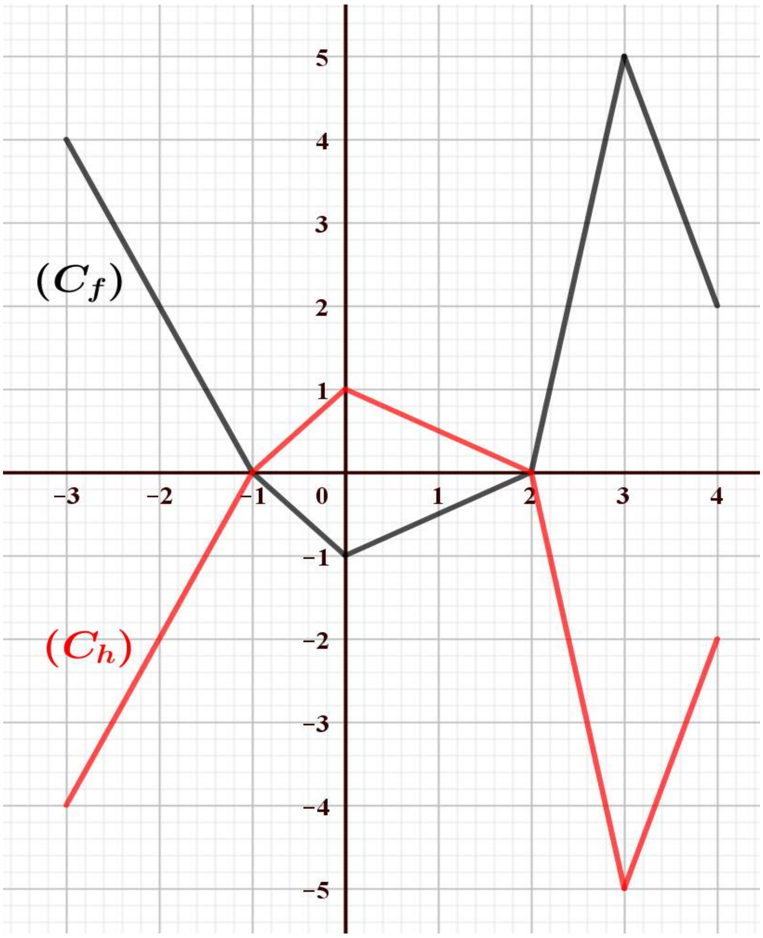
✓ (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل .

✓ (C_p) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب .

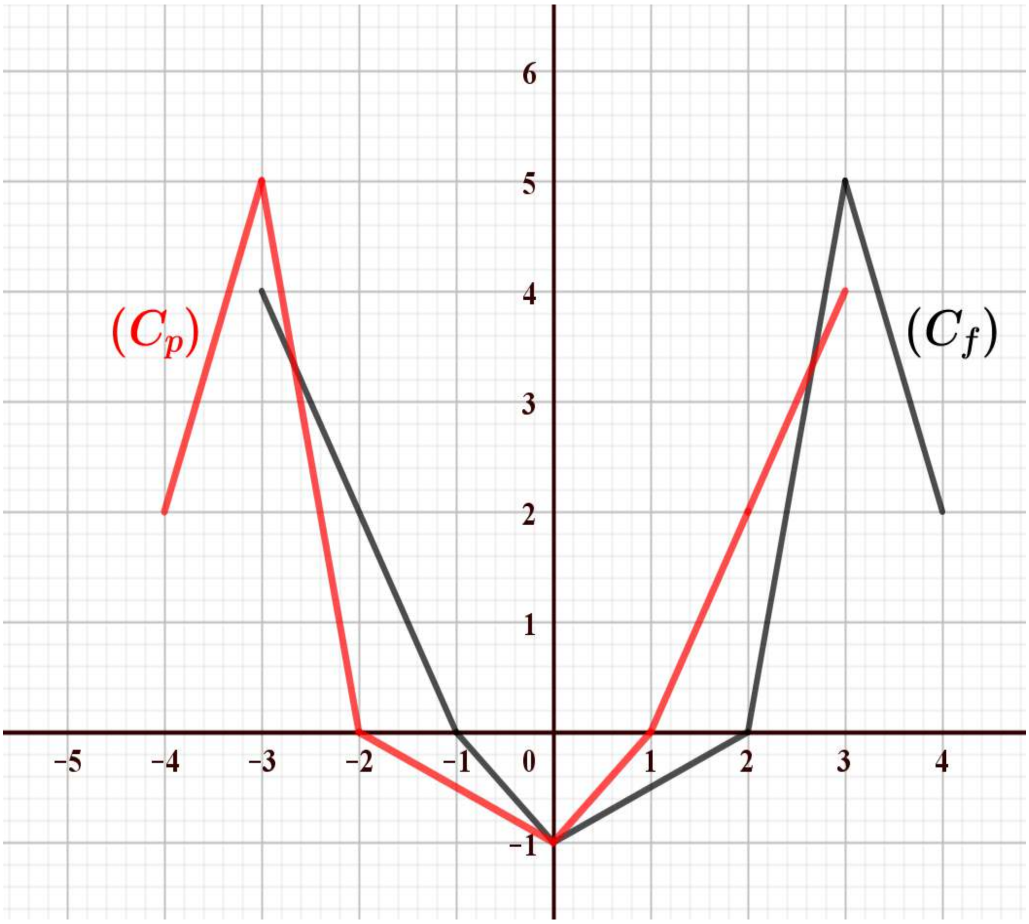
✓ لما $f(x)\geq 0$ فإن $|f(x)|=f(x)$ و منه $q(x)=f(x)$ ، إذن (C_q) ينطبق على (C_f) لما (C_f) يقع فوق محور الفواصل .

✓ لما $f(x)<0$ فإن $|f(x)|=-f(x)$ و منه $q(x)=-f(x)$ ، إذن (C_q) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (لما (C_f) يقع تحت محور الفواصل) .

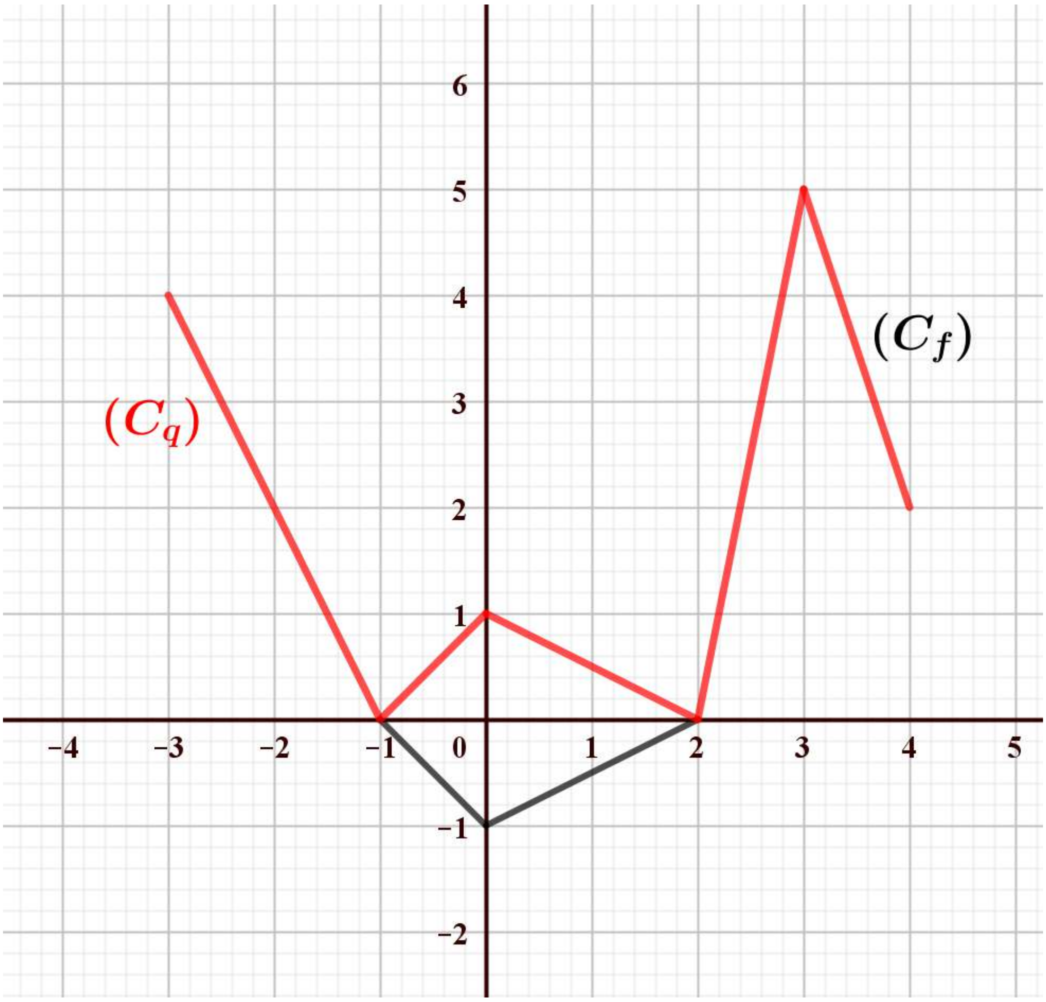
التمثيلات البيانية : (بالنسبة لإنشاء (C_f) نعتمد فقط على جدول التغيرات)



(C_f)
(C_h)



(C_p)
(C_f)



لا تنسونا من صالح دعائكم ....