تمارين رياضيات

سنة 2 ثانوي

الفصل الأول

الفهرس

بسم الله الرحمن الرحيم

يشرفني أن أضع بين أيديكم – تلاميذ السنة الثانية ثانوي- هذا العمل المتواضع الذي يمثل جزءا من مسيرتي مع مادة الرياضيات، وما ستجد هنا من تمارين هو عمل ومجهود شخصي إلا في بعض التمارين القليلة، وأنا لا أزكي هذه التمارين ولكن كل ما يمكنني قوله أنك إذا لم تستطع حل وفهم هذه التمارين فأنت لست جاهزا كليا لتحل فروضك أو اختباراتك...

لذلك احرص على أن تلقي نظرة عليها على الأقل، وهي تمثل البداية فقط، فيجب عليك البحث عن تمارين أفضل وأوسع...

وفي النهاية طالب العلم عليك بالاجتهاد الفردي وعدم الاكتفاء بما يقدمه الأستاذ فقط، إذا أردت التميز فلا يوجد أمامك سوى العمل...

وكما يقولون: " من أراد الدنيا فعليه بالعلم، ومن أراد الآخرة فعليه بالعلم، ومن أرادهما معا فعليه بالعلم"

وفي الختام إن أحسنا فتحدثوا عنا، وإن أسأنا فتحدثوا إلينا...

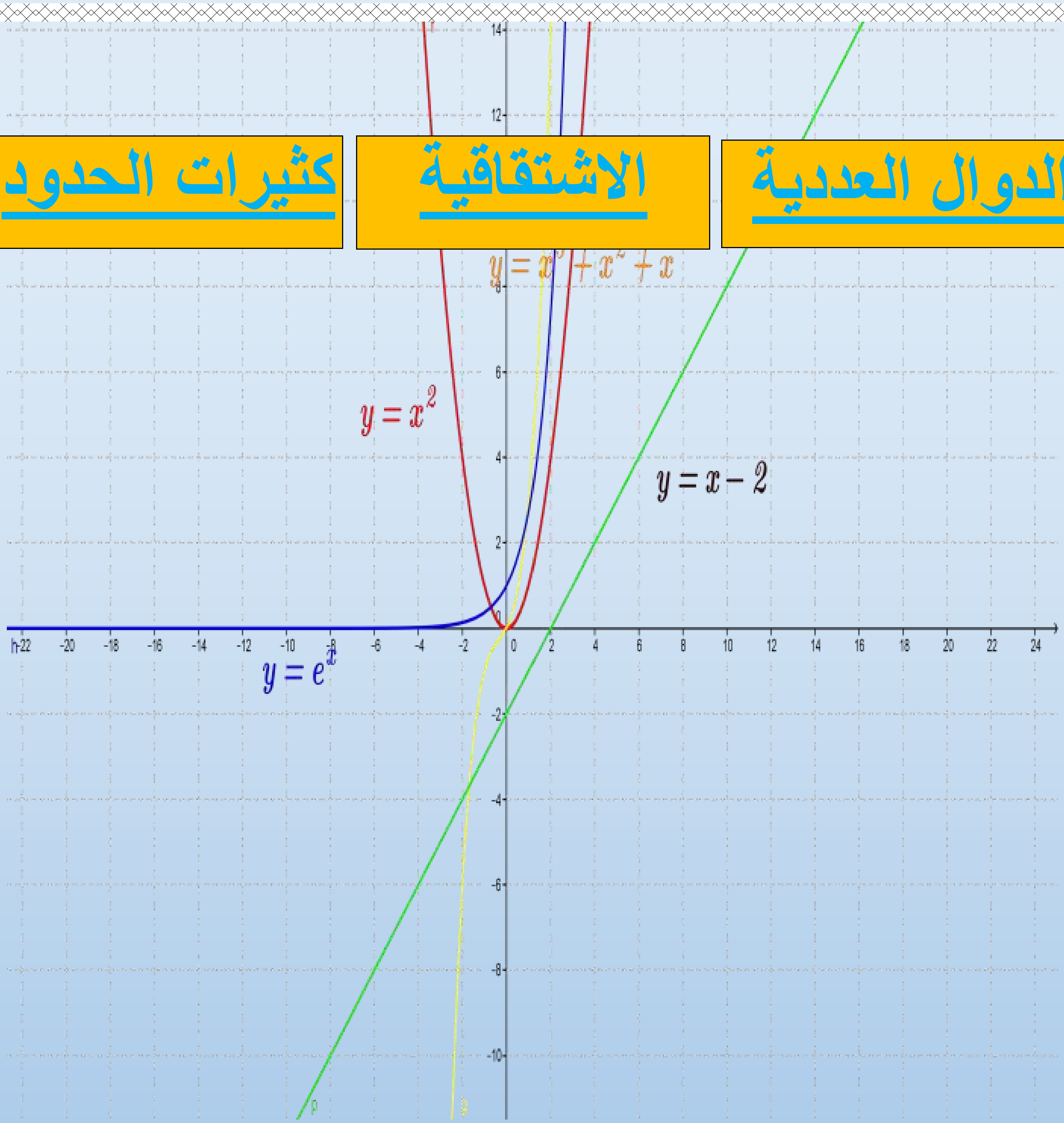
"وما يلفظ من قول إلا لديه رقيب عتيد"

إسلام بوزنية

الدوال العددية

الاشتقاقية

كثيرات الحدود



$2t^3 * 6x^4 + x^3 + x^2 + x + 11$ -

بوزنية إسلامbouzenia Islem

في كل التمارين المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O,i,j):

التمرين الأول:

أوجد مجموعة تعريف الدوال التالية: (يجب حل كل الأمثلة لأن كل مثال يعبر عن فكرة جديدة).

$$f(x)=\sqrt{x^2+x-2} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{-x^2}$$

$$h(x)=\frac{1}{x-2} \quad ; \quad c(x)=\frac{x^2+2}{2x^2+2x-3}$$

$$p(x)=\sqrt{x^2+4x+9} \quad ; \quad E(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2+x-4}}$$

-أدرس اتجاه تغير الدوال: f,g,h,c,p

التمرين الثاني:

عين مجموعة تعريف الدالة التالية: $f(x)=x^3-2x+5$

- بين أن $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ من أجل كل عددين حقيقيين a وb

- ليكن a و b عددان من D_f بحيث $a>b$ أدرس إشارة $f(a)-f(b)$

- استنتج اتجاه تغير f.

- بين أن منحنى الدالة f يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.

التمرين الثالث:

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=x+\frac{1}{x}$

- عين مجموعة تعريف f.
- بين أن $a-b+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)$ من أجل كل عددين حقيقيين غير معدومين.
- استنتج اتجاه تغير f.
- شكل جدول تغيرات f.
- استنتج أنه من أجل كل $x\epsilon\mathbb{R}_+^*$ فان $f(x)\geq 2$.

- استنتج أنه من أجل كل $x\epsilon\ \mathbb{R}_-^*$ فان $f(x)\leq 2$.
- استنتج أن مجموع عدد حقيقي موجب تماما ومقلوبه أكبر من أو يساوي 2.
- بين أن $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$ من أجل $a,b\ \epsilon\ \mathbb{R}_+^*$
- استنتج أن $a+b\geq 2\sqrt{ab}$
- استنتج مرة أخرى أن $x+\frac{1}{x}\geq 2$ من أجل x موجب تماما.

التمرين الرابع:

لتكن f و g دالتين معرفتين ب: $f(x)=x+2\ ;\ g(x)=\sqrt{(x+2)^2}$

- اذكر شروط تساوي دالتين.
- عين مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g.
- أحسب $f(-3)\ ;\ \ g(-3)$
- استنتج ان $f\neq g$
- نذكر أن $\sqrt{x^2}=|x|$، أكتب g بدلالة f
- استنتج مرة أخرى أن $f\neq g$
- في أي مجال من مجموعة التعريف تتحقق المساواة: $f=g$

التمرين الخامس:

لتكن f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x^2-1\ ;\ g(x)=4x+3$

- ارسم منحنى f انطلاقا من منحنى الدالة مربع.
- بين أن منحنى الدالة $(\frac{f+g}{2})(x)$ هو صورة لمنحنى الدالة مربع بانسحاب يطلب تعيين شعاعه ثم ارسمه.
- ادرس اتجاه تغير الدالة $\frac{f+g}{2}$.

التمرين السادس:

لتكن الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$

- عين مجموعة تعريفها.

-بين أن $f(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

-ادرس اتجاه التغير وشكل جدول التغيرات.

التمرين السابع:

نعتبر الدالة $f(x)=x^2-x-1$

- عين مجموعة تعريفها.
- ادرس اتجاه التغير.
- عين قيم x التي تحقق: $x=1+\frac{1}{x}$
- أوجد الحلول الحقيقية للمعادلة: $x^4-2x^3-x^2-1=0$
- يسمى الحل الموجب للمعادلة الأولى بالعدد الذهبي.

التمرين الثامن:

نعتبر الدالة f : $f(x)=x^2+\frac{1}{1-x^2}$

- عين مجموعة التعريف.
- أدرس اتجاه تغير الدالة f.
- عين تقاطع منحني f مع حامل محور الفواصل ومع حامل محور التراتيب.
- احسب $f(2)$, $f(-2)$.
- أنشئ منحني f.
- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^4-(1+m)x^2+m-1=0$$

التمرين التاسع:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

- بين أن f فردية.
- أدرس اتجاه تغير f.
- عين تقاطع منحني f مع حامل محور الفواصل ومع حامل محور التراتيب.

- أدرس وضعية منحنى f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$

- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب $g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

- بين أن g زوجية.

- اشرح كيف يمكن رسم منحنى الدالة g انطلاقا من منحنى الدالة f.

التمرين العاشر:

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

- عين مجموعة تعريف f.

- ادرس اتجاه تغير f.

ليكن C_f منحنى f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس:

- أدرس الوضعية النسبية لC_f والمنصف الأول(المستقيم ذو المعادلة $y = x$).

- عين تقاطع C_f مع حامل محور التراتيب ومع حامل محور الفواصل.

- لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+$ ب: $g(x) = f(x) - x$

- ادرس اتجاه تغير g وشكل جدول تغيراتها.

- تقبل أن الدلة g تؤول إلى الصفر لما x يؤول إلى $+\infty$

ماذا يمكن القول عن C_f والمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

- أنشئ C_f تقريبيا إذا علمت أن الدالة f تؤول إلى $-\infty$ لما x يؤول إلى -1.

- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة:

$$x^3 + (1-m)x^2 + (m^2 - 2m)x + m^2 - 4 = 0$$

- نعتبر الدالة المعرفة على D_f ب: $g(x) = |f(x)|$

- بين كيف يمكن إنشاء C_g انطلاقا من C_f ثم ارسمه.

- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة:

$$g(x) = m^2$$

التمرين 11:

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = tan^2x - tanx + 1$

- عين مجموعة تعريف f.
- بين أن f دورية مع تحديد الدور.
- ادرس اتجاه تغير الدالة f.
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ بطريقتين.

التمرين 12:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x^2 - 2$

- ادرس اتجاه تغير f.

ليكن C_f المنحني الممثل ل f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

- أدرس تقاطع C_f مع حاملي محوري المعلم.
- بين كيف يمكن إنشاء C_f انطلاقا من منحني الدالة مربع.
- أنشئ C_f.
- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x^2 - x - m - 2 = 0$$

ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$.

- استنتج مما سبق قيم m التي من أجلها (D) يقطع C_f.
- عين بدلالة m إحداثيات A وB نقط تقاطع C_f و(D).
- لتكن I منتصف $[AB]$ ، عين احداثيات I بدلالة m.
- ما هي مجموعة النقط I لما m يمسح $]-2;\ +\infty[$.

التمرين 13:

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 4} + \cos(x) - \frac{1}{x-2}$

- أوجد مجموعة تعريف الدالة f.

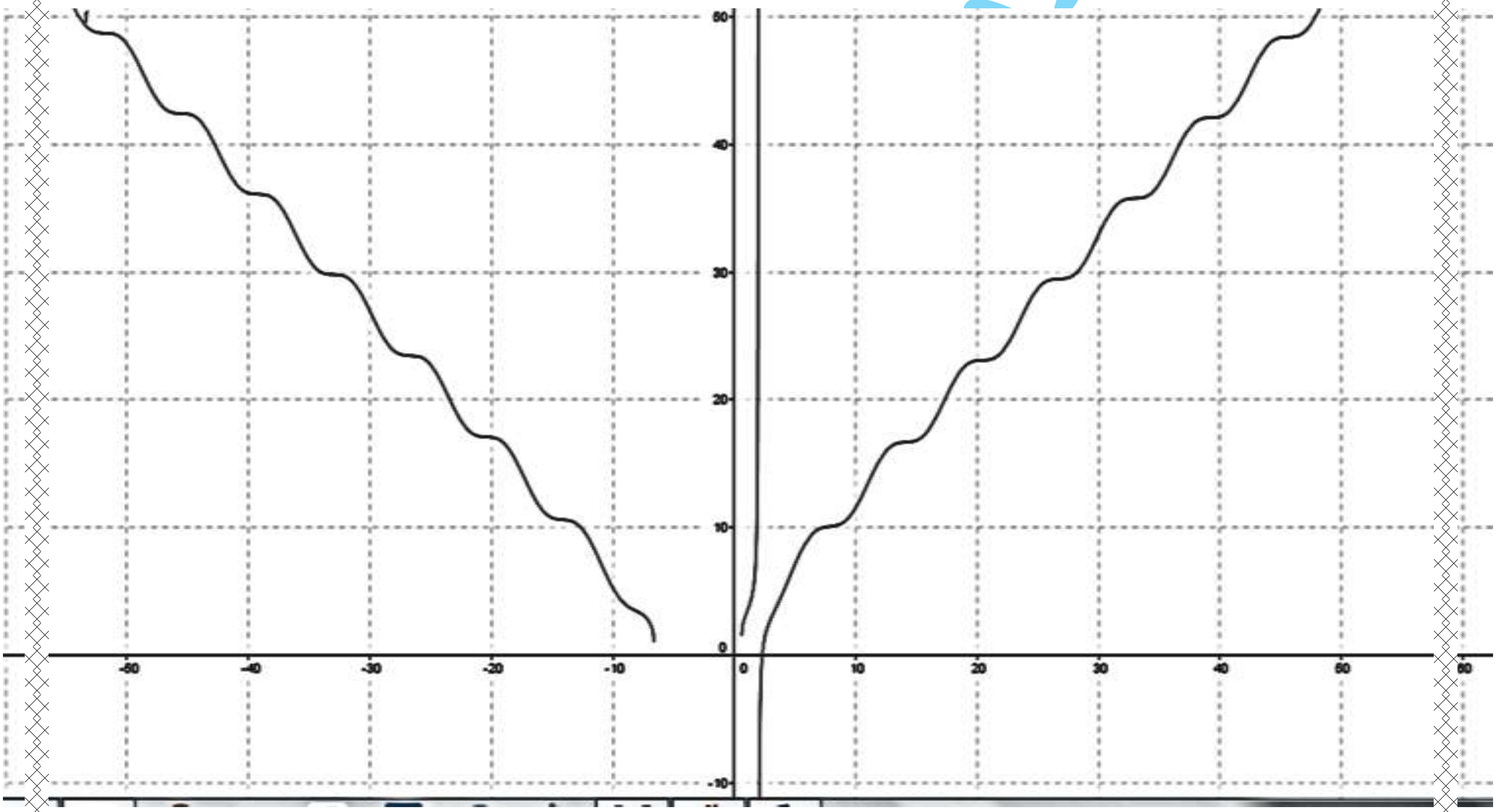
- أدرس شفعية الدالة f.
- ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في المجال: $[-60;60]$.
- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m إشارة و عدد حلول المعادلة:

$$\sqrt{(mx)^2+6m^2x-4m^2}+m.\cos x=\frac{m^2x-2m^2+m}{x-2}$$

-إذا علمت أن فاصلة نقطة التقاطع هي $x\approx 2.31$ ، جد قيمة تقريبية ل:

$\cos\frac{4\pi}{15}$

- يعطى بيان الدالة f في الشكل المقابل:



التمرين 14:

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$

- بين أن f دورية وعين دورها.
- أدرس شفعية f.
- نعتبر الدلة g المعرفة على $[0\,;2\pi]$ كما يلي: $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$
- بين أنه من أجل كل $x \epsilon [0\,;2\pi]$ تكون: $g(x) \leq \sqrt{2}$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;u\,;v)$

نعتبر المستقيمين (D) ذو المعادلة: $x = 1$ و (D') ذو المعادلة: $y = \tan(x)$.

لتكن $M(x, y)$ نقطة تقاطع (D') و (D).

لتكن θ الزاوية المحصورة بين حامل محور الفواصل و المستقيم (D').

- عين فاصلة النقطة M.
- عبر عن $\cos(\theta)$ و $\sin(\theta)$ بدلالة y.
- استنتج عبارة $\cos(\theta) + \sin(\theta)$ بدلالة y.
- استنتج أن $f(x) \leq \sqrt{2}$.
- بين أن $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.
- استنتج أكبر قيمة للدالة f.
- هل توجد قيم أخرى لx في المجال $[0; 2\pi]$ بحيث $f(x) = \sqrt{2}$.

التمرين 15:

نعتبر الدالة: $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

- عين مجموعة تعريف f.

- بين أن f دورية ودورها π.
- حل المعادلة $f(x) = 0$.
- حل المعادلة: $f(x) = \cos(x)$
- حل المعادلة:$f(x) = \sin(x)$.

التمرين 16:

نعتبر الدالة المعرفة ب:$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

- عين مجموعة تعريف الدالة f.
- بين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فان $f(x) \geq 1$.
- حل المعادلة $f(x) = 0$.

التمرين 17:

لتكن f دالة معرفة كما يلي: $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$

- عين مجموعة تعريف الدالة f.
- عين الأعداد الحقيقة a, b, c بحيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$
- أدرس الوضع النسبي بين منحنى C_f الدالة f والمستقيم (D) المعرف بالمعادلة: $y = x - 2$.

التمرين 18:

لتكن f دالة معرفة على: $]-\infty\, ; \,-1[U]-1\, ; \,+\infty[$

يعطى جدول تغيراتها كما يلي:

x	$+\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

- المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.
- مجموعة حلول المتراحة $f(x) = 0$ هي $S =]-\infty\,;\,-1[$
- على المجال $]-\infty;\,-1[$ يكون: $f(-2) > f(x)$ لما $x > -2$
- النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى C_f منحني الدالة f.
- الدالة f زوجية.

التمرين 19:

لتكن f دالة معرفة على: $]-\infty\,;2[U]2\,;\,+\infty[$

يعطى جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f(x)$	4	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	-2

- نعتبر الدالة g المعرفة ب: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
- أوجد مجموعة تعريف g.
- شكل جدول تغيراتها.

التمرين 20:

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{cx^2+dx-2}$ من أجل كل x لا يحقق $cx^2 + dx - 2 = 0$

- أوجد $a,\ b,\ c,\ d$ إذا علمت أن:
منحني f يشمل النقطة $(1,-2)$ و2 هي القيمة الممنوعة الوحيدة
و $f(0) = f(-1)$.
- تحقق أنه من أجل كل x من D_f: $f(4-x) + f(x) = 10$
- ماذا تستنتج بالنسبة ل C_f.

- يعطى C_f، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة:

$$x^2-(m-1)x+2m=0$$

التمرين 21:

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=(2x-1)^2+2$

- بين التمثيل البياني لـf هو صورة منحنى دالة من الشكل: $g(x)=ax^2$ بانسحاب يطلب تعيين شعاعه و تعيين g.
- يعطى منحنى الدالة g ، انطلاقا من C_g أرسم C_f.
- نعتبر المستقيمات D_m معادلتها $y=mx+m-1$ مع m وسيط حقيقي.

بين أن المستقيمات D_m تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة

$$16\left(x+\frac{m+4}{8}\right)^2-4m+4-(m+4)^2=0$$

التمرين 22:

مسألة:

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\frac{x}{2x-1}$

- عين مجموعة تعريف f.
- عين عددين حقيقين a و b بحيث: $f(x)=a+\frac{b}{2x-1}$
- استنتج تغيرات f على كل مجال من مجالات التعريف.
- برهن أن منحنى f يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه.
- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة:

$$2x-1=\frac{\frac{1}{2}}{mx+\frac{1}{2}}$$

- نعتبر مجموعة النقط M ذات المعادلة: $x^2 + y^2 = r$

- ما هي قيم r حتى تكون مجموعة النقط M غير خالية.

- ما هي قيم r حتى تكون في المجموعة نقطة وحيدة.

- لتكن النقطة $M(x, y)$ ، بين أن $OM^2 = x^2 + y^2$
- ما هو تعريف الدائرة.

- بين أن مجموعة النقط M هي دائرة لما $r > 0$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

- أدرس حسب قيم r تقاطع مجموعة النقط M مع منحنى f.

- ما هي قيم r حتى يكون التقاطع في 4 نقط؟

بين في هذه الحالة أن الرباعي الناتج هو شبه منحرف متساوي الساقين.

- تعطى مساحة شبه منحرف:الارتفاع × $\frac{\text{القاعدة الكبرى+القاعدة الصغرى}}{2}$

نسمي S_r مساحة شبه منحرف من أجل قيمة معينة لr

- أوجد علاقة بين S_{r1} و S_{r2} من أجل قيمتين r_1 و r_2.

- لتكن I_r تقاطع أقطار شبه المنحرف، ماهي مجموعة النقط I_r لما يمسح r المجال $]3, +\infty[$.

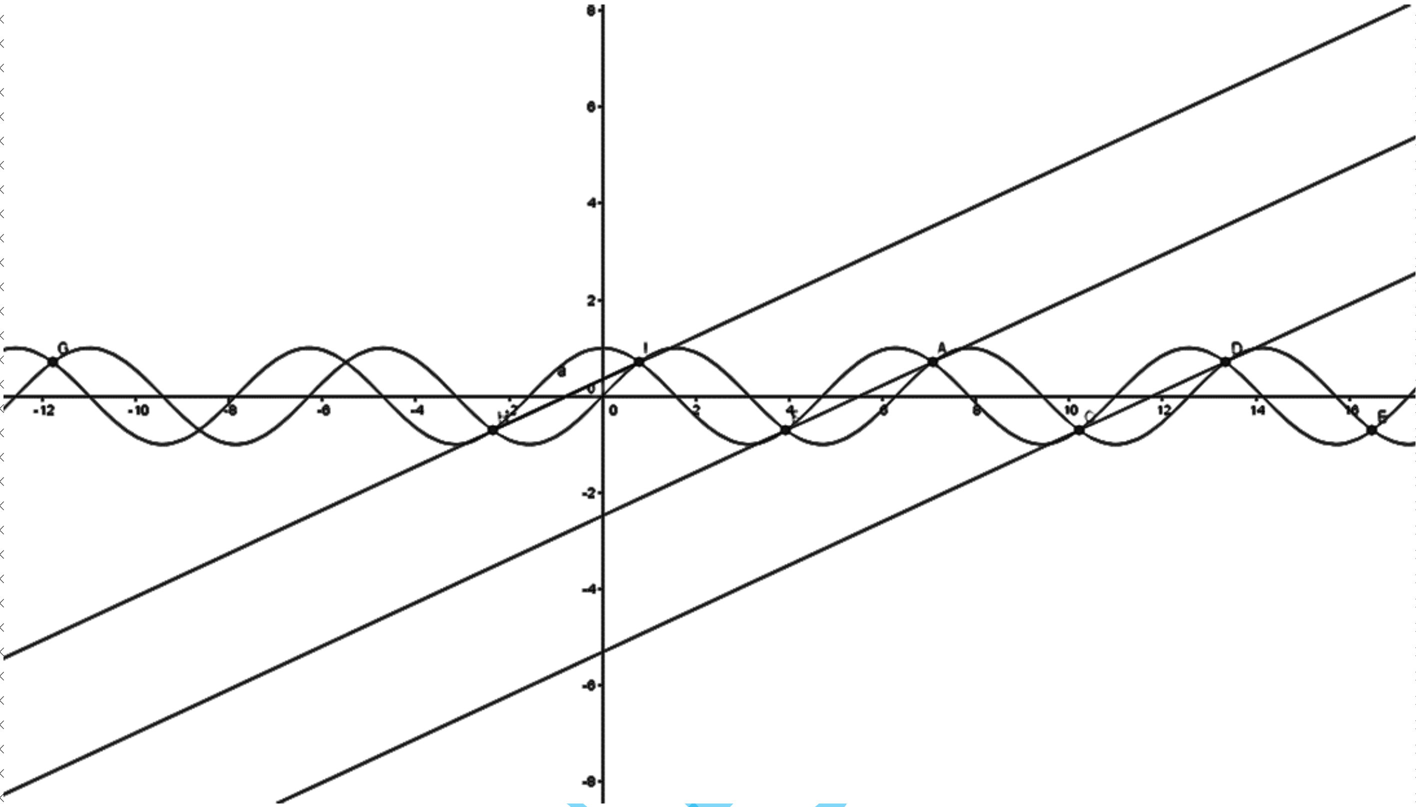
التمرين 23:

نعتبر الدالة: $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$

- عين مجموعة التعريف شفعية ودور الدالة f.
- عين حلول المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $[0, 2\pi]$.
- استنتج بقية الحلول على R.
- ليكن C منحنى الدالة cos و C' منحنى الدالة sin المعرفتان على R.
  أوجد تقاطع C و C' على $[0, 2\pi]$.
- أوجد معادلة المستقيم (D) المار من نقطتي التقاطع.

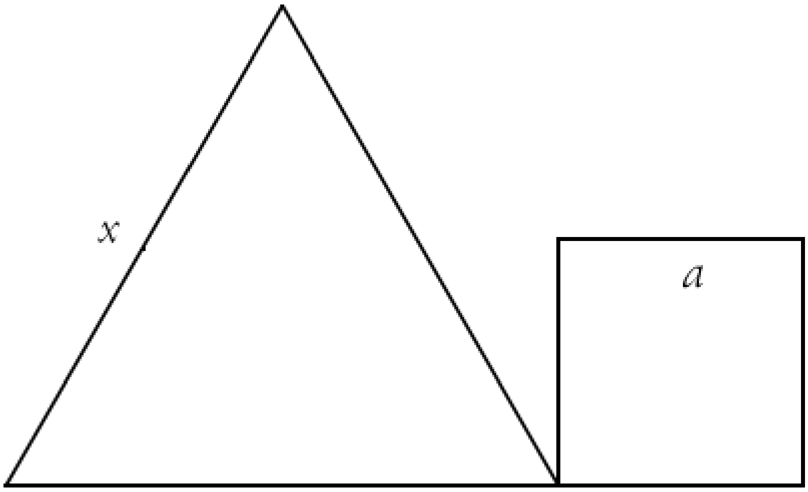
- بين أن المستقيمات المارة بنقطتي التقاطع على مجالات من الشكل: $[2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ توازي المستقيم (D) يطلب تعيين معادلاتها.

لا حظ البيان:



التمرين 24:

لدينا خيط طوله 1متر أنشأنا به مثلثا متقايس الأضلاع طول ضلعه x ومربعا طول ضلعه a.لاحظ الشكل:



- بين أن مجموع مساحتي المربع والمثلث تعطى بالعلاقة:
- $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{1}{16}(1-3x)^2$
- من أجل أي قيمة لـx تكون S صغرى.
- من أجل قيمة x السابقة جد قيمة النسبة $\frac{x}{a}$

التمرين 25:

نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

مع $a,\ b,\ c$ أعداد حقيقية.

- أوجد $a,\ b,\ c$ إذا علمت أن $A(2,4)$ نقطة من المنحني الممثل لـf
و النقطة $B\left(\frac{3}{4},1\right)$ مركز تناظر لـ C_f منحني f،
و $g(-1) = -\frac{4}{3}$. حيث $g(x) = f(x+1)$.

التمرين 26:

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

- أوجد مجموعة تعريف الدالة f.
- أوجد اتجاه تغير f.

- ما هو التحويل النقطي الذي يمكن من رسم C_f إنطلاقا من منحني الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$.
- نعتبر الدالة h المعرفة ب $h(x) = -\sqrt{x+2} + 3$

أدرس الوضعية النسبية C_h و C_f. حيث C_h هو المنحني الممثل لh و C_f هو المنحني الممثل لf.

-أرسم C_h و C_f.

-ليكن Q هو نصف المستوي المعرف ب$y \geq 0$ و C' المنحني المعرف ب: $(C_f \cup C_h) \cap Q$

أرسم C' في معلم آخر. و أعط عبارة k الدالة التي منحنيها C'.

التمرين 27:

حل هندسيا الجمل و المعادلات التالية:

- $\sqrt{x-4} \leq x^2$ ، $\frac{x-1}{x-3} \leq 2$ ، $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = x - 1 \end{cases}$
- $\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \leq 2\sqrt{x}$

كثيرات الحدود

التمرين الأول:

حل في مجموعة الاعداد الحقيقية المعادلة التالية: $x^2 - 3x + 1 = 0$

- ليكن x_0 حل لهذه المعادلة، بين أن: $x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{7+3\sqrt{5}}$
- بين أن x_0 يحقق: $x_0 + \frac{1}{x_0} = 3$
- أنشر $(x_0 + \frac{1}{x_0})^2$
- استنتج كتابة مبسطة ل $\frac{7+3\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{7+3\sqrt{5}}$

التمرين الثاني:

حل في مجموعة الأعداد الحقيقة المعادلتين التاليتين:

$$x^4 + x^3 + x + 1 = 0$$
$$12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$$

- ملاحظة: يمكن استعمال فكرة التمرين السابق.

التمرين الثالث:

بين أن $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

- إذا علمت أن: $x + \frac{1}{x} = 1$ أحسب $x^2 + \frac{1}{x^2}$

التمرين الرابع:

نعتبر كثير الحدود التالي: $E(x) = x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 62x + 840$

- بين أن: $E(x) = (x-5)(x-7)(x+6)(x+4)$
- استنتج جذور $E(x)$
- بين أن: $E(x) = (x^2 - x - 20)(x^2 - x - 42)$
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 62x + 336 = 0$

التمرين الخامس:

في كم نقطة على الأكثر يمكن أن يتقاطع منحنيي كثيري حدود من الدرجة الرابعة.

-نفس السؤال إذا كان معامل x^4 هو 1.

التمرين السادس:

نعتبر (Γ) القطع المكافئ ذو المعادلة $y = ax^2 + bx + c$ ذروته النقطة (h, k) وليكن (P) القطع المكافئ ذو المعادلة $y = dx^2 + ex + f$ نظير (Γ) بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = k$.

-أحسب $a + b + c + d + e + f$.

التمرين السابع:

- إذا كانت $p\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$ فما هي قيم x التي تحقق $f(3x) = 7$
- إذا $x + y = xy = 3$ أحسب $x^3 + y^3$.
- حل في مجموعة الأعداد الحقيقية المعادلة التالية:

$$x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 12$$

التمرين الثامن:

ما هو حاصل ضرب جذور المعادلة:

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$$

التمرين التاسع:

نعتبر كثير الحدود: $P(x) = (x^3 + 7x^2 - 3x^2 + 12)(\frac{5}{4}x^8 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - 1)$

- أحسب مجموع معاملات كثير الحدود $P(x)$.

التمرين العاشر:

نعتبر كثير الحدود: $P(x) = (ax^4 + bx^2 + c)(dx^8 + ex^6 + fx^4 + gx^2 + h)$

- أحسب مجموع معاملات كثير الحدود $P(x)$ إذا علمت أن $P(1) + P(-1) = 9$
- استنتج قيمة: $(a + b + c)(d + e + f + g + h)$.

التمرين 11:

نعتبر كثير الحدود: $P(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx$

- أحسب $P(1) + P(-1)$.

نعتبر كثير الحدود:

$$P(x) = ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + y$$

- أحسب $P(1) + P(-1)$.
- استنتج قيمة $a + c + e + g + y$ إذا علمت أن $P(1) + P(-1) = 1$

نعتبر كثير الحدود:

$$P(x) = (ax^5 + bx^3 + cx)(dx^6 + ex^5 + fx^4 + gx^3 + h)$$

- إذا علمت أن: $a + b + c = 5\,; e.g = -4\,; P(1) + P(-1) = 30$
أحسب قيمة كل من g و e.

التمرين 12:

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$(E): (m + 2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$$

- عين حلول المعادلة (E) من أجل $m = -2$.
- عين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة حلين متمايزين.
- عين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة حلين مختلفين في الإشارة.
- عين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة حلين x_1, x_2 حيث $x_1 + x_2 = 1$

التمرين 13:

نعتبر كثير الحدود $f_m(x)$ المعرف كالتالي:

$$f_m(x) = (m - 3)x^2 - (2m - 8)x + m + 2$$

- أوجد قيم العدد الحقيقي m بحيث من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f_m(x) = 0$.
- أوجد قيم m بحيث المعادلة $f_m(x)$ تقبل حلين x_1, x_2 يحققان:
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$$

التمرين14:

- نعتبر المعادلة ذات المجهول x : $2x^3-5x+2=0$

إذا علمت أن هذه المعادلة تقبل ثلاثة حلول: $x_1,\ x_2,\ x_3$

أحسب: $x_1+x_2+x_3$،

$x_1.x_2.x_3$،

$x_1.x_2+x_2.x_3+x_3.x_1$.

التمرين 15:

نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط m :

$$4x^2+4(m-1)x-3-8m=0$$

- بين أن المعادلة تقبل حلولا من أجل أي قيمة ل m ثم أكتب الحلول بدلالة m.

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة التالية:

التمرين 16:

أوجد قيم $a\,;b\,;c\,;d$ بحيث $\frac{2x-7}{4x^2+16x+15}=\frac{a}{x+c}+\frac{b}{x+d}$.

حل المعادلة: $|x|+|x-1|+|x-2|=e$ مع e عدد حقيقي موجب.

التمرين 17:

عين قيم العدد الحقيقي m حتى تحقق x_1,x_2 حلول المعادلة الشرط المعطى:

- $x^2+mx-6=0$ حيث: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{6}$.
- $(m+1)x^2-2(m+2)x+m-3=0$ حيث:

$$(4x_1+1)(4x_2+1)=18$$

- $mx^2-(4-m)x+2m=0$ حيث:

$$2(x_1^2+x_2^2)=5x_1x_2$$

التمرين 18:

جد قيمة الوسيط الحقيقي m بحيث يكون المقدار

$x^2+(m-2)x-(m-3)$ أصغر ما يمكن.

- جد قيم m بحيث يكون مجموع حلول المعادلة

$x^2+(m-2)x-(m-3)=0$ أصغر ما يمكن.

التمرين 19:

1. عين العددين الحقيقين a و b في كل حالة:

- $\begin{cases} a+b=17 \\ a.b=8 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a+2b=-25 \\ a.b=100 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a-b=-25 \\ a.b=100 \end{cases}$

2. عين العددين الحقيقين a و b في كل حالة:

- $\begin{cases} a+b=12 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4 \end{cases}$ ، $\begin{cases} a^2+b^2=73 \\ a^2b^2=24 \end{cases}$ ، $\begin{cases} |a|+|b|=13 \\ |a.b|=12 \end{cases}$

التمرين 20:

عين العددين الحقيقين xو y:

- $\begin{cases} x+y=17 \\ x^3+y^3=1241 \end{cases}$
- جد طريقة لحساب x^2+y^2 دون حساب قيمة كل من x وy.

التمرين 21:

نعتبر الدالة f: $f(x)=(x\cos x)^2-3x^4+(x\sin x)^2-3$

- عين مجموعة تعريف f.
- هل f كثير حدود؟
- أوجد حلول المعادلة: $f(x)=0$.
- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة:(المناقشة حسابيا)

$$f(x)=mx^2$$

التمرين 22:

نريد ملئ علبة قاعدتها مربعة الشكل بمكعبات متقايسة. ما هو عدد المكعبات الممكنة التي تشملها العلبة حيث إذا حذفنا المكعبات الموجودة في المحيط يبقى في العلبة 4 مكعبات؟

التمرين 23:

ليكن x و y عددين حقيقين بحيث: $x^2 + xy + y^2 = 4$

و $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$

- أحسب: $x^6 + x^3y^3 + y^6$

التمرين 24:

ليكن a و b عددين حقيقين بحيث $a - b = 1$

- بين أن: $a^3 - b^3 \geq \frac{1}{4}$

التمرين 25:

مستطيل مساحته $9cm^2$ وطول قطره $\sqrt{82}$، أحسب محيطه.

الاشتقاقية

التمرين الأول:

نعتبر الدالة f القابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$: أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

- f قابلة للاشتقاق عند 1 إذن: $f'(1) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ حيث f' مشتق f.
- إذا $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 5h^2 - 2h + 3$ فان $f'(2) = 3$.
- اذا كان $f'(2) = f'(-4)$ فان $f(2+h) - f(2) = f(-4+h) - f(-4)$
- إذا $f'(3) = 2$ فان $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = 2$.
- إذا كانت معادلة المماس عند 1 هي: $y = -3x + 2$ فان: $f'(1) = -3$
- إذا كانت $f'(0) = -2$ فان معادلة المماس هي: $y = -2x$.
- منحني الدالة f يقبل مماسا أفقيا عند فاصلة a إذا كانت $f'(a) = 0$.
- الدالتان f و $f + b$ لهما نفس الدالة المشتقة على I حيث b عدد حقيقي ثابت.

التمرين الثاني:

ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند 0.

- $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = |x|$ ، $h(x) = \frac{1}{x}$ ، $p(x) = \sin|x|$

التمرين الثالث:

عين مجموعة تعريف الدوال التالية ومجالات قابلية الاشتقاق والدالة المشتقة لكل منها:

- $f(x) = a$ مع a عدد حقيقي ثابت.
- $g(x) = ax + b$ مع a, b ثابتان من $\mathbb{R}$.

- $.h(x) = x^2$
- $.n \geq 2$ مع $H(x) = x^n$
- $.p(x) = \frac{1}{x}$
- $P(x) = \frac{1}{x^n}$
- $.F(x) = \sqrt{x}$
- $.c(x) = \sin(x)$
- $k(x) = \cos(x)$
- $.s(x) = |x|$

التمرين الرابع:

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$: بين أن:

- $[u+v]' = u' + v'$
- $[u.v]' = u'.v + v'.u$
- $\left[\frac{1}{v}\right]' = -\frac{v'}{v^2}$
- $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - v'u}{u^2}$
- $[au]' = a.u'$ مع a عدد حقيقي ثابت.

التمرين الخامس:

f و g دالتان معرفتان وقابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$: ومن أجل كل $x\epsilon\mathbb{R}$:

$$f''(x) = (1+x^2)f(x)$$

$$g''(x) = (1+x^2)g(x)$$

بين أن: $f.g' - gf'$ ثابتة .

التمرين السادس:

- بين أن مشتق دالة زوجية هو دالة فردية ومشتق دالة فردية هو دالة زوجية.
- لتكن f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $f' = g'$.

هل $f = g$؟

- بين أن الدالة $f = 3 + \frac{1}{x+1}$ تقبل الاشتقاق عند 2 وعين العدد المشتق.
- بين أن الدالة: $f(x) = \sqrt{4+x}$ تقبل الاشتقاق عند 2 واحسب $f'(2)$.
- ملاحظة: عندما تعطى أي دالة ويطلب تبيان أنها تقبل الاشتقاق عند قيمة معينة نقوم بحساب نسبة التزايد ونبين أنها تقبل نهاية حقيقة عند تلك القيمة وقد يأتي السؤال بصيغة "أحسب العدد المشتق عند قيمة باستعمال التعريف" وتكون نفس الإجابة.

التمرين السابع:

ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند 0:

- $f(x) = |x^2 - 2x|$، $g(x) = \begin{cases} |x| \,; x \leq 4 \\ -x + 8 \,; x > 4 \end{cases}$
- $h(x) = \begin{cases} (x+2)^2 \,; x \leq 0 \\ -x^2 + 4 \;\; ; x > 0 \end{cases}$

التمرين الثامن:

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = \frac{1-x^{10}}{1-x}$

- بين أن $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^9$
- أحسب f' بطريقتين.
- استنتج عبارة مبسطة ل: $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 9x^8$

التمرين التاسع:

عين مجال الاشتقاق واحسب مشتقات الدوال التالية:

- $s(x) = \sqrt{-|x|}$ ، $S(x) = \sqrt{x^2}$.
- $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ ، $g(x) = \frac{1-2x}{(1-x)^2}$ ، $h(x) = x\sqrt{x}$.
- $F(x) = (-3x^2+1)^3$ ، $G(x) = 2x^2(-x^3+1)^3$
- $p(x) = \frac{x^3+x}{x+1}$ ، $c(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$ ، $H(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

التمرين العاشر:

ليكن a عدد حقيقي ونعتبر الدالة: $f(x) = \frac{1}{(x-a)}$

- احسب f' مشتقة f.
- نضع $f"$ مشتقة f' و f^3 مشتقة $f"$ و من أجل كل عدد صحيح $k \geq 2$ f^k مشتقة f^{k-1}.
احسب $f^k(x)$.
- نعتبر الدالة g : $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$
أحسب $g^k(x)$ من أجل $k \geq 2$.

التمرين 11:

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولا تنعدمان و n عدد طبيعي غير معدوم، بين أن:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\frac{f}{g}} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \text{ ، } \frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \text{ ، } \frac{(f^n)'}{f^n} = n\frac{f'}{f}.$$

التمرين 12:

نعتبر الدالة: $f(x)=(x+1)^2+3$.

- بين أن منحنى C_f يقبل مماسين يمران من النقطة $(1,0)$ يطلب تعيين معادلتيهما.

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد المماسات لمنحنى الدالة f التي لها معامل توجيه معدوم حيث: $f(x)=mx^3+2x^2-6x+1$

- نفس السؤال لكن معامل التوجيه هو m .

التمرين 13:

أوجد جميع الدوال f المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ القابلة للاشتقاق والتي تحقق: من أجل كل: $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$ لدينا: $f(x+y)=f(x)+f(y)$

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الأقل معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ و f' لا تنعدم بين أن f لا يمكن أن تكون دورية.

إذا كانت f دورية هل f' دورية؟

التمرين 14:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$

- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب f' وادرس اشارتها وارسم جدول تغيرات f.
- أوجد قيم حدية محلية ل f.
- ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.
- ناقش حسب قيم الحقيقي m حلول المعادلة:

$$-x^3+6x^2-9x+1-m=0$$

التمرين 15:

بين أن $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$ من أجل كل $x \geq 0$.

- استنتج أن $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1 - x$ من أجل كل $x \geq 0$.
- بين أن $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$ من أجل كل $x \geq 0$.
- لتكن f دالة: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{x+1}$
  عين مجموعة التعريف واحسب f'.
- أدرس إشارة f'.
- استنتج أن $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \leq \sqrt{x+1}$
- تحقق أن $1 + \frac{10^{-15}}{2}$ هي قيمة تقريبية ل $\sqrt{1+10^{-15}}$ بتقريب إلى 10^{-30}.

التمرين 16:

متباينة برنولي: بين أنه من أجل كل $n\epsilon\mathbb{N}$ و $\alpha\epsilon\mathbb{R}$:

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

التمرين 17:

لتكن $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ أعداد حقيقية و f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2$

- ما هي قيمة x التي من أجلها تأخذ f قيمتها الحدية الصغرى.

التمرين 18:

من بين جميع المستطيلات التي محيطها يساوي 20 ما هو المستطيل الذي لديه أكبر مساحة(عين طوله وعرضه).

التمرين 19:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = ax^3 + 3x$

- أوجد قيمة العدد الحقيقي a إذا علمت أن الدالة f تقبل قيمتين حديتين محليتين عند 1 و -1.
- ارسم جدول تغيرات f وبين نوع القيم الحدية(صغرى أو كبرى).
- نعتبر الدالة: $g(x) = \frac{x-a}{a-x^2}$ مع a عدد حقيقي.

عين قيمة a اذا علمت أن g تقبل قيمة حدية محلية عند 1 وبين نوعها.

التمرين 20:

عين التقريب التآلفي للدوال التالية عند ال 0.

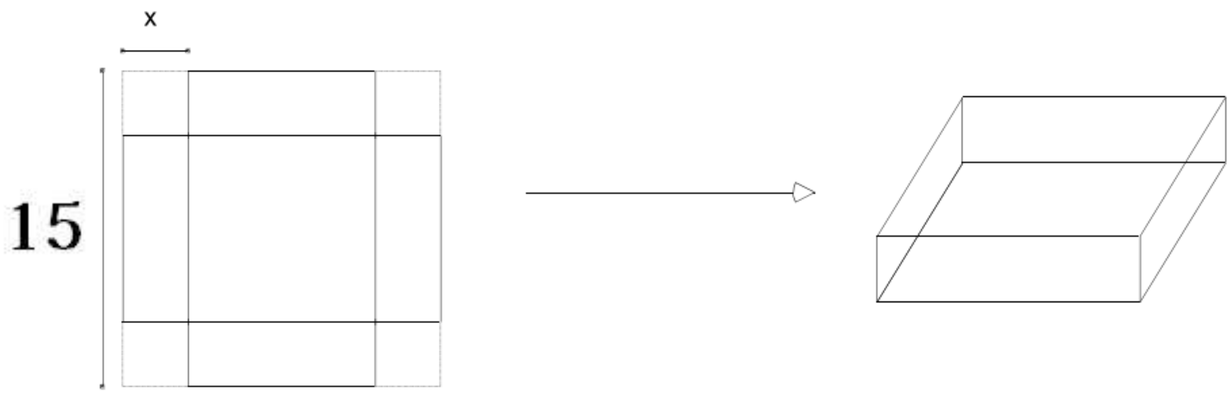
- $f(x) = (x+1)^2$ ،$g(x) = (x+1)^3$ ،$h(x) = \sqrt{x+1}$
- $F(x) = \frac{1}{1+x}$ ،$G(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ ،$H(x) = \sin x$

تطبيقات الاشتقاقية

التمرين الأول:

لتكن V دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $V(x) = 4x^3 - 60x^2 + 255x$

- ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول التغيرات.
- من مربع طول ضلعه 15 ننزع من جوانبه الأربعة مربعات طول ضلعها x. لصنع علبة، لاحظ الشكل:



- برر انتماء x إلى المجال $[0,7.5]$.
- برهن أن عبارة حجم العلبة هي $V(x)$.
- ما هي قيمة x التي تجعل الحجم أعظمي ثم أحسبه.

التمرين الثاني:

ليكن $ABCD$ مستطيل حيث $AB = 2$ و $AD = 3$ و M نقطة من $[DC]$
نضع $DM = x$ ، المستقيمان (AM) و (DB) يتقاطعان في N.

نرمز ب $S(x)$ لمجموع مساحتي ABN و DNM.

- بين أن الارتفاع المتعلق بالضلع (AB) في المثلث ABN يعطى بالعلاقة: $h(x) = \frac{2}{x+1}$
- بين أن $S(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.
- من أجل أي قيمة ل x تكون $S(x)$ أصغر ما يمكن، أحسبها.

التمرين الثالث:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A, B, C إحداثياتها على الترتيب $(2,0)$; $(0,1)$; $(0;\ -1)$

من أجل كل نقطة M من المستوي نضع: $d(M) = MA + MB + MC$
الهدف هو البحث عن نقطة M_0 بحيث من أجل كل نقطة M من المستوي $d(M) \geq d(M_0)$ بصيغة أخرة نبحث عن أصغر قيمة ل $d(x)$.

- بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي: $MB + MC \geq 2$.
- ليكن $a \geq 1$ عدد حقيقي، لتكن Γ_a مجموعة النقط M التي تحقق: $MB + MC = 2a$.
- تعرف على المجموعة Γ_1.
- تعرف على Γ_a من أجل $a \geq 1$.
- ارسم في نفس المعلم Γ_1, و Γ_2 .
- بين أنه من اجل كل $a \geq 1$، Γ_a تقطع محور الفواصل في نقطة I_a يطلب تحديد فاصلتها.
- بين أن كل نقطة من Γ_a إحداثياتها هي(x, y) حيث:

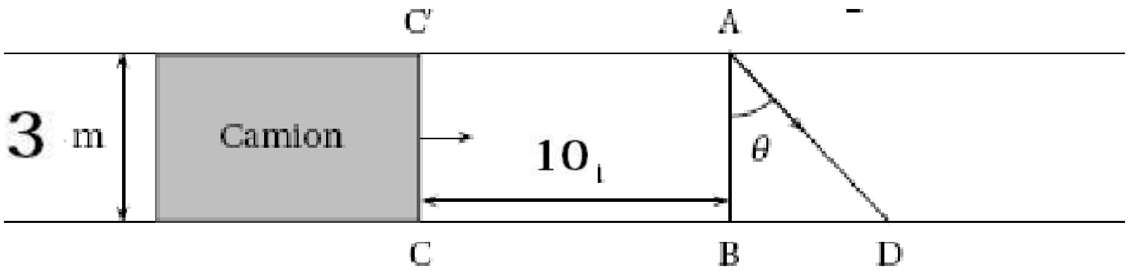
$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 - 1}.\cos t \\ y = a.\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

- أكتب بدلالة t الفرق: $MA^2 - I_aA^2$ وبين أنه إذا كانت M تختلف عن I_a فان هذا الفرق موجب تماما.
- استنتج أنه إذا كان $M \neq I_a$ و $M \in \Gamma_a$ فان $d(M) > d(I_a)$.
- لتكن $M_0(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$، بين أنه من أجل كل نقطة من المستوي تختلف عن M_0 لدينا: $d(M) > d(M_0)$.

التمرين الرابع:

على طريق عرضها $3m$ تمر شاحنة عرضها حوالي $3m$ أيضا أي أنها تأخذ كامل الطريق عرضا، سرعتها $60km/h$ ، على بعد $10m$ من هاته الشاحنة حاول أرنب أن يقطع الطريق وذلك بأقصى سرعته وهي $20km/h$. مقدمة

الشاحنة ممثلة بالقطعة $[CC']$ والأرنب موجود في النقطة A ويريد الوصول إلى النقطة D. نعتبر الزاوية $\theta = \angle BAD$



- أوجد المسافة AD بدلالة θ و الزمن t_1 اللازم لكي يقطع الأرنب هاته المسافة.
- أوجد المسافة CD بدلالة θ و الزمن t_2 اللازم لكي تقطع الشاحنة هاته المسافة.
- نضع $f(\theta) = \frac{10}{3} + \tan(\theta) - \frac{3}{\cos(\theta)}$، برهن أن الأرنب يقطع الطريق قبل مرور الشاحنة إذا وفقط إذا $f(\theta) > 0$.
- ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول التغيرات وبين أنها تنعدم في قيمتين يطلب إعطاء القيم التقريبية إلى 10^{-2}.($D_f = [0, \frac{\pi}{2}[$)
- استنتج.

التمرين الخامس:

لدينا خيط طوله m شكلنا منه دائرة نصف قطرها x ومثلثا متقايس الأضلاع. نسمي $S(x)$ مجموع مساحتي الدائرة والمثلث.

- ما هو المجال الذي ينتمي إليه x.
- بين أن $S(x) = \frac{36x^2\pi + (m-2\pi x)^2}{36}$.
- ما هي قيم x التي تجعل $S(x)$ أكبر ما يمكن.

التمرين السادس:

u و v دالتان معرفتان على مجال $[a, b]$ وقابلتان للاشتقاق على هذا المجال حيث من أجل كل $x \in [a, b]$ لدينا، $u'(x) \geq |v'(x)|$:

- بين أن $(v-u)$ متناقصة على المجال $[a,b]$ ثم استنتج أن: $v(b)-v(a)\leq u(b)-u(a)$.
- بين أن $(v+u)$ متزايدة على $[a,b]$ ثم استنتج أن: $v(a)-v(b)\leq u(b)-u(a)$.
- استنتج أن: $|f(b)-f(a)|\leq g(b)-g(a)$.
- بين أن: $\sin x\leq x$ من أجل: $0\leq x<\frac{\pi}{2}$.

استنتج أن: $\sin\frac{\pi}{11}-\sin\frac{\pi}{13}\leq\frac{2\pi}{143}$.

التمرين السابع:

من بين المثلثات القائمة، والتي لها نفس المحيط ما هو المثلث الذي يكون نصف قطر دائرته المحاطة أكبر ما يمكن.

التمرين الثامن:

نعتبر الدوال التالية: $f(x)=x^2-1$، $g(x)=x^2+x+1$، $h(x)=2x+1$، معرفة على $\mathbb{R}$.

ليكن x عدد حقيقي حيث: $x>1$:

- بين أنه يمكن إنشاء مثلث ABC بحيث: $AB=h(x)$، و $AC=g(x)$ و $BC=f(x)$.
- بين أن الزاوية $\angle ABC$ مستقلة عن x.(أي مهما تغير x فان الزاوية لا تتغير).
- هل يمكن أن يكون المثلث ABC متساوي الساقين.

التمرين التاسع:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير:

- إذا انعدمت الدالة المشتقة عند قيميتين فان الدالة أصلية تقبل قيمتين حديتين.
- إذا قبل منحنى دالة f مماسا موازيا لمحور التراتيب عند قيمة a فان $f'(a)=0$.

- إذا قبلت دالة f قيمة حدية محلية عند فاصلة a، فان المماس عند a يوازي محور الفواصل.
- إذا كانت دالة f متزايدة على مجال D_f فان دالتها المشتقة f' موجبة على D_f.
- يوجد كثير حدود من الدرجة الثالثة موجب تماما.

التمرين العاشر:

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2}$ و C_f منحنيها البياني:

- أدرس وجود وعدد حلول المعادلة: $f(x) = mx$.
- لتكن M و N نقطتي تقاطع C_f والمستقيم ذو المعادلة $y = mx$ في حال وجودهما نسمي I_m منتصف $[MN]$.
أوجد احداثيات I_m بدلالة m.
- ما هي مجموعة النقط I_m لما تمسح m كل الأعداد الحقيقة.

التمرين 11:

نعتبر الدالة: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$ معرفة على $\mathbb{R}$.

- أوجد مركز تناظر C_f منحنى الدالة f.
- أكتب معادلة المماس ل C_f عند مركز التناظر.
- أدرس الوضعية النسبية للماس و C_f.

التمرين 12:

نعتبر الدالة: $f(x) = \frac{(x-4)^2}{x-2}$.

- بين أن النقطة $I(2,-4)$ مركز تناظر.
- أكتب معادلة المماس لمنحنى f عند I.

فرض أول للفصل الأول:

التمرين الأول:4ن

نعتبر الدالة f المعرفة ب:$f(x) = tan^2x - tanx + 1$

- عين مجموعة تعريف f.
- بين أن f دورية مع تحديد الدور.
- أدرس اتجاه تغير f.
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ بطريقتين.

التمرين الثاني:6ن

نعتبر $P(x)$:

$$P(x) = \frac{x^3}{(m^2-1)x+1} + (m-2)x^2 + \frac{x}{m^2x-3mx+2x-1} - m + 2$$

مع m وسيط حقيقي.

- أوجد قيم x حتى يكون P معرف.
- أوجد قيم m حتى يكون P كثير حدود، ثم حل المعادلة $P(x) = 0$ من أجل قيم m المحصل عليها.
- ما هو مجموع حلول المعادلة $P(x) = 0$ لما $m = 2$.

التمرين الثالث:6ن

نعتبر الدالة: $f(x) = -\frac{1}{x^2+1}$.

- أوجد مجموعة تعريف f وادرس شفعيتها.
- أدرس اتجاه تغير f وشكل جدول التغيرات.
- أعط حصرا للدالة f.

من أجل $x\epsilon[0; +\infty[$ نعرف دالة g بحيث: $g(f(x)) = x$، و $f(g(x)) = x$.

- ما هي مجموعة تعريف g، ادرس اتجاه تغير g، وشكل جدول التغيرات.
- أوجد عبارة g.

- برهن أنه إذا كانت النقطة M' نظيرة النقطة $M(x,y)$ بالنسبة للمنصف الأول(المستقيم ذو المعادلة $y=x$) فان إحداثيات M' هي $M'(y,x)$.
- ماذا يمكن القول عن C_f و C_g منحنيي الدالتين f و g على الترتيب.
(في هذا السؤال نأخذ اقتصار الدالة f على $\mathbb{R}_+$).

التمرين الرابع:4ن

أدرس حسب قيم x إشارة $A(x)$.

$$A(x)=x^3+x^2+4x+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+3$$

السنة ثانية رياضيات.	الفرض المحروس الأول للفترة الأولى في الرياضيات	المدة: ساعة.

التمرين الأول: (05 نقا ط)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

- المعادلة $x^2 + 6x + 5 = 0$

1. ليس لها حلول في $\mathbb{R}$. 2. لها حلان هما (5-) و (1-). 3. لها حل مضاعف.

- لتكن الدالتان f، g المعرفتان على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2$ و $f(x)=x+1$.

1. الدالة $g\circ f$ متزايدة تماما . 2. الدالة $g\circ f$ متناقصة تماما . 3. الدالة $g\circ f$ ثابتة.

- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=\frac{|x|\times(x^2+1)}{x^2+x}$ هي:

1. $f(x)=x$. 2. $f(x)=-1$. 3. $f(x)=1$.

- لتكن الدالة f المعرفة على IR كما يلي: $f(x)=(x-3)^2+4$ جدول تغييراتها هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	13	$\nearrow$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	13	$\nearrow$

- لتكن الدالة f المعرفة على IR كما يلي: $f(x)=(x-1)^2-1$

منحنى الدالة f هو منحنى الدالة المربع بانسحاب شعاعه

1. $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. 2. $\vec{V}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. 3. $\vec{V}\begin{pmatrix}+1\\-1\end{pmatrix}$.

التمرين الثاني : (07 نقاط)

ليكن كثير الحدود $f(x)$ حيث: $f(x)=x^2+4x-5$

1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x-2)^2-9$.
2. حل المعادلات التالية: $f(x)=-5$ ، $f(x)=0$ ، $f(x)+9=0$.

التمرين الثالث : (08 نقاط)

$ABCD$ مستطيل حيث $AB=4cm$ و $AD=xcm$ ، $x\rangle 0$. نعتبر النقاط D',C',B',A' منتصفات القطع المستقيمة على الترتيب $[AB]$،$[BC]$،$[CD]$،$[DA]$.

1. أنجز رسما مناسبا .
2. بين أن : $A'B'=\frac{1}{2}\sqrt{16+x^2}$.
3. أحسب مساحة المثلث $A'BB'$.
4. استنتج مساحة الرباعي $A'B'C'D'$.

*** ملاحظة: هذا الفرض تم تقديمه في ثانوية فهو عمل ليس شخصيا.

اختبار أول في مادة الرياضيات

التمرين الأول:(2ن)

بين أنه من أجل كل عددين حقيقين x و y غير معدومين:

$$2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+6>0$$

التمرين الثاني:(6ن)

نعتبر الدالة $f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2}}$.

- عين مجموعة تعريف f.
- بسط عبارة f.
- أدرس تغيرات f (النهايات عند حدود مجموعة التعريف، الدالة المشتقة، إشارة الدالة المشتقة، اتجاه التغير، جدول التغيرات)
- بين أن الدالة f تقبل محور تناظر يطلب تعيينه.
- ارسم C_f منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

نعتبر Γ مجموعة النقط $M(x,y)$ المتساوية البعد r عن مبدأ المعلم، حيث r حقيقي ثابت.

- ما هو الشكل الهندسي الذي تأخذه Γ . أعط عبارة r بدلالة x و y.
- أدرس تقاطع Γ و C_f.
- أعط إحداثيات نقط التقاطع بدلالة r.
- لتكن r_1 و r_2 قيمتين مختلفتين ل r. أعط بدلالة r_1 و r_2 مساحة شبه المنحرف الناتج عن تقاطع Γ مع C_f لما $r=r_1$ و تقاطع Γ مع C_f لما $r=r_2$.

التمرين الثالث:(7ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2x^3+x^2+15x-18$

- ما هو عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=0$.

- أعط حصرا للحل السالب وأعط قيمته المضبوطة إذا علمت أنه عدد صحيح نسبي.
- أدرس حسب قيم x إشارة $f(x)$.
- استنتج حلول المعادلة: $2x\sqrt{x} - x - 15\sqrt{x} + 18 = 0$.
- بين أن منحني الدالة f يقبل محور تناظر يطلب تعيينه.

التمرين الرابع:(05ن)

نعتبر الدالة $g_n(x) = [\cos(x)]^n + [\sin(x)]^n$ معرفة من أجل كل عدد حقيقي x وكل عدد طبيعي $n \geq 1$.

- هل يمكن أن تكون g_n ثابتة من أجل قيمة لـn.
- ما هي قيم n حتى تكون g_n زوجية.
- بين أن $g'_n(x) = n.\sin x . \cos x\, (\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x)$. من أجل كل $n > 2$ ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$.
- أدرس اتجاه تغير g_n على $[0; 2\pi]$ وشكل جدول التغيرات.
- علل لماذا يكفي دراسة g_n على $[0; 2\pi]$.
- أعط حصرا لـg_n.
- حل المعادلة $g_n(x) = [\sin x]^n + 1$.

مدخل إلى النهايات

التمرين الأول:

- لتكن f دالة دورية غير ثابتة معرفة على $\mathbb{R}$ برهن أن f لا تقبل نهاية عند $+\infty$.
- إذا كان $-2 \leq f \leq 2$ هل $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ؟
- $g(x)$ دالة تآلفية، و$h(x)$ دالة بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ و $f(x) = g(x) + h(x)$. ماذا يمكن القول عن المستقيم الذي معادلته: $y = g(x)$؟
- هل يمكن لدالة أن تقبل أكثر من نهاية.

التمرين الثاني:

أجب بصحيح أو خطأ:

- إذا كانت الدالة f ليست معرفة عند a فهي لا تقبل نهاية عند a.
- f تقبل نهاية عند a إذا وفقط إذا قبلت نهاية على يمين a أو على يسار a.
- جميع الدوال المحدودة تقبل نهاية عند $+\infty$.
- إذا قبلت $|f|$ نهاية عند a فان f تقبل نهاية عند a.

التمرين الثالث:

أحسب النهايات التالية عند كل قيمة ل a.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right) \;;\; \lim_{x\to2^+}\frac{1}{x\sqrt{x-2}} \;;\; \lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{x+3}} \;;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{-x}}+\frac{1}{x^2}+3x\right) \;;\; \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x-100}+1}+x\right) \;;\; \lim_{x\to-3^+}\left(\frac{-5}{(x-1)^2\sqrt{x+3}}-1\right) \;;$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{x+2}}{x-2} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} \;;\; \lim_{x\to0^-}\left|\frac{5}{x^3(x+2)}\right| \;;\; \lim_{x\to-3^+}\left|-3+\frac{1+x}{\sqrt{x+3}}\right| \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left|(x-1)\left(\frac{1}{x^2}-2\right)\right| \;;\; \lim_{x\to-\infty}\left|x^3+\frac{1}{x^4}+2\right| \cdot$$

التمرين الرابع:

ليكن P كثير حدود معرف ب: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$

- أحسب: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{P(x)-P(0)}{x}\right)$.
- استنتج $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+2)^3-2}{x}$.
- نعتبر الدالة $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$، أحسب: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.
- أحسب: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}$.
- برهن أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} a_n x^n$.
- ليكن $Q(x)$ كثير حدود: $Q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$

بين أن: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{a_n x^n}{a_m x^m}$.

ملاحظة: الرمز $|x| \to +\infty$ معناه $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$.

استنتج القواعد التالية: نهاية كثير حدود عند اللانهاية هي نهاية الحد الذي له أكبر أس.

نهاية دالة ناطقة عند اللانهاية هي نهاية (الحد الذي له أكبر درجة في البسط على الحد الذي له أكبر درجة في المقام).

التمرين الخامس:

- باستعمال تعريف نهاية دالة بين أن: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$.
- باستعمال التعريف أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$، و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.
- بين أن الدوال: $\cos(x)$،، $\sin(x)$، $(-1)^n$ لا تقبل نهاية عند $+\infty$.
- بين أن الدالة $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$، لا تقبل نهاية عند الصفر.
- لتكن u و v دالتان معرفتان على مجال I و a عنصر من I. بين أنه اذا قبلت u و v نهاية حقيقية عند a فان:

$$\lim_{x\to a}(u+v)(x) = \lim_{x\to a} u(x) + \lim_{x\to a} v(x).$$

$\lim_{x\to a}(u.v)(x) = \lim_{x\to a} u(x) . \lim_{x\to a} v(x)$.

من أجل $v \neq 0$ $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim_{x\to a} u(x)}{\lim_{x\to a} v(x)}$.

- تطبيق: بين أن: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$.
- نعتبر أيضا الدالة z المعرفة على I. بين أنه إذا كانت $\lim_{x\to a} u(x) = b$ و $\lim_{x\to a} v(x) = b$، مع $b \in \mathbb{R}$ و من أجل كل $x \in I$: $u < z < v$ فان: $\lim_{x\to a} z(x) = b$.
- بين أنه إذا كانت $u > v$ و $\lim_{|x|\to+\infty} v(x) = +\infty$ فان $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = +\infty$
- بين أنه إذا كانت $u < v$ و $\lim_{|x|\to+\infty} v(x) = -\infty$ فان $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = -\infty$

التمرين السادس:

نعتبر الدالة f العرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- بين أنه من اجل كل $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{\sin x}{x} \leq 1$.
- بين أنه من اجل كل $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$: $\frac{\sin x}{x} \geq \cos x$.
- استنتج: $\lim_{x\to 0}\sin x$.
- استنتج تقريب تآلفي للدالة sin عند الصفر.
- استنتج $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$.
- احسب العدد المشتق للدالة sin عند الصفر.
- استنتج مرة أخرى النهاية: $\lim_{x\to 0}\sin x$.

التمرين السابع:

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \cos^2 x + x$، $g(x) = \sin^2 x$.

- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
- اسحب $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x)$.
- هل يمكنك استنتاج $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ انطلاقا من $\lim_{x\to+\infty} (g+f)(x)$

المتتاليات العددية

التمرين الأول:

نعتبر المتتالية u_n المعرفة ب : $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ من أجل $n \in \mathbb{N}$.

- أحسب الحدود الأربعة الأولى.
- ما هي البواقي الممكنة لقسمة n على العدد 4. استنتج أن كل طبيعي n يكتب على أحد الأشكال التالية: $n = 4p$، أو $n = 4p + 1$، أو $n = 4p + 2$، أو $n = 4p + 3$، من أجل $p \in \mathbb{N}$.
- استنتج عبارة مبسطة ل u_n حسب قيم n.
- ما هو اتجاه تغير u_n.
- أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
- مثل الحدود الأربعة الأولى على مستقيم عددي.

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $w_n = n + 1 + (-1)^n$

- احسب الحدود الثلاثة الأولى ومثلها.
- حدد اتجاه تغير w_n.
- احسب النهاية $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

التمرين الثالث:

لتكن f دالة معرفة على $[0, +\infty[$ و u_n متتالية معرفة ب: $u_n = f(n)$

- برهن أنه اذا كانت f متزايدة فان u_n متزايدة.
- برهن أنه إذا كانت f متناقصة فان u_n متناقصة.
- لتكن (u_n) متتالية معرفة ب: $u_n = \cos(2\pi n)$ من أجل كل $\mathbb{N}$
بين أن (u_n) ثابتة.
- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+$ ب: $f(x) = \cos(2\pi x)$.
هل f ثابتة.

- استنتج أن اتجاه تغير المتتالية لا يحدد اتجاه تغير الدالة المرفقة لها.
أي أن الاستلزام العكسي في السؤال الأول ليس دائما صحيح.
مما سبق حدد اتجاه تغير المتتاليات الآتية:
- $u_n = \cos\frac{1}{n}$ ، $v_n = \frac{2n-1}{n}$ ، $w_n = \sqrt{n^2+1}$.

التمرين 4:

نعتبر المتتالية u_n المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $u_n = \frac{n}{2^n}$.
- قارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.
- استنتج اتجاه تغير u_n.
- بين أن u_n محدودة.
- بين أن $2^n \geq n$ من أجل كل $n \geq 1$.

التمرين 5:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالحد الأول u_0 ومن أجل كل $n\epsilon\mathbb{N}$:
$u_{n+1} = au_n + b$، مع a و b.
- نفرض $b = 0$ و $a \neq 0$أعط عبارة (u_n) بدلالة n ونوع المتتالية.
- نفرض $a = 0$ أعط عبارة (u_n).
- نفرض $a = 1$ أعط عبارة (u_n) و نوع المتتالية.
- نفرض $a \neq 1$ و $b \neq 0$:
هل يوجد متتالية w_n ثابتة تحقق العلاقة: $w_{n+1} = aw_n + b$؟ أعط عبارتها بدلالة a و b.
نعتبر المتتالية $v_n = u_n - w_n$ بين أن (v_n) هندسية وأوجد عبارتها بدلالة n.
استنتج عبارة (u_n) بدلالة n.
- تطبيق عددي: أوجد الحد العام للمتتالية: $z_{n+1} = 3z_n + 1$.

التمرين 6:

نعتبر المتتالية(u_n) حدها الأول u_0 والثاني u_1 ومن أجل كل $n\epsilon\mathbb{N}$:

$u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$، مع a و b عددان حقيقيان.

- جد عددين حقيقين α و β بحيث: $\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \alpha.\beta=-b\end{cases}$.
- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $v_n=u_{n+1}-\alpha u_n$. بين أن (v_n)هندسية أساسها β.
- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $w_n=u_{n+1}-\beta u_n$. بين أن (w_n) هندسية أساسها α.
- أكتب v_n و w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

تطبيق عددي: أوجد الحد العام لمتتالية فيبوناتشي المعرفة ب:

$$\begin{cases}u_0=1\,,u_1=1\\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\end{cases};n\geq 0$$

التمرين 7:

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) حدودها كلها موجبة وحدها الأول: $v_1=3$.

إذا علمت أن: $\frac{15}{16}=v_3+v_5$.

- عين أساس المتتالية (v_n).
- ما هو اتجاه تغير (v_n).
- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- أحسب بدلالة n: $S_n=v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n$.
- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين 8:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل n حيث $n>a$ مع a عدد حقيقي بـ: $u_n=\frac{n+a}{a-n-1}$،

ونعتبر المتتالية $v_n=\frac{1}{u_n-u_{n-1}}-\frac{1}{u_{n-1}-u_{n-2}}$.

- بين أن (v_n) حسابية.
- ادرس حسب قيم a اتجاه تغير (v_n).

التمرين 9:

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a: $(a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$.

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

- اجمع طرفا لطرف المساويات التالية:

$$1^3 = 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

حتى

$$(n+1)^3 - n^3 = 3.n^2 + 3n + 1$$

- استنتج المجموع: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

التمرين 10:

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n = \frac{\cos(3n-\pi)}{\sqrt{n}}$، $v_n = \frac{\sin(3(n-\pi))}{\sqrt{n}}$.

- بين أنه من أجل كل طبيعي n غير معدوم: $|u_n| \leq \frac{1}{n}$.
- استنتج نهاية (u_n).
- استنتج نهاية (v_n).

نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم:

$$w_n = u_n^2 + v_n{}^2$$

- أكتب عبارة (w_n) بدلالة n. (على أبسط شكل ممكن).
- أدرس اتجاه تغير (w_n).
- أحسب المجموع: $S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n$.

التمرين 11:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

- أثبت أنه من أجل كل n غير معدوم: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
- ادرس اتجاه تغير u_n.
- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غي معدوم:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \frac{n}{n+1}$$

- أحسب نهاية (u_n) ونهاية S_n.

التمرين 12:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل طبيعي $n \geq 1$ بـالحد الاول $u_1 = 1$ والعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = u_n + n + 1$.

- اجمع طرفا لطرف الحدود u_1 و u_2 و u_3 و u_4. ماذا تلاحظ.
- بين أن: $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ من أجل كل طبيعي n غير معدوم.

التمرين 13:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

- أرسم Γ منحنى الدالة: $x \to \frac{1}{x}$.
- علم النقطة $A_0(1,1)$.
- نعتبر النقط A_n, B_n من Γ بحيث من أجل كل عدد طبيعي n المستقيم (A_nB_n) معامل توجيهه هو 2. والمستقيم $(A_{n+1}B_n)$ معامل توجيهه $\frac{3}{4}$.
علم النقط B_0 و A_1 ثم عين إحداثياهما.
- من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر a_n فاصلة A_n و b_n فاصلة B_n.
عين علاقة بين a_n و a_{n+1}.
- استنتج عبارة a_n وبين نوع المتتالية (a_n).
- استنتج عبارة b_n.

- استنتج إحداثيات A_n و B_n بدلالة n.

التمرين 14:

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ أساسها q وحدها الأول v_0.كما نعتبر المتتالية الهندسية w_n أساسها q'.

- أحسب المجموع: $S_n = v_0^m + v_1^m + v_2^m + \cdots + v_n^m$ مع m عدد طبيعي ثابت.(المجموع بدلالة m ، n ، q)
- أحسب المجموع: $s_n = v_0 . w_0 + v_1 . w_1 + \cdots + v_n . w_n$
- أحسب المجموع: $T_n = (v_0^m - w_0^m) + (v_1^m - w_1^m) + \cdots + (v_n^m - w_n^m)$.
- أحسب المجموع:

$$t_n = v_0(w_0 + 1) + v_1(w_1 + 2) + v_2(w_2 + 4) + \cdots + v_n(w_n + 2^n)$$

التمرين 15:

- بين أنه من أجل كل $\alpha > 0$ و $n \in \mathbb{N}$: $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$.
- ليكن q عدد حقيقي.

من أجل $q > 1$ استنتج $\lim_{n \to +\infty} q^n$.

من أجل $-1 < q < 1$ استنتج $\lim_{n \to +\infty} q^n$.

من أجل $q \leq -1$ هل يمكنك استنتاج النهاية.

- قدم برهانا على نهاية متتالية هندسية حسب قيم أساسها.

التمرين 16:

لتكن a, b, c, d, e خمسة حدود متتابعة بهذا الترتيب -حيث a هو الحد ذو أصغر رتبة- من متتالية حسابية (u_n) :

حيث تحقق: $a + b + c + d + e = 60$ و $a^2 - e^2 = 48$

أوجد الحدود a, b, c, d, e و عبارة (u_n).

التمرين 17:

لتكن a, b, c, d, e خمسة حدود متتابعة من متتالية هندسية (v_n) بهذا الترتيب حيث a هو الحد ذو أصغر رتبة.

وتحقق: $a + b + c + d + e = 1$ و $a.e + c = 1$

أوجد حدود المتتالية (v_n) والحد العام.

وضعية إدماجيه:

التمرين الأول:(8ن)

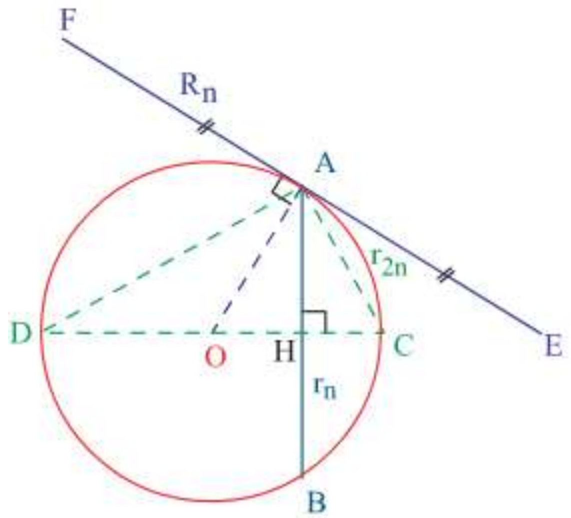
نعتبر المتتالية (u_n) الموجبة تماما حدها الأول u_0 و المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{{u_n}^2 + 3}$$

- أدرس اتجاه تغير (u_n).
- برهن أنه من أجل كل $n \epsilon \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{3}$.
- استنتج أن $u_n \leq \frac{u_0}{3^n}$.
- استنتج نهاية (u_n).

التمرين الثاني:(12ن)

نعتبر العدد الصحيح n بحيث $n \geq 3$، نعتبر المضلع المنتظم r_n ب n ضلع رؤوسه تنتمي لدائرة C قطرها 1.



نعتبر القطعة $[AB]$ أحد أضلاع المضلع r_n.

القطعة $[AC]$ هي أحد أضلاع مضلع منتظم آخر r_{2n} عدد أضلاعه $2n$ رؤوسه تنتمي للدائرة C.

القطعة $[EF]$ هي ضلع لمضلع منتظم R_n محيط بالدائرة C نحصل عليه انطلاقا من رسم المماسات للدائرة C عند رؤوس المضلع r_n.

نرمز ب P_n و p_n لمحيطي المضلعين R_n و r_n على الترتيب.

- برهن أن طول أحد أضلاع المضلع r_n هو: $a_n = \cos\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\pi\right]$
- برهن أن طول أحد أضلاع المضلع الكبير هو: $A_n = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
- استنتج P_n و p_n بدلالة n.

- يعطى جدول تغيرات الدالة $f(x) = (1+\frac{1}{x})\left(\frac{\cos\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)\pi\right]}{\cos\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)\pi\right]}\right)$ على المجال $[3;+\infty[$

x	$3 \qquad\qquad +\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow 1$

- استنتج أن $\pi > p_n > p_{2n} > p_{4n}$.
- بين أن $\pi < P_n < P_{2n} < P_{4n}$.
- لاحظ أن $AC^2 = DC.HC$. بين أن $AC^2 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}}\right)$.
- استنتج أن: $p_{2n} = \sqrt{2n}\sqrt{n - \sqrt{n^2 - p_n^2}}$.
- استنتج أن: $p_{2n} = n.\sqrt{2 - 2\sin\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\pi\right]}$.
- لاحظ أن: $AO.AH = AE.OH$. بين أن: $EF = \frac{AB}{\sqrt{1-AB^2}}$.
- استنتج أن: $P_n = \frac{np_n}{\sqrt{n^2-p_n^2}}$.
- بين أن: $P_n - p_n = \frac{p_n^3}{\sqrt{n^2-p_n^2}\left(n+\sqrt{n^2-p_n^2}\right)}$.
- بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}(P_n - p_n) = 0$ ثم استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$
- استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \pi$.
- استنتج: $\lim\limits_{n\to+\infty} n.\sqrt{2 - 2\,sin\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\pi\right]}$.
- أكمل الجدول:

حصر π	قيمة مقربة لـ P_n	قيمة مقربة لـ p_n	n
			$n = 4$
			$n = 8$