سنة **ثانية** ثانوي

الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني رياضي

سلسلة تمارين حول:

كثيرات الحدود

[مع حلول مقترحة]

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[12 نوفمبر 2021]

1. التمارين

◆ التمرين 01) ◆ الحل

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$، ثم ادرس إشارة كثير الحدود P في كل حالة مما يلي:

1. $P(x)=x^2+4x+3$
2. $P(x)=4x^2-x+1$
3. $P(x)=-3x^2+x+1$
4. $P(x)=x^4+x^2-6$
5. $P(x)=x^2-6x+2$
6. $P(x)=x^4+3x^2+4$

◆ التمرين 02) ◆ الحل

عين قيم m حتى يكون α جذرا لكثير الحدود P، في كل حالة مما يلي:

1. $P(x)=mx^2-2mx-4m-2$ ، $\alpha=4$
2. $P(x)=2m^2x^4+mx-m$ ، $\alpha=-1$
3. $P(x)=-m^2x^3+m(2m-3)x^2+3x$ ، $\alpha=2$

◆ التمرين 03) ◆ الحل

عين في كل حالة قيم الأعداد الحقيقية a، b و c حتى يتساوا كثيرا الحدود P و Q:

1. $\begin{cases} P(x)=(x-1)(x+2) \\ Q(x)=ax^3+bx^2+x+c \end{cases}$
2. $\begin{cases} P(x)=x^2+2x-4 \\ Q(x)=\frac{a}{3}x^2+7bx-10c \end{cases}$
3. $\begin{cases} P(x)=2x^2+4x+5 \\ Q(x)=(ax+1)(2x+b)+c \end{cases}$
4. $\begin{cases} P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c) \\ Q(x)=x^3+3x^2+5x+3 \end{cases}$

◆ التمرين 04) ◆ الحل

بيّن أنّ α جذر لكثير الحدود P، ثم حلل $P(x)$ ، ثم عيّن كل جذوره، في كل مما يلي:

1. $P(x)=x^3+x^2-7x-3$ ، $\alpha=-3$
2. $P(x)=4x^3+4x^2-9x-9$ ، $\alpha=-1$
3. $P(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2+x-5$ ، $\alpha=2$
4. $P(x)=x^4-3x^2+2x$ ، $\alpha=1$

◆ التمرين 05) ◆ الحل

نعتبر المعادلة: $(E)\ldots ax^2+5x+\frac{6}{a}=0$، حيث: $\alpha\in\mathbb{R}^*$

1. بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2، لا يطلب تعيين الحلين، ثم بيّن أنهما من نفس الإشارة.
2. ناقش حسب إشارة a إشارة الحلين x_1 و x_2.
3. عيّن قيمة a إذا علمت أنّ $x_1+x_2=5$، ثم استنتج عندئذ الجداء x_1x_2

◆ التمرين 06) ◆ الحل

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية:

1. $3x^4-8x^2+4=0$
2. $-\frac{6x^2}{x^2-1}>\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}$
3. $2x-9\sqrt{x}+7=0$
4. $\sqrt{5x+2}=x+1$

الخليل للرياضيات

5. $\sqrt{1-2x} \geq \sqrt{x^2+1}$

6. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

7. $\frac{2}{x^2+3x+2} \leq \frac{1}{x+2}$

8. $\frac{9}{x^2} + 4x^2 - 12 \leq 0$

◆ **التمرين 07)** ◆ **الحل**

ليكن P كثير الحدود حيث:

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18$$

1. بيّن أنّ $\frac{3}{2}$ جذر لـ P

2. أوجد الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = (2x-3)(ax^2+bx+c)$

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

4. ادرس إشارة $P(x)$، ثم استنتج إشارة $P\left(\frac{2022}{2021}\right)$

5. عيّن حلول المتراجحة: $2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$

◆ **التمرين 08)** ◆ **الحل**

$\lambda \in \mathbb{R}$ ، نضع كثير الحدود P:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x + \lambda$$

1. عيّن قيمة λ حتى يكون -2 جذر لـ $P(x)$.

2. بأخذ $\lambda = -6$:

أ/ احسب $P(3)$، ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$

ب/ ادرس حسب قيم x إشارة $P(x)$، ثم استنتج حلول المتراجحة $P(x) < 0$.

ج/ عيّن حلول المعادلة $P(2-x) = 0$، ثم استنتج تحليلا لـ $P(2-x)$.

◆ **التمرين 09)** ◆ **الحل**

نعتبر كثير الحدود P: حيث $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = -2\alpha(x^4+3x^2-4) + 2x(x^4+3x^2-4)$$

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2x^4 + 6x^2 - 8 = 0$

2. عيّن درجة كثير الحدود P، ثم بيّن أن α جذر له.

3. عيّن كثير الحدود Q حيث: $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$

4. استنتج حلول المعادلة: $P(|x|-1) = 0$

◆ **التمرين 10)** ◆ **الحل**

ليكن P كثير الحدود المعرف على $\mathbb{R}$ بالعبارة التالية:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 3$$

1. احسب $P(1)$، ثم حلّل $P(x)$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$، ثم استنتج حلول المعادلة $x^6 + 2x^4 - 3 = 0$.

3. ادرس إشارة $P(x)$.

ثم استنتج حلول المتراجحة $P(x) < 0$

4. نضع:

$$Q(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{-2x^2 - 3x + 5}$$

أ/ عيّن قيم x حتى تكون العبارة $Q(x)$ معرّفة.

ب/ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $Q(x) \leq 0$

◆ **التمرين 11)** ◆ **الحل**

1. احسب $(1+\sqrt{3})$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(*)$ حيث:

$$-2x^2 + 2(1+\sqrt{3})x = \sqrt{3} \ldots (*)$$

3. استنتج حلول الجملة ذات المجهولين الحقيقيين a و b التالية:

$$\begin{cases} a+b = 1+\sqrt{3} \\ ab = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

◆ **التمرين 12)** ◆ **الحل**

P كثير حدود حيث: $P(x) = 4x^3 - 13x - 6$

1. بيّن أنّ P يقبل القسمة على $x + \frac{1}{2}$

2. جد كثير الحدود Q الذي يحقق $P(x) = (2x+1)Q(x)$

3. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$، ثم استنتج حلول المعادلة:

$$4x^2|x| - 13|x| - 6$$

4. ادرس إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$، ثم استنتج حلول المتراجحة:

$$\frac{P(x)}{4-x^2} \geq 0$$

◆ **التمرين 13)** ◆ **الحل**

P كثير حدود حيث: $P(x) = -x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x - 6$

1. احسب $P(2)$ و $P(-1)$، ثم حلل $P(x)$.

2. ادرس إشارة $P(x)$، ثم استنتج على $\mathbb{R}$ حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$

3. حل في $\mathbb{R}_+$ المتراجحة:

$$x^2 - x\sqrt{x} - 5x + 3\sqrt{x} + 6 \geq 0$$

4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية:

$$|x-1|^3 + 5(x-1)^2 = (x-1)^4 + 3|x-1| + 6$$

◆ **التمرين 14)** ◆ **الحل**

P_m كثير حدود و m وسيط حقيقي حيث:

$$P_m(x) = (m+1)x^3 + (m-1)x^2 - (m+2)x - m + 2$$

1. عيّن قيمة m حتى يكون 1 جذرا لـ P_m.

2. بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$P_m(x) = (x-1)[(m+1)x^2 + 2mx + m - 2]$$

الخليل للرياضيات

❸ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P_0(x) \geq 0$

❹ نضع: $Q_m = (m+1)x^2 + 2mx + m - 2$

أ/ عيّن قيم m التي تجعل $Q(x) < 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$

ب/ استنتج حلول المتراجحة $P_{-3}(x) \geq 0$

◆ **التمرين 15)** ◆ **الحل**

نعتبر المعادلة (E) حيث:

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \dots (E)$$

❶ تحقق أن 0 ليس حلا لـ (E).

❷ بيّن أنه اذا كان a حلا لـ (E) فإن $\frac{1}{a}$ أيضا حل لـ (E)

❸ اثبت أنّ (E) تكافئ المعادلة (E'):

$$x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \dots (E')$$

❹ بيّن أنّ (E') تكتب كما يلي:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

❺ استنتج حلول المعادلة (E).

◆ **التمرين 16)** ◆ **الحل**

نعتبر كثير الحدود P_m حيث:

$$P_m(x) = (2m-1)x^3 + (5m-5)x^2 + (4m-8)x + m - 4$$

❶ بيّن أنّ P_m يقبل القسمة على $x+1$ مهما كانت قيمة m.

❷ أوجد كثير الحدود Q_m الذي يحقق: $P_m(x) = (x+1)Q_m(x)$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة:

$$\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$$

❹ عين قيم m في كل حالة مما يلي:

أ/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول متمايزة.

ب/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.

ج/ المعادلة $P_m(x) = 0$ تقبل 3 حلول سالبة.

بالتوفيق

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل

2.

الحلول [حلول مقترحة]

◆ الحل 01) ◆ التمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$، ثم ادرس إشارة كثير الحدود P في كل حالة مما يلي:

❶ لدينا:

$$P(x)=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0$$
$$\Delta=4^2-4(1)(3)=4=\left(\sqrt{2}\right)^2>0$$
$$x=\frac{-4-2}{2}=-3 \text{ أو } x=\frac{-4+2}{2}=-2$$

إذن: $s=\{-3;-2\}$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$P(x)=0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

❷ لدينا:

$$P(x)=0 \Rightarrow 4x^2-x+1=0$$
$$\Delta=(-1)^2-4(4)(1)=-15<0$$

إذن: $s=\{\emptyset\}$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)=0$		$+$	

❸ لدينا:

$$P(x)=0 \Rightarrow -3x^2+x+1=0$$
$$\Delta=1^2-4(-3)(1)=13>0$$
$$x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2(-3)}=\frac{1+\sqrt{13}}{6} \text{ أو } x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2(-3)}=\frac{1-\sqrt{13}}{6}$$

إذن: $s=\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{6};\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❹ لدينا:

$$P(x)=0 \Rightarrow x^4+x^2-6=0$$

بوضع: $t=x^2$ نجد:

$$t^2+t-6=0$$

لدينا:

$$\Delta=1^2-4(1)(-6)=25=\left(\sqrt{5}\right)^2>0$$

إذن:

$$t=\frac{-1-5}{2(1)}=-3 \text{ أو } t=\frac{-1+5}{2(1)}=2$$

لدينا: $t=-3<0$ (مرفوض) ومنه:

$$x^2=t \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$$

إذن: $s=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$P(x)=0$		$+$	0	$-$	0	$+$	

❺ لدينا:

$$P(x)=0 \Rightarrow x^2-6x+2=0$$
$$\Delta=(-6)^2-4(1)(2)=28=\left(2\sqrt{7}\right)^2>0$$
$$x=\frac{-(-6)-2\sqrt{7}}{2(1)}=3-\sqrt{7}$$

الخليل للرياضيات

أو

$$x=\frac{-(-6)+2\sqrt{7}}{2(1)}=3+\sqrt{7}$$

إذن: $s=\{(3-\sqrt{7});(3+\sqrt{7})\}$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$(3-\sqrt{7})$		$(3+\sqrt{7})$	$+\infty$
$P(x)=0$	$+$	0	$-$	0	$+$

❻ لدينا:

$$P(x)=0\Rightarrow x^4+3x^2+4=0$$

بوضع: $t=x^2$ نجد:

$$\Rightarrow t^2+3t+4=0$$

$$\Delta=3^2-4(1)(4)=-5<0$$

إذن: $s=\{\emptyset\}$

إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)=0$	$+$	

◆ الحل 02) ◆ التمرين

❶ $P(x)=mx^2-2mx-4m-2$ ، $\alpha=4$

$$P(\alpha)=0\Rightarrow P(4)=0$$
$$\Rightarrow m4^2-2m4-4m-2=0$$
$$\Rightarrow 4m-2=0$$
$$\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

إذن قيم m حتى يكون α جذر لـ $P(x)$ هي $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

❷ $P(x)=2m^2x^4+mx-m$ ، $\alpha=-1$

$$P(\alpha)=0\Rightarrow P(-1)=0$$
$$\Rightarrow 2m^2(-1)^4+m(-1)-m=0$$
$$\Rightarrow 2m^2-2m=0$$
$$\Rightarrow 2m(m-1)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2m=0 \\ \text{أو} \\ m-1=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ \text{أو} \\ m=1 \end{cases}$$

إذن قيم m حتى يكون α جذر لـ $P(x)$ هي $\{0;1\}$

❸ $P(x)=-m^2x^3+m(2m-3)x^2+3x$ ، $\alpha=2$

$$P(\alpha)=0$$
$$\Rightarrow P(2)=0\text{l}$$
$$\Rightarrow -m^2(2)^3+m(2m-3)(2)^2+3(2)=0$$
$$\Rightarrow -8m^2+8m^2-12m+6=0$$
$$\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

إذن قيم m حتى يكون α جذر لـ $P(x)$ هي $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

◆ الحل 03) ◆ التمرين

❶
$$\begin{cases} P(x)=(x-1)(x+2) \\ Q(x)=ax^3+bx^2+x+c \end{cases}$$
$$P(x)=Q(x)$$
$$\Rightarrow (x-1)(x+2)=ax^3+bx^2+x+c$$
$$\Rightarrow x^2+x-2=ax^3+bx^2+x+c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$

❷
$$\begin{cases} P(x)=x^2+2x-4 \\ Q(x)=\frac{a}{3}x^2+7bx-10c \end{cases}$$

$$P(x)=Q(x)\Rightarrow x^2+2x-4=\frac{a}{3}x^2+7bx-10c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} \frac{a}{3}=1 \\ 7b=2 \\ -10c=-4 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=3 \\ b=\frac{2}{7} \\ c=\frac{2}{5} \end{cases}$

❸
$$\begin{cases} P(x)=2x^2+4x+5 \\ Q(x)=(ax+1)(2x+b)+c \end{cases}$$

$$P(x)=\text{l}Q(x)$$
$$\Rightarrow 2x^2+4x+5=(ax+l1)(2x+b)+c$$
$$\Rightarrow 2x^2+4x+5=2ax^2+abx+2x+b+c$$
$$\Rightarrow 2x^2+4x+5=2ax^2+(ab+2)x+b+c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} 2a=2 \\ ab+2=4 \\ b+c=5 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$

❹
$$\begin{cases} P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c) \\ Q(x)=x^3+3x^2+5x+3 \end{cases}$$

$$P(x)=Q(x)$$
$$\Rightarrow (x+1)(ax^2+bx+c)=x^3+3x^2+5x+3$$
$$\Rightarrow ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c=x^3+3x^2+5x+3$$
$$\Rightarrow ax^3+(a+b)x^2+(c+b)x+c=x^3+3x^2+5x+3$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a=1 \\ a+b=3 \\ b+c=5 \\ c=3 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$

◆ الحل 04) ◆ التمرين

❶ $P(x)=x^3+x^2-7x-3$ ، $\alpha=-3$

لدينا: $P(-3)=(-3)^3+(-3)-7(-3)-3=0$

ومنه: $P(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$

باستعمال **جدول هورنر** نجد:

	1	1	−7	−3
−3	0	−3	6	3
	1	−2	−1	0

إذن: $P(x)=(x+3)(x^2+2x-1)$

❷ $P(x)=4x^3+4x^2-9x-9$ ، $\alpha=-1$

لدينا:

$$P(-1)=4(-1)^3+4(-1)^2-9(-1)-9=0$$

الخليل للرياضيات

باستعمال **طريقة التحليل** لدينا:

$$\begin{aligned}P(x) &= 4x^3+4x^2-9x-9\\ &= 4x(x+1)-9(x+1)\\ &= (x+1)(4x-9)\end{aligned}$$

❸ $P(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2+x-5$ ، $\alpha=2$

لدينا: $P(2)=\frac{1}{2}(2)^3-\frac{1}{4}(2)^2+(2)-5=0$

ومنه:

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-2)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c\\ &= ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c\end{aligned}$$

باستعمال **طريقة المطابقة**

نجد: $a=\frac{1}{2}$ ، $b-2a=-\frac{1}{4}$ ، $\begin{cases}c-2b=1\\-2c=-5\end{cases}$

ومنه: $a=\frac{1}{2}$ ، $b=\frac{3}{4}$ ، $c=\frac{5}{2}$

إذن:

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-2)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}(x-2)(2x^2+3x+10)\end{aligned}$$

❹ $P(x)=x^4-3x^2+2x$ ، $\alpha=1$

لدينا: $P(1)=1^4-3(1)+2(1)=0$

ومنه: $P(x)=(x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)$

باستعمال **القسمة الاقليدية** نجد:

x^4		$-3x^2$	$+2x$	$x-1$
$-\ x^4$	$-x^3$			x^3+x^2-2x
$=\ 0$	x^3	$-3x^2$	$+2x$	
$-$	x^3	$-x^2$		
$=$	0	$-2x^2$	$+2x$	
	$-$	$-2x^2$	$2x$	
	$=$		0	

إذن:

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-1)(x^3+x^2-2x)\\ &= x(x-1)(x^2+x-2)\\ &= x(x-1)(x-1)(x+2)\\ &= x(x+2)(x-1)^2\end{aligned}$$

◆ الحل 05) ◆ التمرين

❶ تبيين أنّ المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين x_1 و x_2:

لدينا: $\Delta=5^2-4(a)\left(\frac{6}{a}\right)=1>0$

إذن: المعادلة تقبل حلين متمايزين.

لدينا: $x_1=\frac{-5-1}{2a}=\frac{-6}{2a}$ و $x_2=\frac{-5+1}{2a}=\frac{-4}{2a}$

إذن: الحلين من نفس الإشارة

❷ مناقشة حسب إشارة a إشارة الحلين x_1 و x_2:

إشارة الحلين عكس إشارة a:

أي لما $a>0$ الحلين سالبين، ولما $a<0$ الحلين موجبين

❸ تعيين قيمة a إذا علمنا أنّ $x_1+x_2=5$:

$$\begin{aligned}x_1+x_2=5 &\Rightarrow \frac{-4}{2a}+\frac{-6}{2a}=5\\ &\Rightarrow \frac{-10}{2a}=5\\ &\Rightarrow a=-1\end{aligned}$$

- استنتاج الجداء x_1x_2:

لدينا: $x_1x_2=\frac{c}{a}$

ومنه: $x_1x_2=\frac{\frac{6}{-1}}{-1}$

إذن: $x_1x_2=6$

◆ الحل 06) ◆ التمرين

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات التالية:

❶ $3x^4-8x^2+4=0$

نضع: $t=x^2$ نجد: $3t^2-8t+4=0$

لدينا: $\Delta=16$ ، ومنه:

$$t=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2(3)}=2 \text{ أو } t=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2(3)}=\frac{2}{3}$$

لدينا: $x^2=t$ ومنه: $x^2=\begin{cases}2\\ \text{أو}\\ \frac{2}{3}\end{cases}$

$$x=\sqrt{2} \text{ أو } x=-\sqrt{2}$$

أو

ومنه: $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ أو $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

إذن: $s=\left\{-\sqrt{2};-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{2}\right\}$

❷ $-\frac{6x^2}{x^2-1}>\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}$

$$\begin{aligned}&-\frac{6x^2}{x^2-1}>\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}\\ &\Rightarrow -\frac{6x^2}{x^2-1}-\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}>0\\ &\Rightarrow -\frac{6x^2}{(x-1)(x+1)}+\frac{-3(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}>0\\ &\Rightarrow \frac{-6x^2-3x-3-2x+2}{(x-1)(x+1)}>0\\ &\Rightarrow \frac{-6x^2-5x-1}{(x-1)(x+1)}>0\\ &\Rightarrow -\frac{6x^2+5x+1}{(x-1)(x+1)}>0\end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

$$\Rightarrow \frac{6x^2+5x+1}{(x-1)(x+1)} < 0$$

نحلل: $6x^2+5x+1$

لدينا: $\Delta = 1$

ومنه: $x = -\frac{1}{3}$ أو $x = -\frac{1}{2}$

إذن: $6x^2+5x+1 = 6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

ومنه:

x	$-\infty$	-1		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-1}{3}$		1	$+\infty$
$6x^2+5x+1$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1	$+$	$-$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{6x^2+5x+1}{x^2-1}$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

إذن: $s = \left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{3};1\right[$

❸ $2x-9\sqrt{x}+7=0$

نضع: $t=\sqrt{x}$ نجد: $2t^2-9t+7=0$

لدينا: $\Delta = 25$ ومنه:

$$t=\frac{9-\sqrt{25}}{2(2)}=1 \text{ أو } t=\frac{9+\sqrt{25}}{2(2)}=\frac{7}{2}$$

لدينا: $\sqrt{x}=t$

ومنه: $\sqrt{x}=\begin{cases}1\\ \text{أو}\\ \frac{7}{2}\end{cases}$ إذن: $x=\begin{cases}1\\ \text{أو}\\ \frac{49}{4}\end{cases}$

إذن:

$$s=\left\{1;\frac{49}{4}\right\}$$

❹ $\sqrt{5x+2}=x+1$

$$\sqrt{5x+2}=x+1$$
$$\Rightarrow 5x+2=(x+1)^2$$
$$\Rightarrow 5x+2=x^2+2x+1$$
$$\Rightarrow x^2-3x-1=0$$

لدينا: $\Delta = 13$، ومنه: $x=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ أو $x=$

$\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$

إذن:

$$s=\left\{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2};\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right\}$$

❺ $\sqrt{1-2x}\geq\sqrt{x^2+1}$

$$\sqrt{1-2x}\geq\sqrt{x^2+1}$$
$$\Rightarrow 1-2x\geq x^2+1$$
$$\Rightarrow x^2+2x\leq 0$$
$$\Rightarrow x(x+2)\leq 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0 $+$

إذن: $s=[-2;0]$

❻ $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2+x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2[(x+1)^2+x(x-1)]=1[(x-1)(x+1)]$$
$$\Rightarrow 2(x^2+2x+1+x^2-x)=x^2-1$$
$$\Rightarrow 2(2x^2+x+1)=x^2-1$$
$$\Rightarrow 3x^2+2x+3=0$$

لدينا: $\Delta'=b'-ac=1-3\times 3=-8<0$

إذن المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

◆ التمرين (07) الحل ◆

❶ تبيين أنّ $\frac{3}{2}$ جذر لـ P:

$$P\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-13\left(\frac{3}{2}\right)^2+27\left(\frac{3}{2}\right)-18$$
$$=2\frac{27}{8}-13\frac{9}{4}+27\frac{3}{2}-18=0$$

❷ ايجاد الأعداد الحقيقية a، b و c :

$$P(x)=(2x-3)(ax^2+bx+c)$$
$$\Rightarrow P(x)=2ax^3+2bx^2+2cx-3ax^2-3bx-3c$$
$$\Rightarrow P(x)=2ax^3+(2b-3a)x^2+(2c-3b)x-3c$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}2a=2\\ 2b-3a=-13\\ 2c-3b=27\\ -3c=-18\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}a=1\\ b=-5\\ c=6\end{cases}$

إذن: $P(x)=(2x-3)(x^2-5x+6)$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$:

$$P(x)=0 \Rightarrow \begin{cases}2x-3=0\\ x^2-5x+6=0\end{cases}$$

- لدينا: $2x-3=0$ معناه $x=\frac{3}{2}$
- نحل المعادلة $x^2-5x+6=0$:

لدينا: $\Delta = 1$

ومنه: $x=2$ أو $x=3$

إذن:

$$s=\left\{\frac{3}{2};2;3\right\}$$

❹ دراسة إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		3	$+\infty$
$2x-3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

الخليل للرياضيات

- استنتاج إشارة $P\left(\frac{2022}{2021}\right)$:

لدينا: $\frac{2022}{2021} \approx 1$ إذن $P\left(\frac{2022}{2021}\right) < 0$

❺ تعيين حلول المتراجحة: $2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$:

$$2x - 13 < -\frac{27}{x} + \frac{18}{x^2}$$
$$\Rightarrow 2x^3 - 13x^2 < -27x + 18$$
$$\Rightarrow P(x) < 0$$

إذن:

$$s = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[\cup \left]2; 3\right[$$

◆ الحل 08) ◆ التمرين

❶ تعيين قيمة λ حتى يكون (-2) جذر لـ $P(x)$:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow 3(-8) - 2(4) - 19(-2) + \lambda = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = -6$$

❷ بأخذ $\lambda = -6$:

أ/ حساب $P(3)$:

$$P(3) = 0$$

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

لدينا:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$$
$$= (x-3)(x+2)(ax+b)$$
$$= (x^2 - x - 6)(ax+b)$$
$$= ax^3 - ax^2 - 6ax + bx^2 - bx - 6b$$
$$= ax^3 + (b-a)x^2 - (6a+b) - 6b$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 3 \\ b - a = -2 \\ -6a - b = -19 \\ -6b = -6 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$

إذن:

$$P(x) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2)(3x+1) = 0$$

لدينا: $3x + 1 = 0$ أي $x = -\frac{1}{3}$

إذن: $s = \left\{-2; -\frac{1}{3}; 3\right\}$

ب/ دراسة حسب قيم x إشارة $P(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- استنتاج حلول المتراجحة $P(x) < 0$:

من جدول الإشارة

لدينا: مجموعة حلول المعادلة $P(x) < 0$ هي:

$$s = \left]-\infty; -2\right[\cup \left]-\frac{1}{3}; 3\right[$$

ج/ تعيين حلول المعادلة $P(2-x) = 0$:

لدينا حلول المعادلة $P(x) = 0$ هي: $s = \left\{-2; -\frac{1}{3}; 3\right\}$

ومنه: $-x = \begin{cases} -4 \\ \frac{-7}{3} \\ 1 \end{cases}$ أي: $2 - x = \begin{cases} -2 \\ \frac{-1}{3} \\ 3 \end{cases}$

ومنه: $x = \begin{cases} 4 \\ \frac{7}{3} \\ -1 \end{cases}$ إذن: $s = \left\{-1; \frac{7}{4}; 4\right\}$

- استنتاج تحليلا لـ $P(2-x)$:

$$P(2-x) = (x+1)\left(x - \frac{7}{4}\right)(x-4)$$

◆ الحل 09) ◆ التمرين

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2x^4 + 6x^2 - 8 = 0$:

نضع: $x^2 = t$

نجد: $2t^2 + 6t - 8 = 0$

لدينا: $\Delta = 100$

ومنه: $t = 1$ أو $t = -4$

لدينا: $t = -4$ (مرفوض) لأنّ $-4 < 0$

لدينا: $x^2 = t$

ومنه: $x^2 = 1$

إذن: $x = 1$ أو $x = -1$

إذن: $s = \{-1; 1\}$

❷ تعيين درجة كثير الحدود P:

لدينا:

$$P(x) = -2\alpha(x^4 + 3x^2 - 4) + 2x(x^4 + 3x^2 - 4)$$
$$= -2\alpha x^4 - 6\alpha x^2 + 8\alpha + 2x^5 + 6x^3 - 8x$$

إذن درجة P هي 5

- تبيين أن α جذر له:

$$P(\alpha) = -2\alpha(\alpha^4 + 3\alpha^2 - 4) + 2\alpha(\alpha^4 + 3\alpha^2 - 4)$$
$$= 0$$

إذن α جذر لـ P

❸ تعيين كثير الحدود Q حيث: $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$:

بما أنّ α جذر لـ P، فإنه:

$$P(x) = (x-\alpha)(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$$

باستعمال جدول هورنر لدينا:

	2	-2α	6	-6α	-8	8α
α	0	2α	0	6α	0	-8α
	2	0	6	0	-8	0

إذن: $P(x) = (x-\alpha)(2x^4 + 6x^2 - 8)$

الخليل للرياضيات

❹ استنتج حلول المعادلة: $P(|x|-1)=0$:

لدينا حلول المعادلة $P(x)=0$ هي: $\{\alpha;-1;1\}$

ومنه: $|x|-1=\begin{cases}\alpha\\-1\\1\end{cases}$

ومنه: $|x|=\begin{cases}\alpha+1\\0\\2\end{cases}$

إذن: $x\in\{\alpha+1;-\alpha-1;0;2;-2\}$

◆ الحل 10) ◆ التمرين

❶ حساب $P(1)$:

$$P(1)=1^3+2(1)^2-3=0$$

- تحليل $P(x)$:

1 جذر لـ P إذن: $P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$

ومنه: $P(x)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\b-a=2\\c-b=0\\-c=-3\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=3\\c=3\end{cases}$

إذن: $P(x)=(x-1)(x^2+3x+3)$

❷ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$:

لدينا: $P(x)=0$

معناه: $x-1=0$ أو $x^2+3x+3=0$

نحل المعادلة $x^2+3x+3=0$ باستعمال المميز

لدينا: $\Delta=-3<0$

إذن: المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$

وعليه مجموعة حلول المعادلة $P(x)=0$ هي: $s=\{1\}$

- استنتاج حلول المعادلة $x^6+2x^4-3=0$:

نضع: $x^2=t$ نجد: $t^3+2t^2-3=0$

ومنه: $x^2=1$ أي: $x=1$ أو $x=-1$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $s=\{-1;1\}$

❸ دراسة إشارة $P(x)$:

لدينا: $1x^2+3x+3>0$ لأنّ $\Delta<0$ و $1>0$

ومنه: إشارة $P(x)$ من إشارة $(x-1)$

لدينا: $x-1=0$ معناه: $x=1$

وعليه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$

- استنتاج حلول المتراجحة $P(x)<0$:

حلول المتراجحة $P(x)<0$ هي $s=]-\infty;1[$

❹

أ/ تعيين قيم x حتى تكون العبارة $Q(x)$ معرّفة:

لدينا: $-2x^2-3x+5\neq 0$

نستعمل المميز لحل المعادلة

لدينا: $\Delta=49$

ومنه: $x_1=\frac{-5}{2}$ و $x_2=1$

إذن: $Q(x)$ معرفة لما:

$$x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{2};1\right\}$$

ب/ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $Q(x)\leq 0$:

لدينا:

$$Q(x)=\frac{P(x)}{-2x^2-3x+5}=\frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{-2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)}=\frac{x^2+3x+3}{-(2x+5)}$$

لدينا سابقا: $x^2+3x+3>0$

ومنه إشارة $Q(x)$ من إشارة المقام

لدينا: $-(2x+5)=0$

معناه: $x=-\frac{5}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{-5}{2}$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	‖	$-$

إذن حلول المتراجحة هي: $s=\left]-\frac{5}{2};+\infty\right[$

◆ الحل 11) ◆ التمرين

❶ حساب $(1+\sqrt{3})$:

$$(1+\sqrt{3})=1+3+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$$

❷ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(*)$:

لدينا: $(*)$ تكافئ $-2x^2+2(1+\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$

ومنه:

لدينا: $\Delta=4(4+2\sqrt{3})-4(-2)(-\sqrt{3})$

ومنه: $\Delta=16+8\sqrt{3}-8\sqrt{3}$

إذن: $\Delta=16>0$

ومنه:

$$x_1=\frac{-2(1+\sqrt{3})+\sqrt{16}}{2(-2)}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-4}=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=\frac{-2(1+\sqrt{3})-\sqrt{16}}{2(-2)}=\frac{-6-2\sqrt{3}}{-4}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن:

$$s=\left\{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

الخليل للرياضيات

❸ استنتاج حلول الجملة ذات المجهولين الحقيقين a و b :

نسمي a و b حلي المعادلة $(*)$ فيكون لدينا:

$$\begin{cases} s = a + b = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3} \\ p = ab = \left(\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

بما أنّ a و b حلين للمعادلة $(*)$ يمكن كتابتها على الشكل:

$$x^2 - sx + p = 0$$

أي:

$$x^2 - (1+\sqrt{3})x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

بالضرب في (-2) نجد:

$$-2x^2 + 2(1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$

أي:

$$-2x^2 + 2(1+\sqrt{3})x - \sqrt{3} \dots (*)$$

إذن حلي الجملة هما حلي المعادلة $(*)$

◆ الحل 12) ◆ التمرين

❶ تبيين أنّ P يقبل القسمة على $x + \frac{1}{2}$:

	$4x^3$	$-13x$	-6	$x + \frac{1}{2}$
$-$	$4x^3$ $+2x^2$	$\vdots$	$\vdots$	$4x^2 - 2x - 12$
$=$	0 $-2x^2$	$-13x$	-6	
	$-$ $-2x^2$	$-x$	$\vdots$	
	$=$ 0	$-12x$	-6	
		$-12x$	-6	
		$=$ 0		

الباقي 0 ، إذن P يقبل القسمة على $x + \frac{1}{2}$

❷ إيجاد كثير الحدود Q الذي يحقق $P(x) = (2x+1)Q(x)$:

من حل السؤال الأول نجد أنّ:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 2x - 12) \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)2(2x^2 - x - 6) \\ &= (2x+1)(2x^2 - x - 6) \end{aligned}$$

إذن: $Q(x) = 2x^2 - x - 6$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

• لدينا: $P(x) = 0$

معناه: $(2x+1)(2x^2 - x - 6) = 0$

أي: $2x + 1 = 0$ أو $2x^2 - x - 6 = 0$

أي: $x = \frac{-1}{2}$ أو $2x^2 - x - 6 = 0$

• نحل المعادلة: $2x^2 - x - 6 = 0$

لدينا: $\Delta = 49$

ومنه: $x = -\frac{3}{2}$ أو $x = 2$

إذن:

$$s = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right\}$$

وعليه يمكن كتابة $P(x)$ على الشكل:

$$P(x) = (2x+1)(2x+3)(x-2)$$

- استنتاج حلول المعادلة: $4x^2|x| - 13|x| - 6 = 0$:

لدينا: $x \in \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right\}$ إذن: $|x| \in \{2\}$

وعليه حلول المعادلة $4x^2|x| - 13|x| - 6 = 0$ هي:

$$s = \{-2; 2\}$$

❹ دراسة إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$	$-$	$-$	0	$+$					$+$
$2x^2 - x - 6$	$+$	0		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0		$+$	

- استنتاج حلول المتراجحة $\frac{P(x)}{4-x^2} \geq 0$:

$$\frac{P(x)}{4-x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+1)(2x+3)(x-2)}{(2-x)(2+x)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-(2x+1)(2x+3)(2-x)}{(2-x)(2+x)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+1)(2x+3)}{-x-2} \geq 0$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$	$-$	$-$		$-$		0	$+$		
$2x+3$	$-$	$-$	0	$+$				$+$	
$-x-2$	$+$	$-$		$-$				$-$	
$\frac{P(x)}{4-x^2}$	$+$	$-$	0	$+$	0			$-$	

إذن حلول المتراجحة هي:

$$s =]-\infty; 2[\cup \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$$

◆ الحل 13) ◆ التمرين

❶ حساب $P(2)$ و $P(-1)$

$$P(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + 5(-1)^2 - 3(-1) - 6 = 0$$
$$P(2) = -(2)^4 + (2)^3 + 5(2)^2 - 3(2) - 6 = 0$$

- تحليل $P(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x+1)(ax^2 + bx + c) \\ &= (x^2 - x - 2)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &= ax^4 + (b-a)x^3 + (c - 2a - b)x^2 + (-c - 2b)x - 2c \end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

بعد المطابقة والتبسيط نجد: $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \\ c=3 \end{cases}$

أي: $P(x)=(x-2)(x+1)(-x^2+3)$

نحل المعادلة $-x^2+3=0$:

لدينا: $-x^2=-3$

معناه: $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

إذن: $P(x)=(x-2)(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

❷ دراسة إشارة $P(x)$:

نضع: $\begin{cases} -x^2+3=0 \dots (*) \\ (x-2)(x+1) \dots (**) \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$*$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$**$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

- استنتج حلول المتراجحة $P(x) \geq 0$:

من جدول الإشارة نجد حلول التراجحة $P(x) \geq 0$ هي:

$s=[-\sqrt{3};-1] \cup [\sqrt{3};2]$

❸ حل في $\mathbb{R}_+$ المتراجحة:

$x^2-x\sqrt{x}-5x+3\sqrt{x}+6 \geq 0$

المعادلة: $x^2-x\sqrt{x}-5x+3\sqrt{x}+6 \geq 0$

تكافئ: $-x^2+x\sqrt{x}+5x-3\sqrt{x}-6 \leq 0$

نضع: $\sqrt{x}=t$ أي: $x=t^2$

نجد: $-(t^2)^2+t^2t+5t^2-3t-6 \leq 0$

أي: $-t^4+t^3+5t^2-3t-6 \leq 0$

أي: $P(t) \leq 0$

ومنه: $t \in]0;\sqrt{3}] \cup [2;+\infty[$

إذن: $x \in]0;3] \cup [4;+\infty[$

❹ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

نضع: $t=x-1$ أي: $x=t+1$

نجد $|t|^3+5t^2=t^4+3|t|+6$

المعادلة: $|t|^3+5t^2=t^4+3|t|+6$

تكافئ: $\begin{cases} t^3+5t^2=t^4+3t+6 \ ; \ t \geq 0 \\ -t^3+5t^2=t^4+3t+6 \ ; \ t \leq 0 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} -t^4+t^3+5t^2-3t-6=0 \ ; \ t \geq 0 \\ -t^4-t^3+5t^2+3t-6=0 \ ; \ t \leq 0 \end{cases}$

أي:

$\begin{cases} -t^4+t^3+5t^2-3t-6=0 \ ; \ t \geq 0 \\ -(-t)^4+(-t)^3+5(-t)^2-3(-t)-6=0 \ ; \ t \leq 0 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} P(t)=0 \ ; \ t \geq 0 \\ P(-t)=0 \ ; \ t \leq 0 \end{cases}$

إذن: $t \in [-2;-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};2]$

وعليه: $x \in [-1;-\sqrt{3}+1] \cup [\sqrt{3}+1;3]$

◆ الحل 14) ◆ التمرين

❶ تعيين قيم m حتى يكون 1 جذرا لـ P_m:

لدينا: $P_m(1)=0$

معناه: $(m+1)+(m-1)-(m+2)-m+2=0$

إذن: $0=0$

وعليه: $m \in \mathbb{R}$

❷ التبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$P_m(x)=(x-1)[(m+1)x^2+2mx+m-2]$

لدينا: $P_m(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$

باستعمال جدول هورنر نجد:

		$m+1$	$m-1$	$-(m+2)$	$-m+2$
	1	0	$m+1$	$2m$	$m-2$
		$m+1$	$2m$	$m-2$	0

إذن:

$P_m(x)=(x-1)[(m+1)x^2+2mx+m-2]$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P_0(x) \geq 0$:

لدينا: $P_0(x) \geq 0$

معناه: $(x-1)(x^2-2) \geq 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
P_0		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: $s=[-\sqrt{2};1] \cup [\sqrt{2};+\infty[$

❹

أ/ تعيين قيم m التي تجعل $Q(x)<0$ لكل $x \in \mathbb{R}$:

لدينا: $Q(x)<0$

معناه: $\Delta<0$

أي: $4m^2-4(m+1)(m-2)<0$

أي: $4(m+2)<0$

ومنه: $m<-2$

إذن: $m \in]-\infty;-2[$

ب/ استنتاج حلول المتراجحة $P_{-3}(x) \geq 0$

لدينا: $-3<-2$

إذن: $s=\{\emptyset\}$

◆ الحل 15) ◆ التمرين

❶ التحقق أن 0 ليس حلا لـ (E):

$0^4-0x^3+2(0)^2-4(0)+1=0$

$1=0$

وهذا مستحيل، إذن 0 ليس حلا لـ (E)

الخليل للرياضيات

❷ اثبات أنّ (E) تكافئ المعادلة (E'):

لدينا: $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

نخرج x^2 كعامل مشترك

نجد: $x^2\left(x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

أي: $x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

وهو المطلوب

❸ تبيين أنّ (E') تكتب كما يلي:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

لدينا: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

معناه: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 4x - \frac{4}{x} = 0$

وهو المطلوب

❹ استنتاج حلول المعادلة (E):

لدينا: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

تكافئ: $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x} - 4\right) = 0$

إذن: $x + \frac{1}{x} = 0$ أو $x + \frac{1}{x} - 4 = 0$

لدينا: $x + \frac{1}{x} = 0$

معناه: $\frac{x^2+1}{x} = 0$

أي: $x^2 + 1 = 0$ وهذا مستحيل

ولدينا: $x + \frac{1}{x} - 4 = 0$

معناه: $x^2 + 1 - 4x = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز Δ

لدينا: $\Delta = 12$

ومنه: $x = 2 + \sqrt{3}$ أو $x = 2 - \sqrt{3}$

إذن حلول المعادلة (E) هي:

$$s = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$$

◆ الحل 16) ◆ التمرين

نعتبر كثير الحدود P_m حيث:

$$P_m(x) = (2m-1)x^3 + (5m-5)x^2 + (4m-8)x + m - 4$$

❶ تبيين أنّ P_m يقبل القسمة على $x + 1$ مهما كانت قيمة m:

نستعمل القسمة الاقليدية:

	$(2m-1)x^3$	$+(5m-5)x^2$	$+(4m-8)x$	$+m-4$	$x+1$
$-$	$(2m-1)x^3$	$+(2m-1)x^2$			$(2m-1)x^2 + (3m-4)x + (m-4)$
$=$	0	$+(3m-4)x^2$	$+(4m-8)x$	$+m-4$	
	$-$	$(3m-4)x^2$	$+(3m-4)x$		
	$=$	0	$(m-4)x$	$+m-4$	
		$-$	$(m-4)x$	$(m-4)$	
		$=$	0		

الباقي 0 إذن P_m يقبل القسمة على $x + 1$ مهما كانت قيمة m

❷ ايجاد كثير الحدود Q_m :

من القسمة الاقليدية وجدنا أنّ:

$$Q_m(x) = (2m-1)x^2 + (3m-4)x + (m-4)$$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

لدينا: $\frac{P_4(x)}{P_1(x)} \geq 0$

تكافئ: $\frac{7x^3+15x^2+8x}{x^3-4x-3} \geq 0$

ومنه: $\frac{x(7x^2+15x+8)}{x^3-4x-3} \geq 0$

• نحلل $(7x^2 + 15x + 8)$

لدينا: $\Delta = 1$

ومنه: $x = -1$ أو $x = -\frac{8}{7}$

ومنه: $7x^2 + 15x + 8 = 7(x+1)\left(x + \frac{8}{7}\right)$

إذن: $7x^2 + 15x + 8 = (x+1)(7x+8)$

• نلاحظ أنّ -1 جذر لـ $x^3 - 4x - 3$

إذن: $x^3 - 4x - 3 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$

بعد النشر والمطابقة

نجد أنّ: $x^3 - 4x - 3 = (x+1)(x^2 - x - 3)$

نحلل: $(x^2 - x - 3)$

لدينا: $\Delta = 13$

ومنه: $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ أو $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

إذن:

$$x^3 - 4x - 3 = (x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)$$

إذن: $\frac{x(7x^2+15x+8)}{x^3-4x-3} \geq 0$

تكافئ: $\frac{x(x+1)(7x+8)}{(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)} \geq 0$

أي: $\frac{x(7x+8)}{\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)} \geq 0$

ومنه جدول الإشارة:

نضع:

$x(7x+8) \ldots (*)$

$\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \ldots (**)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{-8}{7}$		0		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$		$+\infty$
$*$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$**$		$+$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{P_4(x)}{P_1(x)}$		$+$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

إذن:

$$s = \left]-\infty; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left[-\frac{8}{7}; 0\right] \cup \left]\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right[$$

الخليل للرياضيات

❹ تعيين قيم m في كل حالة مما يلي:

أ/ المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل 3 حلول متمايزة:

لدينا:

$$P_m(x)=(2m-1)x^3+(5m-5)x^2+(4m-8)x+m-4$$
$$=(x+1)Q(x)$$
$$=(x+1)[(2m-1)x^2+(3m-4)x+(m-4)]$$

المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل 3 حلول متمايزة

معناه المعادلة $Q(x)=0$ تقبل حلين

أي: $\Delta>0$

أي: $(3m-4)^2-4(2m-1)(m-4)>0$

أي: $m^2+12m>0$

أي: $m(m+12)>0$

x	$-\infty$		-12		0		$+\infty$
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$		

إذن: $s=\ ]-\infty;-12[\cup\ ]0;+\infty[$

ب/ المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا:

المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

معناه المعادلة $Q(x)=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

أي: $\Delta<0$

إذن: $s=\ ]-12;0[$

ج/ المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل 3 حلول سالبة تماما:

المعادلة $P_m(x)=0$ تقبل 3 حلول سالبة تماما

معناه المعادلة $Q(x)=0$ تقبل حلين سالبين تماما

أي: $\Delta>0$ و $\frac{m-4}{2m-1}>0$ و $\frac{-(3m-4)}{2m-1}<0$

أي: $\Delta>0$ و $\frac{m-4}{2m-1}>0$ و $\frac{3m-4}{2m-1}>0$

لدينا: $\Delta>0$

لما: $m\in\ ]-\infty;-12[\cup\ ]0;+\infty[\ \ldots(1)$

ولدينا: $\frac{m-4}{2m-1}>0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$m-4$	$-$		$-$	0	$+$		
$2m-1$	$-$	0	$+$		$+$		
$\frac{m-4}{2m-1}$	$+$		$-$	0	$+$		

لما: $m\in\ ]-\infty;\frac{1}{2}[\cup\ ]4;+\infty[\ \ldots(2)$

ولدينا: $\frac{3m-4}{2m-1}>0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3m-4$	$-$		$-$	0	$+$		
$2m-1$	$-$	0	$+$		$+$		
$\frac{m-4}{2m-1}$	$+$		$-$	0	$+$		

لما: $m\in\ ]-\infty;\frac{1}{2}[\cup\ ]\frac{4}{3};+\infty[\ \ldots(3)$

تقاطع المجالات (1) و (2) و (3) هو:

$$m\in\ ]-\infty;-12[\cup\ ]4;+\infty[$$

بالتوفيق

❤ لا تنسونا من صالح دعائكم ❤

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل