تطبيق:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـ $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ و $g(x)=\frac{1}{x}-1$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f وكذا D_g مجموعة تعريف الدالة g.

2) اكتب كل من الدالتين f و g على شكل مركب دالتين يطلب تعيينهما.

3) عرّف الدالتين $f\circ g$ ، $g\circ f$

$f\circ g$ هي الدالة المعرفة على
$$D_{f\circ g}=\left\{x; g(x)\in D_f \text{ و } x\in D_g\right\}$$
بالعبارة:
$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$$

الحل:

(1

• f معرفة إذا كان: $x^2-x\geq 0$ ، معناه $x(x-1)\geq 0$

معناه: $\begin{cases} x\geq 0 \\ \text{أو} \\ x-1\geq 0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x\geq 0 \\ \text{أو} \\ x\geq 1\end{cases}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0 $+$		$+$
$x(x-1)$	$+$	0 $-$	0	$+$

إذن $D_f=\ ]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

• g معرفة إذا كان $x\neq 0$ ومنه: $D_g=\mathbb{R}^*$

(2

• نضع $\begin{cases}u(x)=x^2-x\\ v(x)=\sqrt{x}\end{cases}$ ومنه: $(v\circ u)(x)=v[u(x)]=v(x^2-x)=\sqrt{x^2-x}=f(x)$

• نضع $\begin{cases}u(x)=x-1\\ v(x)=\frac{1}{x}\end{cases}$ ومنه: $(u\circ v)(x)=u[v(x)]=u\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-1=g(x)$

(3

تعريف $f\circ g$:

$$\begin{aligned}D_{f\circ g}&=\left\{x;\ x\in D_g \text{ و } g(x)\in D_f\right\}\\&=\left\{x;\ x\in\mathbb{R}^* \text{ و } \left(\frac{1}{x}-1\right)\in\ ]-\infty;0]\cup[1;+\infty[\right\}\\&=\left\{x;\ x\in\mathbb{R}^* \text{ و } \left(\left(\frac{1}{x}-1\leq 0\right) \text{ أو } \left(\frac{1}{x}-1\geq 1\right)\right)\right\}\\&=\left\{x;\ x\in\mathbb{R}^* \text{ و } \left(\left(\frac{1}{x}\leq 1\right) \text{ أو } \left(\frac{1}{x}\geq 2\right)\right)\right\}\\&=\left\{x;\ x\in\mathbb{R}^* \text{ و } \left((x\geq 1) \text{ أو } \left(x\leq\frac{1}{2}\right)\right)\right\}\\&=\left\{x;\ x\in\mathbb{R}^* \text{ و } x\in\ \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty[\right\}\\&=\boxed{]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty[}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f[g(x)]\\&=f\left(\frac{1}{x}-1\right)\\&=\sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-\left(\frac{1}{x}-1\right)}\\&=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x}+1}\\&=\boxed{\sqrt{\frac{2x^2-3x+1}{x^2}}}\end{aligned}$$

تعريف $g\circ f$:

$$\begin{aligned}D_{g\circ f}&=\left\{x;\ x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\right\}\\&=\left\{x;\ (x\in\ ]-\infty;0]\cup[1;+\infty[) \text{ و } \sqrt{x^2-x}\in\mathbb{R}^*\right\}\\&=\left\{x;\ (x\in\ ]-\infty;0]\cup[1;+\infty[) \text{ و } (x^2-x)>0\right\}\\&=\left\{x;\ (x\in\ ]-\infty;0]\cup[1;+\infty[) \text{ و } (x\in\ ]-\infty;0[\cup]1;+\infty[)\right\}\\&=\boxed{]-\infty;0[\cup]1;+\infty[}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g[f(x)]\\&=g\left(\sqrt{x^2-x}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}-1\\&=\frac{1-\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2-x}}\\&=\frac{\left(1-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2-x}\right)}{x^2-x}\\&=\boxed{\frac{-x^2+x+\sqrt{x^2-x}}{x^2-x}}\end{aligned}$$

♥بالتوفيق والنجاح في بكالوريا 2023♥