المسألة رقم 04 :

الجزء -1

ليكن كثير الحدود $h(x)$ المعرف بـ : $h(x)=x^3+x^2-7x+2$

1) أحسب $h(2)$ و أعط تحليلا لكثير الحدود $h(x)$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $h(x)=0$

الجزء -2

نعتبر الدالتين g و f المعرفتين على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ على الترتيب بـ :

$g(x)=x^2+2x-3$ و $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ و ليكن (C_g) و (C_f) تمثيليهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين فواصل نقط تقاطع (C_f) و (C_g) .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إستنتج كيفية إنشاء التمثيل البياني (C_g) إنطلاقا من المنحنى الممثل للدالة مربع .

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$ بحيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إستنتج كيفية إنشاء التمثيل البياني (C_f) إنطلاقا من المنحنى الممثل للدالة مقلوب .

4) أ- بين أن المستقيم $x=-1$ محور تناظر للمنحنى (C_g) .

ب- بين أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

الجزء 3-

نعتبر الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين بـ : $f_1(x)=|f(x)|$ و $f_2(x)=f(|x|)$

1) عين مجموعة تعريف الدالة f_1 ثم أكتب الدالة f_1 دون رمز القيمة المطلقة .

2) إستنتج كيفية إنشاء (C_{f_1}) التمثيل البياني للدالة f_1 .

3) أ- عين مجموعة تعريف الدالة f_2 ثم بين أن f_2 دالة زوجية .

ب- إستنتج كيفية إنشاء (C_{f_2}) التمثيل البياني للدالة f_2 .

حل مقترح :

1) حساب $h(2)$ و إعطاء تحليلا لكثير الحدود $h(x)$:

$h(2)=2^3+2^2-7\times 2+2=0$ و منه نستنتج أن 2 جذر لكثير الحدود $h(x)$.

بما أن 2 جذر لكثير الحدود $h(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ من الدرجة الثانية يحقق : $h(x)=(x-2)g(x)$.

نضع : $g(x)=ax^2+bx+c$ و نعين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

أ- طريقة النشر و المطابقة :

$h(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$ و منه نجد :

$h(x)=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$ ، إذن بالمطابقة نحصل على :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=1 \\ c-2b=-7 \\ -2c=2 \end{cases}$$ أي $$\boxed{\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases}}$$ و منه نجد : $g(x)=x^2+3x-1$

إذن : $h(x)=(x-2)(x^2+3x-1)$

ب- طريقة القسمة الإقليدية : (أكثر إختصارا من طريقة النشر و المطابقة)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2-7x+2 & x-2 \\
\cline{2-2}
-x^3+2x^2 & x^2+3x-1 \\
\cline{1-1}
3x^2-7x+2 & \\
-3x^2+6x & \\
\cline{1-1}
-x+2 & \\
x-2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

و منه نجد : $g(x)=x^2+3x-1$ و بالتالي يكون : $h(x)=(x-2)(x^2+3x-1)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $h(x)=0$

$h(x)=0$ معناه : $(x-2)(x^2+3x-1)=0$ و منه يكون : $x-2=0$ أو $x^2+3x-1=0$

أي $x=2$ أو $x^2+3x-1=0$ و لإيجاد حلول المعادلة $x^2+3x-1=0$ نحسب المميز Δ :

$\Delta=3^2-4\times1\times(-1)$ أي $\Delta=13$ ؛ نلاحظ أن : $\Delta\succ0$ و منه المعادلة تقبل حلين متمايزين

هما : $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ؛ $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

نتيجة : حلول المعادلة $h(x)=0$ هي : $S=\left\{2,\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2},\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right\}$

الجزء 2-

1) تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) و (C_g) :

من أجل ذلك نبحث عن حلول المعادلة $f(x)=g(x)$:

من أجل كل $x\neq 1$: $\frac{2x+1}{x-1}=x^2+2x-3$ تكافئ : $2x+1=(x-1)(x^2+2x-3)$ أي

$2x+1=x^3+2x^2-3x-x^2-2x+3$ أي $x^3+x^2-7x+2=0$ معناه $h(x)=0$.

إذن حسب السؤال السابق نستنتج أن (C_f) و (C_g) يتقاطعان في النقط التي فواصلها

2 و $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ و $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$.

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ حيث α و β

عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إستنتاج كيفية إنشاء التمثيل البياني (C_g) إنطلاقا

من المنحنى الممثل للدالة مربع :

الطريقة الأولى : نستعمل النشر ثم المطابقة فنتحصل على :

$g(x)=x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta$ و منه نجد : $\begin{cases}2\alpha=2\\ \alpha^2+\beta=-3\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-4\end{cases}$

إذن : $g(x)=(x+1)^2-4$

الطريقة الثانية : نستعمل الشكل النموذجي لثلاثي الحدود x^2+2x-3 :

$\Delta=2^2-4\times1\times(-3)$ أي $\Delta=16$ و منه الشكل النموذجي لثلاثي الحدود x^2+2x-3

هو : $x^2+2x-3=1\left[\left(x+\frac{2}{2\times1}\right)-\frac{16}{4\times1^2}\right]$ أي $x^2+2x-3=(x+1)-4$ و منه يكون :

$g(x)=(x+1)^2-4$ ، إذن نجد : $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-4\end{cases}$

$g(x)=(x+\alpha)^2+\beta$ أي أن $g(x)$ تكتب من الشكل $g(x)=k(x+\alpha)+\beta$ بحيث :

$k(x)=x^2$ و $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-4\end{cases}$ ، إذن : (C_g) هو صورة (P) التمثيل البياني للدالة مربع

بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$.

3) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$ بحيث a

و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما ثم إستنتاج كيفية إنشاء التمثيل البياني (C_f)

إنطلاقا من المنحنى الممثل للدالة مقلوب :

الطريقة الأولى : نوحد المقامات ثم نطابق مع عبارة $f(x)$:

$f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}=\dfrac{ax-a+b}{x-1}$ و منه نتحصل على : $ax-a+b=2x+1$ ، إذن نجد :

$\begin{cases}a=2\\ -a+b=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$ و بالتالي يكون : $f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$

الطريقة الثانية : نحول الكتابة من الشكل : من أجل كل $x\neq 1$ لدينا

$f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2x-2+2+1}{x-1}=\dfrac{2x-2}{x-1}+\dfrac{3}{x-1}$ أي $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x-1}+\dfrac{3}{x-1}$ و منه

نجد $f(x)=2+\dfrac{3}{x-1}$ ، إذن يكون : $\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$

$f(x)$ تكتب من الشكل $f(x)=u(x+a)+b$ بحيث : $u(x)=\dfrac{3}{x}$ و $\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}$ ، إذن :

(C_g) هو صورة (C_u) التمثيل البياني للدالة u بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

4) أ- نبين أن المستقيم الذي $x=-1$ معادلة له هو محور تناظر للمنحنى (C_g) :

من أجل كل $x\in D_g$ أي $x\in\mathbb{R}$ فإن : $2\times(-1)-x=-2-x\in\mathbb{R}$ أي $2\times(-1)-x\in D_g$

و من جهة أخرى : $g(-2-x)=(-2-x)^2+2(-2-x)-3$ أي :

$g(-2-x)=x^2+4+4x-4-2x-3$ أي $g(-2-x)=x^2+2x-3$ و منه نجد :

$g(-2-x)=g(x)$ ، إذن المستقيم الذي $x=-1$ معادلة له محور تناظر للمنحنى (C_g) .

ب- نبين أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

من أجل كل $x\in D_f$ أي $x\neq 1$ فإن : $-x\neq -1$ و منه $2\times(1)-x\neq 2-1$ و منه

$2\times(1)-x\neq 1$ أي $2\times(1)-x\in D_f$

و من جهة أخرى : $f(2-x)+f(x)=2+\dfrac{3}{2-x-1}+2+\dfrac{3}{x-1}$ أي :

$f(2-x)+f(x)=4+\dfrac{3}{1-x}+\dfrac{3}{x-1}$ أي $f(2-x)+f(x)=4-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x-1}$

و منه نجد : $f(2-x)+f(x)=4=2\times 2$

إذن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

ملاحظة : يمكن إستعمال دساتير تغيير المعلم في الإجابة على السؤالين السابقين .

الجزء 3-

1) $D_{f_1}=D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ ثم كتابة الدالة f_1 دون رمز القيمة المطلقة :

$f_1(x)=|f(x)|$ معناه : $\begin{cases} f_1(x)=f(x) & si\ \ f(x)\geq 0 \\ f_1(x)=-f(x) & si\ \ f(x)\leq 0 \end{cases}$ إذن يتوجب علينا دراسة

إشارة الدالة $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

إذن نستنتج أن : إذا كان $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup]1, +\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

و إذا كان $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right[$ فإن $f(x) \leq 0$

و منه يكون :

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{2x+1}{x-1} & si \quad x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup]1, +\infty[\\ f_1(x) = -\dfrac{2x+1}{x-1} & si \quad x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right[\end{cases}$$

2) إستنتاج كيفية إنشاء (C_{f_1}) التمثيل البياني للدالة f_1 :

• لما $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup]1, +\infty[$ فإن $f_1(x) = f(x)$ و منه (C_{f_1}) ينطبق على (C_f) .

• لما $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right[$ فإن $f_1(x) = -f(x)$ و منه (C_{f_1}) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل .

3) أ- تكون الدالة f_2 معرفة من أجل $|x| \in D_f$ أي $|x| \neq 1$ أي $x \neq -1$ و $x \neq 1$ و منه نجد $D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

نبين أن f_2 دالة زوجية :

من أجل $x \in D_{f_2}$ أي $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ أي $-x \in D_{f_2}$ (المجموعة $\mathbb{R}$ متناظرة)

من جهة أخرى : $f_2(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=f_2(x)$ لأنه من خواص القيمة المطلقة

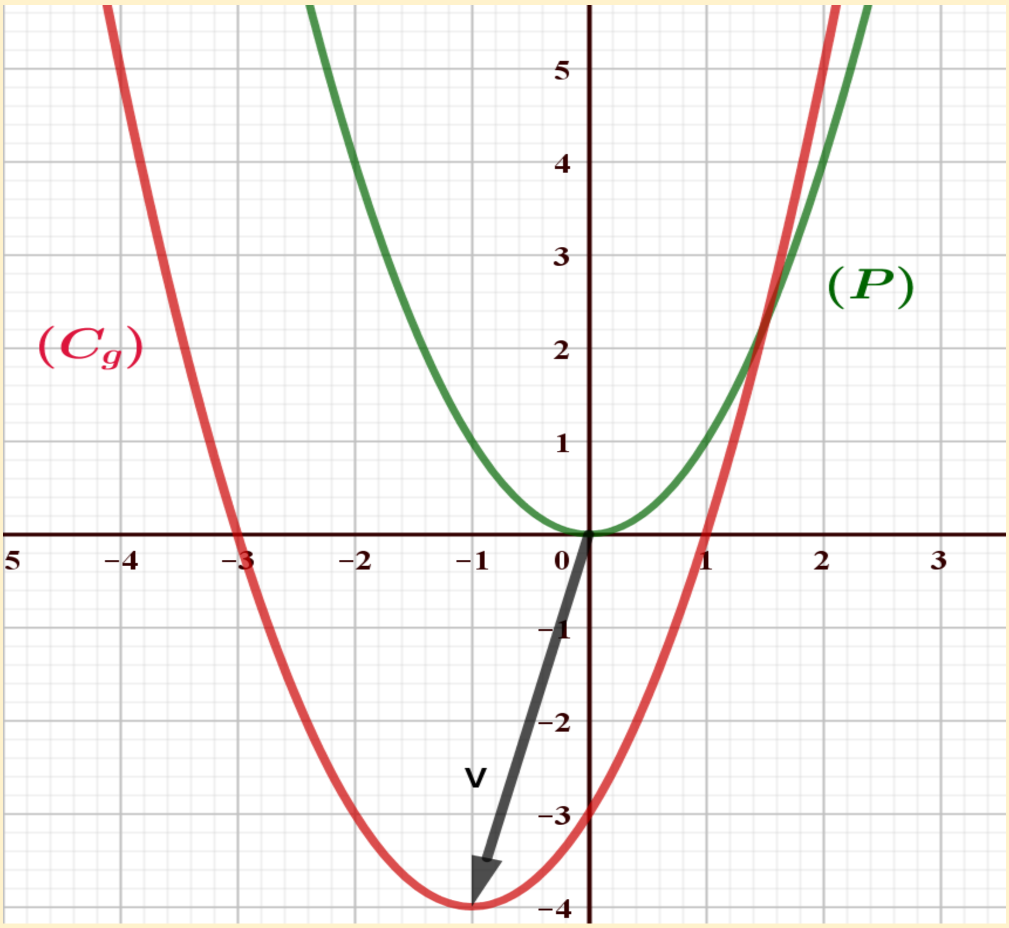
لعدد حقيقي x فإن : $|-x|=|x|$

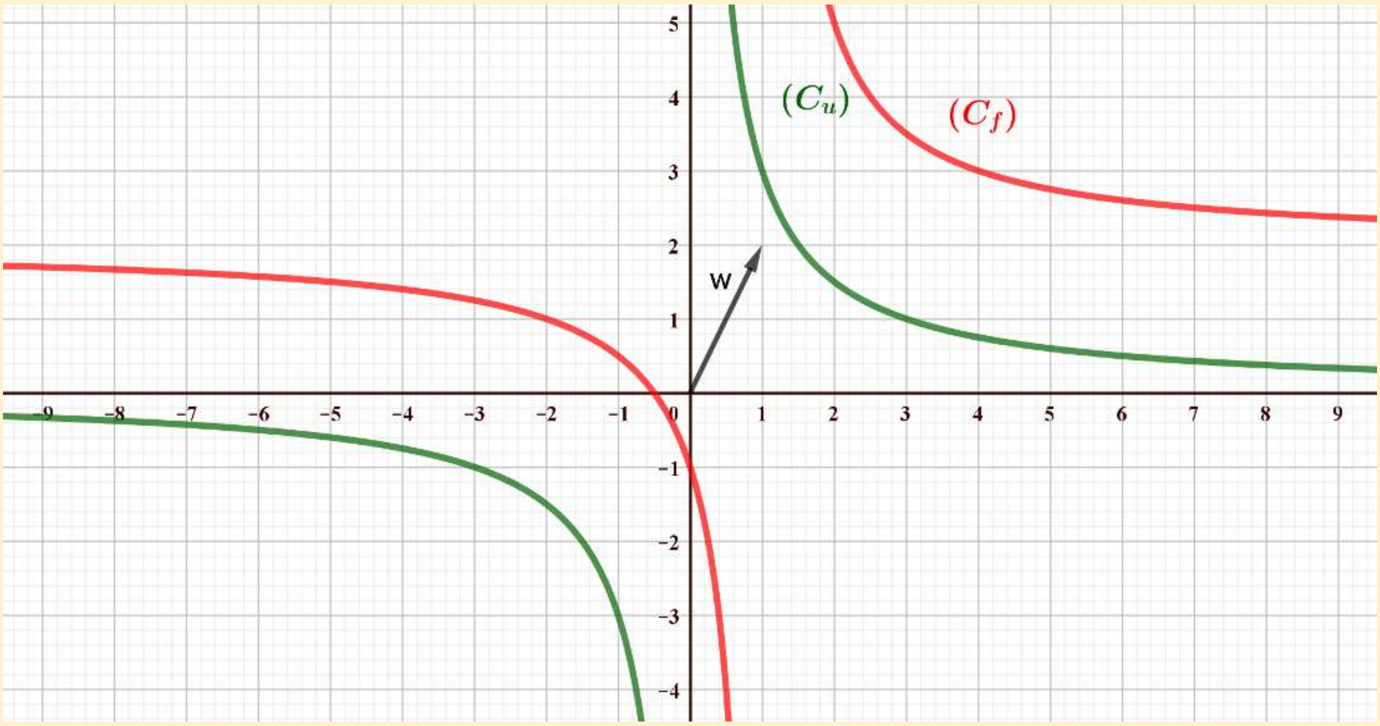
نتيجة : f_2 دالة زوجية .

ب- إستنتاج كيفية إنشاء (C_{f_2}) التمثيل البياني للدالة f_2 :

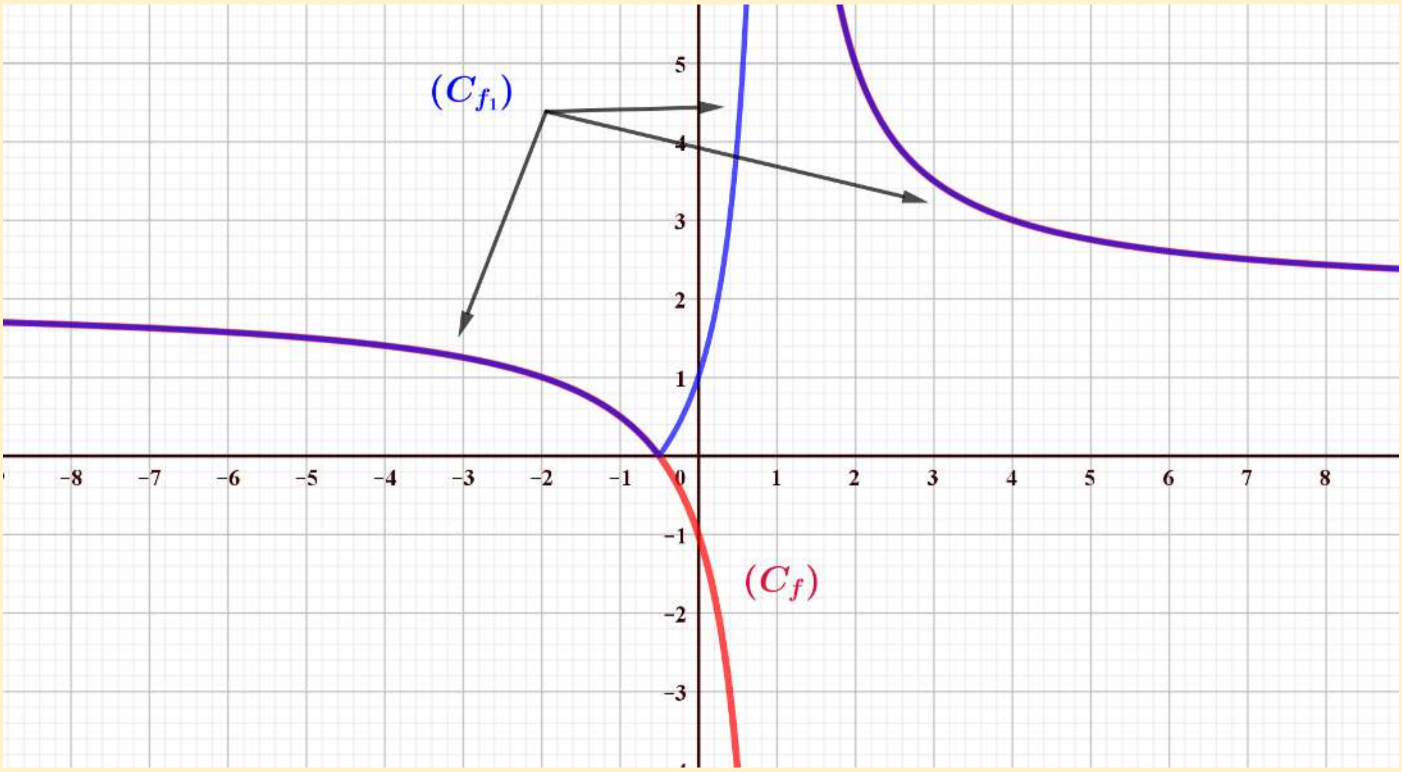
- إذا كان $x\geq 0$ فإن : $|x|=x$ و منه يكون $f_2(x)=f(x)$ ، إذن (C_{f_2}) ينطبق على (C_f) .

- إذا كان $x\leq 0$ فإن : $|x|=-x$ و منه يكون $f_2(x)=f(-x)$ ، و منه (C_{f_2}) متناظر مع (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب (f_2 دالة زوجية) .

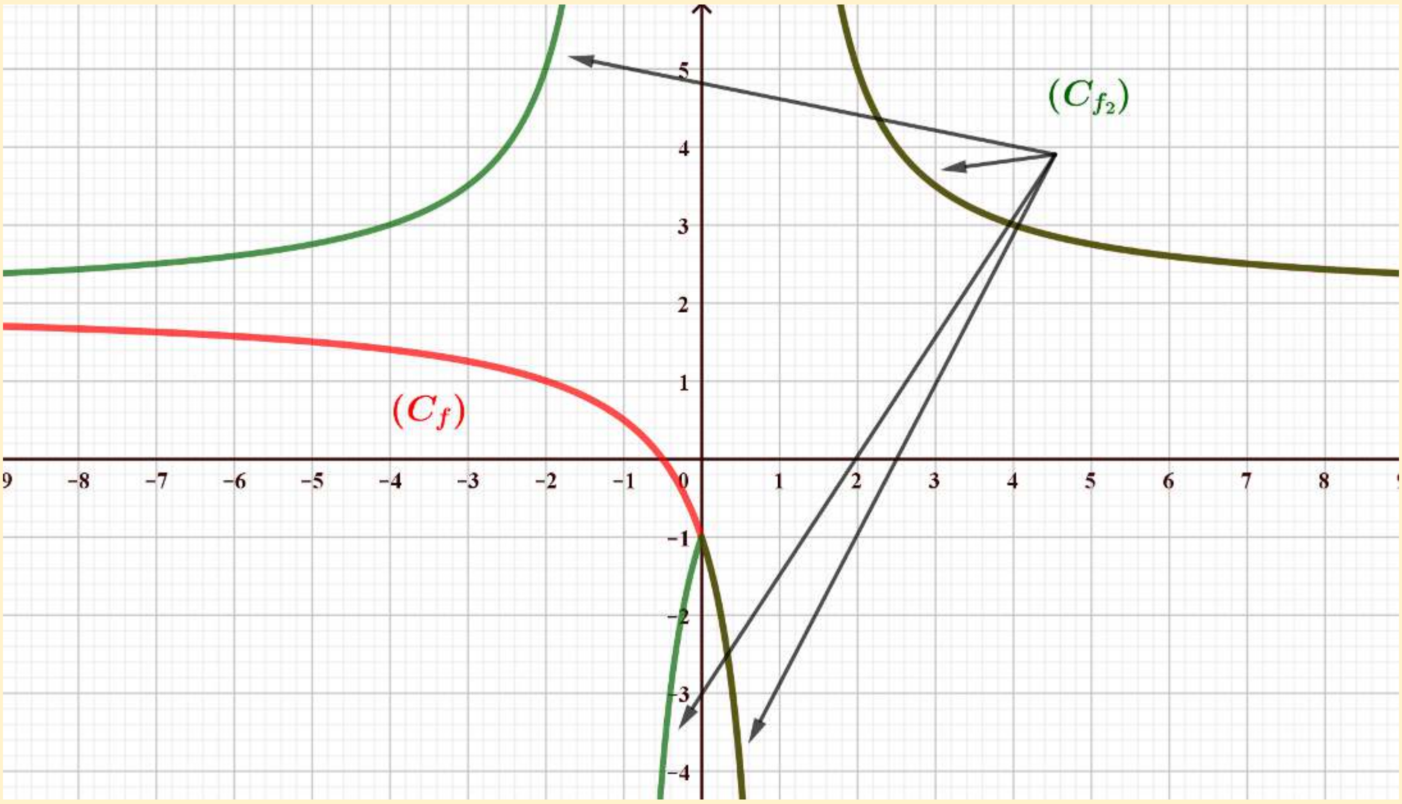




التمثيل البياني للدالة f_1 :



التمثيل البياني للدالة f_2 :



مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح ...

الأستاذ : حناش نبيل