

**نص التمرين:**

I- يحوي كيس سبع كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها ثلاث كرات بيضاء  $B_1, B_2, B_3$  وأربع كرات خضراء  $V_1, V_2, V_3, V_4$ . نسحب كرتين من الكيس على التوالي بحيث لا نعيد الكرة الأولى قبل السحب الثاني.

(1) شكل جدول الإمكانيات الموافقة لهذه التجربة ثم حدد عدد عناصر المجموعة الشاملة  $\Omega$ .

(2) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : «سحب كرتين مختلفتين في اللون»

B : «سحب كرتين من نفس اللون»

C : «سحب كرة بيضاء على الأكثر»

II- نقترح اللعبة التالية:

للمشاركة يدفع اللاعب  $DA$  ( $\alpha$  عدد طبيعي)، فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على  $100 DA$  وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على  $50 DA$  وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة العدد الطبيعي  $\alpha$ .

(1) عين قيم المتغير العشوائي  $X$  ثم عرق قانون احتماله.

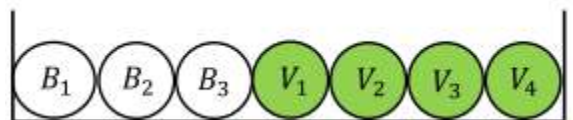
(2) أ- بين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  بدلالة  $\alpha$  يعطى بـ :

$$E(X) = \frac{300}{7} - \alpha$$

ب- أوجد أكبر قيمة ممكنة لـ  $\alpha$  حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

**حل التمرين:**

I- يحوي كيس سبع كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس (مبدأ تساوي الاحتمال)، منها ثلاث كرات بيضاء  $B_1, B_2, B_3$  وأربع كرات خضراء  $V_1, V_2, V_3, V_4$ .



نسحب كرتين من الكيس على التوالي بحيث لا نعيد الكرة الأولى قبل السحب الثاني (سحب دون إرجاع).

(1) تشكيل جدول الإمكانيات الموافقة لهذه التجربة العشوائية:

الكرة 2 / الكرة 1	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$B_1$		$B_1B_2$	$B_1B_3$	$B_1V_1$	$B_1V_2$	$B_1V_3$	$B_1V_4$
$B_2$	$B_2B_1$		$B_2B_3$	$B_2V_1$	$B_2V_2$	$B_2V_3$	$B_2V_4$
$B_3$	$B_3B_1$	$B_3B_2$		$B_3V_1$	$B_3V_2$	$B_3V_3$	$B_3V_4$
$V_1$	$V_1B_1$	$V_1B_2$	$V_1B_3$		$V_1V_2$	$V_1V_3$	$V_1V_4$
$V_2$	$V_2B_1$	$V_2B_2$	$V_2B_3$	$V_2V_1$		$V_2V_3$	$V_2V_4$
$V_3$	$V_3B_1$	$V_3B_2$	$V_3B_3$	$V_3V_1$	$V_3V_2$		$V_3V_4$
$V_4$	$V_4B_1$	$V_4B_2$	$V_4B_3$	$V_4V_1$	$V_4V_2$	$V_4V_3$	

تحديد عدد عناصر المجموعة الشاملة  $\Omega$ :

حسب جدول الإمكانيات أعلاه، فإن عدد عناصر المجموعة الشاملة  $\Omega$  الموافقة لهذه التجربة العشوائية (سحب كرتين على التوالي دون إرجاع) يساوي 42.

(2) حساب الاحتمالات:

● الحدث A : «سحب كرتين مختلفتين في اللون»

جدول الإمكانيات الموافق للحدث A موضح كما يلي:

الكرة 2 / الكرة 1	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$B_1$		$B_1B_2$	$B_1B_3$	$B_1V_1$	$B_1V_2$	$B_1V_3$	$B_1V_4$
$B_2$	$B_2B_1$		$B_2B_3$	$B_2V_1$	$B_2V_2$	$B_2V_3$	$B_2V_4$
$B_3$	$B_3B_1$	$B_3B_2$		$B_3V_1$	$B_3V_2$	$B_3V_3$	$B_3V_4$
$V_1$	$V_1B_1$	$V_1B_2$	$V_1B_3$		$V_1V_2$	$V_1V_3$	$V_1V_4$
$V_2$	$V_2B_1$	$V_2B_2$	$V_2B_3$	$V_2V_1$		$V_2V_3$	$V_2V_4$
$V_3$	$V_3B_1$	$V_3B_2$	$V_3B_3$	$V_3V_1$	$V_3V_2$		$V_3V_4$
$V_4$	$V_4B_1$	$V_4B_2$	$V_4B_3$	$V_4V_1$	$V_4V_2$	$V_4V_3$	

حسب جدول الإمكانيات الموافق للحدث A فإن عدد عناصر المجموعة A (عدد المربعات المظلمة) يساوي 24.

$$p(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{24}{42} = \frac{4 \times 6}{7 \times 6} = \frac{4}{7} \quad p(A) = \frac{4}{7}$$



II- نقترح اللعبة التالية:

للمشاركة يدفع اللاعب  $DA \alpha$  ( $\alpha$  عدد طبيعي)، فإذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على  $DA 100$  وإذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على  $DA 50$  وإذا سحب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة العدد الطبيعي  $\alpha$ .

(1) تعيين قيم المتغير العشوائي  $X$ :

- إذا سحب اللاعب كرتين بيضاوين يتحصل على  $DA 100$  وقد دفع  $DA \alpha$  معناه ربح أو خسارة اللاعب هي  $100 - \alpha$ .
- إذا سحب اللاعب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على  $DA 50$  وقد دفع  $DA \alpha$  معناه ربح أو خسارة اللاعب هي  $50 - \alpha$ .
- إذا سحب اللاعب كرتين خضراوين يخسر ما دفعه  $DA \alpha$  معناه خسارة اللاعب هي  $-\alpha$ .

ومنه:

قيم المتغير العشوائي  $X$  هي:

$$X = \{-\alpha; 50 - \alpha; 100 - \alpha\}$$

تعريف قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$ :

● حساب  $p(X = -\alpha)$ :

معناه: احتمال أن يسحب اللاعب كرتين خضراوين.

الكرة 2 / الكرة 1	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$B_1$		$B_1B_2$	$B_1B_3$	$B_1V_1$	$B_1V_2$	$B_1V_3$	$B_1V_4$
$B_2$	$B_2B_1$		$B_2B_3$	$B_2V_1$	$B_2V_2$	$B_2V_3$	$B_2V_4$
$B_3$	$B_3B_1$	$B_3B_2$		$B_3V_1$	$B_3V_2$	$B_3V_3$	$B_3V_4$
$V_1$	$V_1B_1$	$V_1B_2$	$V_1B_3$		$V_1V_2$	$V_1V_3$	$V_1V_4$
$V_2$	$V_2B_1$	$V_2B_2$	$V_2B_3$	$V_2V_1$		$V_2V_3$	$V_2V_4$
$V_3$	$V_3B_1$	$V_3B_2$	$V_3B_3$	$V_3V_1$	$V_3V_2$		$V_3V_4$
$V_4$	$V_4B_1$	$V_4B_2$	$V_4B_3$	$V_4V_1$	$V_4V_2$	$V_4V_3$	

عدد عناصر حدث سحب كرتين خضراوين هو عدد المربعات المظلمة في جدول الإمكانيات أعلاه ويساوي 12.

● الحدث  $B$ : «سحب كرتين من نفس اللون»

جدول الإمكانيات الموافق للحدث  $B$  موضح كما يلي:

الكرة 2 / الكرة 1	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$B_1$		$B_1B_2$	$B_1B_3$	$B_1V_1$	$B_1V_2$	$B_1V_3$	$B_1V_4$
$B_2$	$B_2B_1$		$B_2B_3$	$B_2V_1$	$B_2V_2$	$B_2V_3$	$B_2V_4$
$B_3$	$B_3B_1$	$B_3B_2$		$B_3V_1$	$B_3V_2$	$B_3V_3$	$B_3V_4$
$V_1$	$V_1B_1$	$V_1B_2$	$V_1B_3$		$V_1V_2$	$V_1V_3$	$V_1V_4$
$V_2$	$V_2B_1$	$V_2B_2$	$V_2B_3$	$V_2V_1$		$V_2V_3$	$V_2V_4$
$V_3$	$V_3B_1$	$V_3B_2$	$V_3B_3$	$V_3V_1$	$V_3V_2$		$V_3V_4$
$V_4$	$V_4B_1$	$V_4B_2$	$V_4B_3$	$V_4V_1$	$V_4V_2$	$V_4V_3$	

حسب جدول الإمكانيات الموافق للحدث  $B$  فإن عدد عناصر المجموعة  $B$  (عدد المربعات المظلمة) يساوي 18.

$$p(B) = \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{18}{42} = \frac{3 \times 6}{7 \times 6} = \frac{3}{7} \quad \boxed{p(B) = \frac{3}{7}}$$

● الحدث  $C$ : «سحب كرة بيضاء على الأكثر»

جدول الإمكانيات الموافق للحدث  $C$  موضح كما يلي:

الكرة 2 / الكرة 1	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$B_1$		$B_1B_2$	$B_1B_3$	$B_1V_1$	$B_1V_2$	$B_1V_3$	$B_1V_4$
$B_2$	$B_2B_1$		$B_2B_3$	$B_2V_1$	$B_2V_2$	$B_2V_3$	$B_2V_4$
$B_3$	$B_3B_1$	$B_3B_2$		$B_3V_1$	$B_3V_2$	$B_3V_3$	$B_3V_4$
$V_1$	$V_1B_1$	$V_1B_2$	$V_1B_3$		$V_1V_2$	$V_1V_3$	$V_1V_4$
$V_2$	$V_2B_1$	$V_2B_2$	$V_2B_3$	$V_2V_1$		$V_2V_3$	$V_2V_4$
$V_3$	$V_3B_1$	$V_3B_2$	$V_3B_3$	$V_3V_1$	$V_3V_2$		$V_3V_4$
$V_4$	$V_4B_1$	$V_4B_2$	$V_4B_3$	$V_4V_1$	$V_4V_2$	$V_4V_3$	

حسب جدول الإمكانيات الموافق للحدث  $C$  فإن عدد عناصر المجموعة  $C$  (عدد المربعات المظلمة) يساوي 36.

$$p(C) = \frac{\text{عدد عناصر } C}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{36}{42} = \frac{6 \times 6}{7 \times 6} = \frac{6}{7} \quad \boxed{p(C) = \frac{6}{7}}$$



نلخص النتائج في الجدول التالي:

$x_i$	$-\alpha$	$50 - \alpha$	$100 - \alpha$
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

لاحظ أن:

$$p(X = -\alpha) + p(X = 50 - \alpha) + p(X = 100 - \alpha) = 1$$

(2) أ- نين أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  بدلالة  $\alpha$  يعطى بـ:

$$E(X) = \frac{300}{7} - \alpha$$

لدينا:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i \times p(X = x_i)$$

$$E(X) = -\alpha \times \frac{2}{7} + (50 - \alpha) \frac{4}{7} + (100 - \alpha) \frac{1}{7}$$

$$E(X) = \frac{-2\alpha + 200 - 4\alpha + 100 - \alpha}{7}$$

$$E(X) = \frac{300 - 7\alpha}{7}$$

$$E(X) = \frac{300}{7} - \frac{7\alpha}{\alpha}$$

ومنه:

$$E(X) = \frac{300}{7} - \alpha$$

(2) ب- إيجاد أكبر قيمة ممكنة لـ  $\alpha$  حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب:

تكون اللعبة في صالح اللاعب إذا كان الأمل الرياضي موجب.

$$E(X) > 0$$

$$\frac{300}{7} - \alpha > 0$$

$$\alpha < \frac{300}{7}$$

$$\alpha < 42,857 \dots$$

ومنه:

أكبر قيمة ممكنة للعدد الطبيعي  $\alpha$  حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب هي:

$$\alpha = 42 DA$$

$$p(X = -\alpha) = \frac{12}{42} = \frac{2 \times 6}{7 \times 6} = \frac{2}{7}$$

● حساب  $p(X = 50 - \alpha)$ :

معناه: احتمال أن يسحب اللاعب كرتين مختلفتين في اللون.

الكرتين الكرتين	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$B_1$		$B_1B_2$	$B_1B_3$	$B_1V_1$	$B_1V_2$	$B_1V_3$	$B_1V_4$
$B_2$	$B_2B_1$		$B_2B_3$	$B_2V_1$	$B_2V_2$	$B_2V_3$	$B_2V_4$
$B_3$	$B_3B_1$	$B_3B_2$		$B_3V_1$	$B_3V_2$	$B_3V_3$	$B_3V_4$
$V_1$	$V_1B_1$	$V_1B_2$	$V_1B_3$		$V_1V_2$	$V_1V_3$	$V_1V_4$
$V_2$	$V_2B_1$	$V_2B_2$	$V_2B_3$	$V_2V_1$		$V_2V_3$	$V_2V_4$
$V_3$	$V_3B_1$	$V_3B_2$	$V_3B_3$	$V_3V_1$	$V_3V_2$		$V_3V_4$
$V_4$	$V_4B_1$	$V_4B_2$	$V_4B_3$	$V_4V_1$	$V_4V_2$	$V_4V_3$	

عدد عناصر حدث سحب كرتين مختلفتين في اللون هو عدد المربعات

المظلة في جدول الإمكانيات أعلاه ويساوي 24.

$$p(X = -\alpha) = \frac{24}{42} = \frac{4 \times 6}{7 \times 6} = \frac{4}{7}$$

● حساب  $p(X = 100 - \alpha)$ :

معناه: احتمال أن يسحب اللاعب كرتين بيضاوين.

الكرتين الكرتين	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
$B_1$		$B_1B_2$	$B_1B_3$	$B_1V_1$	$B_1V_2$	$B_1V_3$	$B_1V_4$
$B_2$	$B_2B_1$		$B_2B_3$	$B_2V_1$	$B_2V_2$	$B_2V_3$	$B_2V_4$
$B_3$	$B_3B_1$	$B_3B_2$		$B_3V_1$	$B_3V_2$	$B_3V_3$	$B_3V_4$
$V_1$	$V_1B_1$	$V_1B_2$	$V_1B_3$		$V_1V_2$	$V_1V_3$	$V_1V_4$
$V_2$	$V_2B_1$	$V_2B_2$	$V_2B_3$	$V_2V_1$		$V_2V_3$	$V_2V_4$
$V_3$	$V_3B_1$	$V_3B_2$	$V_3B_3$	$V_3V_1$	$V_3V_2$		$V_3V_4$
$V_4$	$V_4B_1$	$V_4B_2$	$V_4B_3$	$V_4V_1$	$V_4V_2$	$V_4V_3$	

عدد عناصر حدث سحب كرتين بيضاوين هو عدد المربعات المظلة في

جدول الإمكانيات أعلاه ويساوي 6.

$$p(X = 100 - \alpha) = \frac{6}{42} = \frac{1 \times 6}{7 \times 6} = \frac{1}{7}$$