

# كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

## 1 الدالة كثير حدود

تسمى دالة كثير حدود كل دالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  
 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  حيث  $n$  عدد طبيعي و  $a_0, a_1, \dots, a_n$  أعداد حقيقية ثابتة.  
✓ يسمى العدد الطبيعي  $n$  درجة كثير حدود  $f$ ،  
وتسمى الأعداد  $a_0, a_1, \dots, a_n$  معاملاته، ويسمى الحد الذي درجته  $p$ .

مثال :

- ❖ كل ثابتة :  $x \mapsto a_0$  ( $a_0 \neq 0$ ) هي كثير حدود درجته 0
- ❖ كل دالة تآلفية :  $x \mapsto ax + b$  ( $a \neq 0$ ) هي كثير حدود درجته 1
- ❖ كل دالة :  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) هي كثير حدود درجته 2 ( تسمى أيضا ثلاثي حدود من الدرجة الثانية).

## 2 تساوي كثيري حدود

يكون كثيرا حدود ، غير معدومين متساويين إذا وفقط إذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.  
مثال : إذا كان لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - x + 3$  فإن  $a = 2$  ،  $b = 0$  ،  $c = -1$  ،  $d = 3$ .

## 3 العمليات على كثيرات الحدود

- ❖ مجموع فرق وجداء كثيرات حدود هي كثيرات حدود
- ❖ مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- ❖ جداء كثيري حدود هو كثير حدود درجته مجموع درجتيهما.

## 4 جذر كثير حدود

$f$  كثير حدود درجته أكبر من أوتساوي 1 و  $\alpha$  عدد حقيقي،  $\alpha$  جذر لكثير الحدود  $f$  يعني  $f(\alpha) = 0$

## 5 تحليل كثير حدود

ليكن  $f$  كثير حدود درجته أكبر من أوتساوي 1 و  $\alpha$  عدد حقيقي.  
إذا كان  $f(\alpha) = 0$  فإنه يوجد كثير حدود  $g$  بحيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا  $f(x) = (x - \alpha)g(x)$   
مثال : الهدف هو تحليل  $f(x)$  إلى جداء عاملين أو أكثر بطرق مختلفة. حيث  $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ &= x^2(x - 1) - 4(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

# كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

نبين أن 1 جذر لـ  $f$  ثم نستعمل المبرهنة السابقة ، ومنه

$$f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

$$= ax^3 + (c-a)x^2 + (c-b)x - c$$

بالمطابقة نجد :  $c = -4$  ،  $b = 0$  ،  $a = 1$

$$f(x) = (x-1)(x+2)(x-2)$$

ومنه :  $f(x) = (x-1)(x^2 - 4)$  أي :

القسم الإقليدي

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 4x + 4 & x-1 \\ -x^3 + x^2 & x^2 - 4 \\ \hline -4x + 4 & \\ 4x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

طريقة هورنر

|   |       |        |       |      |
|---|-------|--------|-------|------|
|   | $x^3$ | $-x^2$ | $-4x$ | $+4$ |
|   | 1     | -1     | -4    | 4    |
| + | 1     | 0      | 1     | 0    |
| × | 1     | 0      | -4    | 0    |

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$   
 $= (x-1)(x^2 - 4)$

## معادلة من الدرجة الثانية

6

نسمي معادلة من الدرجة الثانية، ذات المجهول  $x$ ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:  $ax^2 + bx + c$  حيث  $a$ ،  $b$ ،  $c$  أعداد حقيقية ثابتة مع  $a \neq 0$ .

## الشكل النموذجي لثلاثي الحدود

7

$$\begin{aligned} A &= ax^2 + bx + c = a \left[ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

نضع  $\Delta = b^2 - 4ac$  ومنه فإن الشكل النموذجي لثلاثي الحدود هو

$$A = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

# كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

## حل معادلة من الدرجة الثانية

8

حل معادلة من الدرجة الثانية معناه إيجاد جذور كثير حدود من الدرجة الثانية

| إذا كان      | حلول $ax^2 + bx + c$ هي                                                    | تحليل $ax^2 + bx + c$ |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $\Delta > 0$ | $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $a(x - x_1)(x - x_2)$ |
| $\Delta = 0$ | $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$                                                | $a(x - x_1)^2$        |
| $\Delta < 0$ | لا توجد حلول                                                               | لا يمكن التحليل       |

## مراجعة من الدرجة الثانية

9

نسمي مراجعة من الدرجة الثانية ذات المجهول  $x$  كل مراجعة يمكن كتابتها على أحد الشكلين التاليين:

$ax^2 + bx + c > 0$ ,  $ax^2 + bx + c \geq 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية ثابتة مع  $a \neq 0$

**الحالة ①:  $\Delta > 0$  لدينا**

حيث  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$   $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  بفرض  $x_1 < x_2$  نحصل على الجدول التالي:

| $x$             | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$      | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|-------|------------|-----------|
| إشارة $x - x_1$ | -         | 0     | +          | +         |
| إشارة $x - x_2$ | -         | -     | 0          | +         |
| إشارة $f(x)$    | إشارة $a$ | 0     | إشارة $-a$ | إشارة $a$ |

**الحالة ②:  $\Delta = 0$  لدينا**

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$  حيث  $x_1 = \frac{-b}{2a}$  ومنه إشارة  $ax^2 + bx + c$  من إشارة  $a$  ويمكن تلخيصها في الجدول التالي:

| $x$          | $-\infty$ | $x_1$ | $+\infty$ |
|--------------|-----------|-------|-----------|
| إشارة $f(x)$ | إشارة $a$ | 0     | إشارة $a$ |

# كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

الحالة ③ :  $\Delta < 0$

إشارة  $ax^2 + bx + c$  يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

| $x$          | $-\infty$ | $+\infty$ |
|--------------|-----------|-----------|
| إشارة $f(x)$ | إشارة $a$ |           |

## مجموع وجداء حلي معادلة

10

نعتبر المعادلتين من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي  $x$  التاليتين: (1)  $ax^2 + bx + c$  مع  $(a \neq 0)$   
نعلم أنه إذا كان  $\Delta \geq 0$  فإن المعادلتين (1) تقبل حلين هما  $x_1$  و  $x_2$  حيث

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

إذا وضعنا  $S = x_1 + x_2$  و  $P = x_1 \times x_2$  حيث  $S$  هو مجموع الحلين و  $P$  هو جدأؤهما فإن  
 $P = \frac{c}{a}$  و  $S = -\frac{b}{a}$

## حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

1.10

إذا علم أحد الجذرين يمكن حساب الجذر الآخر وذلك باستعمال المجموع  $S$  والجداء  $P$

## تحسين عددين علم مجموعهما و جدأؤهما

2.10

يكون مجموع عددين هو  $S$  وجدأؤهما هو  $P$  إذا وفقط إذا كانا حلين للمعادلتين ذات المجهول  $x$  والتي تكتب بالشكل التالي  $x^2 - Sx + P$

## تحسين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية

3.10

نعتبر المعادلتين من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي  $x$  التاليتين: (1)  $ax^2 + bx + c$  مع  $(a \neq 0)$   
❖ إذا كان  $\frac{c}{a} < 0$  فإن المعادلتين (1) تقبل حلين إشارتهما مختلفتان.  
❖ إذا كان  $\frac{c}{a} > 0$  و  $\Delta > 0$  و  $-\frac{b}{a} > 0$  فإن المعادلتين (1) تقبل حلين موجبين تماما.  
❖ إذا كان  $\frac{c}{a} > 0$  و  $\Delta > 0$  و  $-\frac{b}{a} < 0$  فإن المعادلتين (1) تقبل حلين سالبين تماما.

# كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

## مثال تطبيقي :

ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  وجود وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول  $x$  التالية

$$(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0$$

**الحل**

لدينا :  $p = \frac{m}{m-1}$  و  $S = \frac{-2(m+1)}{m+1}$

❖ إذا كان  $m = 1$  فإن المعادلة تصبح من الدرجة الأولى  $4x + 1 = 0$  ومنه  $x = -\frac{1}{4}$ .

❖ إذا كان  $m \neq 1$  فإن المعادلة تصبح من الدرجة الثانية حيث:  $\Delta_m = 4(3m+1)$

| $m$        | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $+\infty$ |
|------------|-----------|----------------|---|-----------|
| $\Delta_m$ | -         | 0              | + | +         |

دراسة إشارة  $P$  و  $S$

| $m$     | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|---|-----------|
| $-2m-2$ | +         | 0  | - | -         |
| $m-1$   | -         | -  | 0 | +         |
| $S$     | -         | +  | - | -         |

| $m$   | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|-------|-----------|---|---|-----------|
| $m$   | -         | 0 | + | +         |
| $m-1$ | -         | - | 0 | +         |
| $P$   | +         | - | + | +         |

| $x$        | $-\infty$             | -1 | $-\frac{1}{3}$ | 0                               | 1                                     | $+\infty$                       |
|------------|-----------------------|----|----------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|
| $\Delta_m$ | -                     | -  | 0              | +                               | +                                     | +                               |
| $S_m$      | -                     | 0  | +              | +                               | +                                     | -                               |
| $P_m$      | +                     | +  | +              | 0                               | -                                     | +                               |
| النتائج    | المعادلة لا تقبل حلول |    |                | المعادلة تقبل حلين موجبين تماما | المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة | المعادلة تقبل حلين سالبين تماما |

## المعادلات مضاعفة التربيع

11

نسمي معادلة مضاعفة التربيع، ذات المجهول  $x$ ، كل معادلة يمكن كتابتها على الشكل:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية ثابتة مع  $a \neq 0$ .

$$\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c \end{cases} \quad \text{حل هذه المعادلة يؤدي إلى حل الجملة:}$$

يسمى  $X$  مجهولا مساعدا

بعد حل المعادلة  $aX^2 + bX + c = 0$  نستنتج حلول المعادلة  $ax^4 + bx^2 + c = 0$

## المتراجحات مضاعفة التربيع

12

نسمي متراجحة مضاعفة التربيع، ذات المجهول  $x$ ، كل متراجحة يمكن كتابتها على الشكل:  $ax^4 + bx^2 + c \geq 0$  أو  $ax^4 + bx^2 + c > 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية ثابتة مع  $a \neq 0$ .

يؤول إلى حل متراجحة مضاعفة التربيع إلى دراسة إشارة  $ax^4 + bx^2 + c$

مثال:

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$

① نضع:  $f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$

التحقق أن 3 و 4 حلان للمعادلة  $X^2 - 7X + 12 = 0$

بتعويض قيمة  $X$  بـ 3 و 4 نجد:  $(3)^2 - 7(3) + 12 = 0$  و  $(4)^2 - 7(4) + 12 = 0$

② لدينا:

| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $-\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $2$ | $+\infty$ |   |
|---------|-----------|------|-------------|------------|-----|-----------|---|
| $x^2-3$ | +         | +    | 0           | -          | 0   | +         |   |
| $x^2-4$ | +         | 0    | -           | -          | -   | 0         | + |
| $f(x)$  | +         | 0    | -           | 0          | +   | 0         | + |

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 12$$

$$= X^2 - 7X + 12$$

$$= (X - 3)(X - 4)$$

$$= (x^2 - 3)(x^2 - 4)$$

من الجدول نستنتج أن حلول المتراجحة  $f(x) < 0$  هي:  $S = ] -2; -\sqrt{3}[ \cup ] \sqrt{3}; 2[$ .

## حلول معادلات و متراجحات من الشكل

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \geq 0$$

13

للحلول معادلات و متراجحات من الشكل  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ،  $ax^3 + bx^2 + cx + d \geq 0$  نقوم بتحليل العبارة بإحدى طرائق السابقة

(مع جذر معلوم) ثم نحل المعادلة أو المتراجحة

مثال

لدينا:  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$ .

# كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

1. حساب  $P(-2)$  :

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6 \\ &= 2 \times (-8) - 4 + 26 - 6 = -16 - 4 - 6 + 26 = 0 \end{aligned}$$

ومنه  $P(-2) = 0$

2. (أ) نبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $P(x) = (x+2)Q(x)$  بما أن  $P(x)$  كثير حدود من الدرجة الثالثة و  $-2$  جذره

فإنه يكتب على الشكل :  $P(x) = (x+2)Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 & x+2 \\ -2x^3 - 4x^2 & \\ \hline -5x^2 - 13x & \\ 5x^2 + 10x & \\ \hline -3x - 6 & \\ 3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{: تعيين } Q(x)$$

ومنه :  $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$

(ب) استنتاج تحليل  $P(x)$  على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى :

لدينا  $P(x) = (x+2)Q(x)$  نحل المعادلة  $Q(x) = 0$  :

$$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3)$$

$$= 25 + 24 = 49 > 0$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$P(x) = 2(x+2)(x+\frac{1}{2})(x-3) \text{ ومنه } Q(x) = 2(x+\frac{1}{2})(x-3)$$

3. حل المتراجحة  $P(x) \geq 0$  في  $\mathbb{R}$  :

| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $-\frac{1}{2}$ | $3$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|----------------|-----|-----------|
| $x+2$  | -         | 0    | +              | +   | +         |
| $Q(x)$ | +         | +    | 0              | -   | -         |
| $P(x)$ | -         | 0    | +              | 0   | +         |

وبالتالي حلول المتراجحة  $P(x) \geq 0$  في  $\mathbb{R}$  هي  $x \in [-2; \frac{-1}{2}] \cup [3; +\infty[$

لدينا مما سبق حلول المعادلة :  $2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0$  هي : 2 ، 3 و  $-\frac{1}{2}$

لحل المعادلة :  $2x^6 - x^4 - 13x^2 - 6 = 0 \dots (1)$  نقوم بوضع :  $X = x^2$

إذن (1) تكافئ (2)  $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$  ولدينا مما سبق

$$\begin{cases} X = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \\ X = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ أو } x = -\sqrt{3} \\ X = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض} \end{cases}$$

لحل المعادلة :  $2x\sqrt{x} - x - 13\sqrt{x} - 6 = 0 \dots (1)$  نقوم بوضع :  $X = \sqrt{x}$  بحيث  $x \geq 0$

إذن (1) تكافئ (2)  $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$  ولدينا مما سبق

$$\begin{cases} X = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ X = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ X = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = -\frac{1}{2} \text{ مرفوض} \end{cases}$$

لحل المعادلة :  $\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{13}{x} - 6 = 0 \dots (1)$  نقوم بوضع :  $X = \frac{1}{x}$  بحيث  $x \neq 0$

إذن (1) تكافئ (2)  $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$  ولدينا مما سبق

$$\begin{cases} X = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ X = 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ X = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

بعبارة أخرى لحلول معادلة من الشكل :  $3f(x)^3 - f(x)^2 - 13f(x) - 6 = 0 \dots (1)$  نقوم بوضع :  $X = f(x)$  حيث  $x \in D_f$

إذن (1) تكافئ (2)  $2X^3 - X^2 - 13X - 6 = 0$  ولدينا مما سبق

$$\begin{cases} X = 1 \Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow \dots \\ X = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \Rightarrow \dots \\ X = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \dots \end{cases}$$

**التمرين رقم (1) :** ليكن  $P$  كثير حدود حيث  $P(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x - 3$ .

1. تحقق أن  $\alpha = 1$  جذر لكثير الحدود  $P(x)$ .
2. عين كثير الحدود  $q(x)$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R} : P(x) = (x - 1)q(x)$ .
3. حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $P(x) = 0$ .
4. شكل جدول إشارة  $P(x)$  ثم استنتج حلول المتراجحة  $-4x^2 + 3x + 4 \leq \frac{3}{x}$ .

الحل موجود في الصفحة 14

**التمرين رقم (2) :** نعتبر المعادلة  $(E)$  ذات المجهول الحقيقي  $x$  والوسيط الحقيقي  $m$

$$(m^2 - 4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$$

1. عين قيم العدد الحقيقي  $m$  حتى تكون المعادلة  $(E)$  من الدرجة الثانية.
2. عين قيمة  $m$  حتى يكون 0 حلا للمعادلة  $(E)$  ثم استنتج الحل الآخر لها.

الحل موجود في الصفحة 14

**التمرين رقم (3) :** نعتبر كثير الحدود  $P(x)$  حيث :  $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ .

1. أثبت أن  $(-1)$  هو جذر  $P(x)$ .
2. أوجد كثير الحدود  $Q(x)$  حيث :  $f(x) = (x + 1)Q(x)$ .
3. أدرس حسب قيم  $x$  إشارة  $P(x)$ ، ثم استنتج حلول المتراجحة  $P(x) > 0$ .

الحل موجود في الصفحة 15

**التمرين رقم (4) :**  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + \beta$  ، حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين.

1. عين العددين  $\alpha$  و  $\beta$  حتى يكون  $(-1)$  جذرا لكثير الحدود  $f(x)$  و  $f(0) = 2$ .
2. نعتبر فيما يلي :  $\alpha = -1$  و  $\beta = 2$  :

- أوجد كثير حدود  $g(x)$  حيث :  $f(x) = (x + 1)g(x)$
- ب) حل في  $\mathbb{R}$  ما يلي :  $f(x) = 0$  و  $f(x) > 0$

الحل موجود في الصفحة 16

# كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

**التمرين رقم (5) :** نعتبر الدالة  $f_m$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f_m(x) = x^2 - mx + 1$  حيث  $m$  وسيط حقيقي ، وليكن  $(C_m)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى  $(C_2)$  مع حامل محور الفواصل.
2. عيّن قيم  $m$  بحيث المنحنى  $(C_m)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متميزتين.
3. عيّن قيم  $m$  بحيث المنحنى  $(C_m)$  لا يقطع حامل محور الفواصل.
4. عيّن قيم  $m$  بحيث المنحنى  $(C_m)$  يشمل النقطة  $A(2, -3)$ .

الحل موجود في الصفحة 17

**التمرين رقم (6) :** نعتبر المعادلة:  $x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0 \dots (1)$

(1) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية :

④  $x^2 + 3x - 4 = 0$

②  $x^2 + x + 2 = 0$

①  $x^2 + x - 3 = 0$

(2) أثبت أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة (2)  $(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0 \dots (2)$

(3) إستنتج حلول المعادلة (2)

(4) حل المتراجحة  $\frac{x^4 + 2x^3 - x - 6}{x} \leq 0$

الحل موجود في الصفحة 18

### تمرين 1 :

لتكن المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي  $x$  :  $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2 = 0$  (E)

1. أثبت أن المميز،  $\Delta = (3 - \sqrt{3})^2$ ، ثم استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلين متميزين:  $\alpha$  و  $\beta$  (حسابهما غير مطلوب).

2. أحسب  $\alpha^2 + \beta^2$  دون حساب  $\alpha$  و  $\beta$ .

3. (أ) تحقق من أن  $\alpha = 2$  هو حل للمعادلة (E) ثم استنتج قيمة  $\beta$  الحل الآخر للمعادلة (E).

(ب) حل ثلاثي الحدود  $P(x)$  حيث :  $P(x) = x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2$ ، ثم ادرس اشارته.

(ج) حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة :  $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2\sqrt{3} - 2 < 0$

(د) حل في  $\mathbb{R}$  الجملة ذات المجهولين  $a$  و  $b$  :

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{3} + 1 \\ ab = 2\sqrt{3} - 2 \end{cases}$$

### تمرين 2 :

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1. احسب  $f(3)$  ثم استنتج تحليلا لـ  $f(x)$  إلى جداء عاملين.

2. حل في  $\mathbb{R}$  ما يلي :  $f(x) = 0$  ;  $f(x) < 0$

3. حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة :  $\frac{2x^4 - 10x^2 + 8}{x^2 + x - 2} \geq 0$

### تمرين 3 :

ليكن  $f_m(x)$  كثير حدود لمتغير  $x$  حيث :  $f_m(x) = (m-2)x^2 - (m+1)x + m-2$

1. احسب  $f_0(0)$  و  $f_2(-1)$ .

2. حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية :  $f_1(x) = 0$  و  $f_2(x) = 0$ .

3. حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات التالية :  $f_1(x) \geq 0$  و  $f_2(x) \leq 0$ .

4. عين قيم  $m$  حتى يكون  $x_1 = 1$  حل للمعادلة  $f_m(x) = 0$  ثم استنتج الحل الثاني  $x_2$ .

5. عين قيم  $m$  في كل حالة من الحالات التالية :

(أ)  $f_m(x)$  كثير حدود من الدرجة الثانية.

(ب) المعادلة  $f_m(x) = 0$  لا تقبل حلول.

(ج) المعادلة  $f_m(x) = 0$  تقبل حل مضاعف.

(د) المعادلة  $f_m(x) = 0$  تقبل حلين متميزين.

(هـ) المعادلة  $f_m(x) = 0$  تقبل حل وحيد.

(و) المعادلة  $f_m(x) = 0$  تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

# كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

(ج) المعادلة  $f_m(x) = 0$  تقبل حلين متناظرين.

تمرين 4 :

نعتبر في  $\mathbb{R}$  المعادلة ذات المجهول  $x$ :  $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0 \dots (1)$

1. بين أن 0 ليس حلا للمعادلة (1).

2. بين أنه يمكن كتابة المعادلة (1) على الشكل:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \dots (2)$$

3. بوضع:  $u = x + \frac{1}{x}$ ، أحسب  $u^2$  بدلالة  $x$ .

4. بين أن المعادلة (2) تكتب على الشكل  $6u^2 - 5u - 50 = 0 \dots (3)$

5. حل المعادلة (3) ثم استنتج حلول المعادلة (1).

تمرين 5 :

نعتبر في المجموعة  $\mathbb{R}$  كثير الحدود  $P(x)$  المعروف بـ:  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ .

1. أحسب  $P(1)$ ، ماذا نستنتج

2. أوجد كثير الحدود  $Q(x)$  حيث من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$ :  $P(x) = (x-1)Q(x)$

3. حل كثير الحدود  $P(x)$  إلى جداء عوامل. ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $P(x) = 0$

4. استنتج حلول المعادلة:  $|x-1| - 4(x-1)^2 + 5x - 1 - 2 = 0$ .

5. نضع:  $g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$ .

(أ) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة:  $x^2 + x - 2 = 0$

(ب) عين قيم العدد الحقيقي  $x$  بحيث يكون للعبارة  $g(x)$  معنى.

(ج) حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $g(x) \leq 0$ .

تمرين 6 :

1.  $P(x)$  كثير حدود و  $\alpha$  عدد حقيقي حيث:  $P(x) = x^3 - (6 + \alpha)x^2 + (13 - \alpha)x - (\alpha - 14)$

(I) عين العدد  $\alpha$  حتى يكون 3 جذر لكثير الحدود  $P(x)$

(II) نضع  $\alpha = 2$  أي:  $P(x) = x^3 - 8x^2 + 11x + 12$ .

1. عين الأعداد الحقيقية  $a$ ,  $b$  و  $c$  بحيث:  $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$

2. حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $P(x) = 0$

3. استنتج حلول المعادلة:  $x\sqrt{x} - 8x + 11\sqrt{x} + 12 = 0$

4. استنتج حلول المعادلة:  $P(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{x-1}{2}\right) + 12 = 0$

5. حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $P(x) \leq 0$  ثم استنتج إشارة  $P\left(\frac{2021}{2022}\right)$

# كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

تمرين 7 :

نعتبر كثير الحدود  $P_m(x)$  حيث:  $P_m(x) = (m^2 - 4)x^4 + (m + 1)x^3 - (2 + m)x^2 - \frac{5}{2}mx + 2 = 0$

1. عين قيم  $m$  حتى يكون  $P_m(x)$  من الدرجة الثالثة .

2. تحقق أن 2 جذر لكثير الحدود  $P_2(x)$

3. عين الأعداد الحقيقية  $a, b$  و  $c$  بحيث :  $P_2(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

4. حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $3x^2 + 2x - 1 = 0$

استنتج في  $\mathbb{R}$  حلول المعادلة  $P_2(x) = 0$

5. أدرس إشارة  $P_2(x)$  ثم استنتج في  $\mathbb{R}$  حلول المتراجحة :  $3x^3 + 2 \leq 4x^2 + 5x$

BTX

27/10/2021

16:43:00

صفحة الأستاذ وليد لويجي مادة الرياضيات

### حل التمرين رقم (1) الموجود في الصفحة 9:

1. التحقق أن  $\alpha = 1$  جذر لكثير الحدود  $P(x)$

$$P(1) = 0 \quad \text{ومنـه} \quad P(1) = -4(1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) - 3 = -4 + 3 + 4 - 3 = 0$$

2. تعيين كثير الحدود  $q(x)$

$$P(x) = (x-1)q(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b - a = 3 \\ c - b = 4 \\ -c = -3 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد :}$$

$$\text{إذن : } a = -4 \quad \text{و} \quad b = -1 \quad \text{و} \quad c = 3$$

$$\text{وبالتالي } P(x) = (x-1)(-4x^2 - x + 3)$$

3. حل المعادلة  $P(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 & (1) \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$P(x) = 0 \text{ معناه } (x-1)(-4x^2 - x + 3) = 0 \text{ يكافئ}$$

يكافئ

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ -4x^2 - x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

4. حل المعادلة (2)

$$\text{لدينا : } \Delta = 49 > 0 \text{ ومنـه للمعادلة (2) حلين هما : } x_2 = -1 \text{ و } x_3 = \frac{3}{4}$$

$$\text{ومنـه حلول المعادلة } P(x) = 0 \text{ هي } x_2 = -1 \text{ و } x_3 = \frac{3}{4}$$

### حل التمرين رقم (2) الموجود في الصفحة 9:

$$(m^2 - 4)x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0 \quad \text{نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي } x \text{ والوسيط } m :$$

حتى تكون المعادلة (E) من الدرجة الثانية، يجب أن يكون  $m^2 - 4 \neq 0$

$$\text{معناه } m^2 \neq 4 \text{ يكافئ } m \neq 2 \text{ أو } m \neq -2 \text{ إذن } m \in ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

## كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

② تعيين قيمة  $m$  حتى يكون 0 حلا للمعادلة (E):

$$\text{لدينا } m^2 - 2m + 1 = 0 \text{ يكافئ } (m^2 - 4)(0)^2 - 2m \times (0) + m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$\text{يكافئ } (m - 1)^2 = 0 \text{ إذن للمعادلة } m^2 - 2m + 1 = 0 \text{ حل مضاعف هو } m = 1$$

تعيين الحل الآخر للمعادلة (E) من أجل  $m = 1$

$$\text{من أجل } m = 1 \text{ في المعادلة (E) لدينا : } -3x^2 - 2x = 0 \text{ معناه : } x(-3x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ -3x - 2 = 0 \end{cases}$$

يكافئ : أي : أو

**حل التمرين رقم (3) الموجود في الصفحة 9:**

نعتبر كثير الحدود  $P(x)$  حيث:  $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ .

1. إثبات أن  $(-1)$  جذر لـ  $P(x)$  :

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3$$

$$= -1 - 3 + 1 + 3 = 0$$

2. تعيين كثير الحدود  $Q(x)$  حيث :  $P(x) = (x + 1)Q(x)$  :

باستعمال القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - x + 3 & x + 1 \\ -x^3 - x^2 & x^2 - 4x + 3 \\ \hline -4x^2 - x & \\ 4x^2 + 4x & \\ \hline 3x + 3 & \\ -3x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{ومنه } Q(x) = x^2 - 4x + 3$$

3. دراسة إشارة  $P(x)$  حسب قيم  $x$  :

$$P(x) = 0 \text{ معناه } (x + 1)Q(x) = 0 \text{ أي } x + 1 = 0 \text{ (نعلم أن } (-1) \text{ جذر لـ } P(x) \text{) ، و } Q(x) = 0 : Q(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$$

باستعمال المميز  $\Delta$  :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3$$

$$= 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

# كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

ومنه :

| $x$     | $-\infty$ | $-1$         | $1$          | $3$          | $+\infty$    |              |     |
|---------|-----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-----|
| $(x+1)$ | $-$       | $\mathbf{0}$ | $+$          | $+$          | $+$          |              |     |
| $Q(x)$  | $+$       | $+$          | $\mathbf{0}$ | $-$          | $\mathbf{0}$ | $+$          |     |
| $P(x)$  | $-$       | $\mathbf{0}$ | $+$          | $\mathbf{0}$ | $-$          | $\mathbf{0}$ | $+$ |

• استنتاج مجموعة التعريف  $D_k$  للدالة  $k$  المعرفة بـ:  $k(x) = \sqrt{P(x)}$  :  
يكافئ  $P(x) \geq 0$  ومن جدول الإشارة السابق نجد :  $x \in [-1; 1] \cup [3; +\infty[$ .

## حل التمرين رقم (4) الموجود في الصفحة 9:

1. تعيين العددين  $\alpha$  و  $\beta$  حتى يكون  $(-1)$  جذرا لكثير الحدود  $f(x)$  و  $f(0) = 2$  :  
 $(-1)$  جذر لكثير الحدود  $f(x)$  معناه:

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 2(-1)^2 + \alpha(-1) + \beta \\ &= -1 - 2 - \alpha + \beta \\ &= -3 - \alpha + \beta = 0 \end{aligned}$$

$$\text{إذن : (1) } \beta - \alpha = 3$$

$$\text{لدينا } f(0) = 2 \text{ معناه : } 0^3 - 2 \times 0^2 + \alpha \times 0 + \beta = 2 \text{ ومنه (2) } \beta = 2$$

$$\text{بتعويض (2) في (1) نجد } \alpha = \beta - 3 \text{ أي } \alpha = 2 - 3$$

$$\text{ومنه } \alpha = -1 \text{ وبالتالي : } f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$2. \text{ نعتبر فيما يلي : } \alpha = -1 \text{ و } \beta = 2$$

(أ) إيجاد كثير حدود  $g(x)$  حيث :  $f(x) = (x+1)g(x)$

$f(x)$  كثير حدود من الدرجة الثالثة و  $(-1)$  جذر له ، إذن يقبل تفكيكا من الشكل :  $f(x) = (x+1)g(x)$  .  
بإجراء القسمة الإقليدية نجد :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - x + 2 & x+1 \\ -x^3 - x^2 & \hline -3x^2 - x & \\ 3x^2 + 3x & \hline 2x + 2 & \\ -2x - 2 & \hline 0 & \end{array}$$

# كثيرات الحدود للسنة الثانية شعب علمية

ومنه :  $f(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 2)$

ب) نحل في  $\mathbb{R}$  ما يلي :  $f(x) = 0$  و  $f(x) > 0$

$f(x) = 0$  معناه  $(x+1)g(x) = 0$  أي  $x+1 = 0$  (نعلم أن  $(-1)$  جذر لـ  $(f(x))$  ، و  $g(x) = 0$  :

$g(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$  باستعمال المميز  $\Delta$  :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2$$

$$= 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

إذن :  $S_{f(x)} = \{-1; 1; 2\}$

حل المتراجحة  $f(x) > 0$  في  $\mathbb{R}$  :

| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |     |     |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x+1$  | $-$       | $0$  | $+$ | $+$ | $+$       |     |     |
| $g(x)$ | $+$       | $+$  | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ |     |
| $f(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |

وبالتالي حلول المتراجحة  $f(x) > 0$  في  $\mathbb{R}$  هي  $x \in ]-1; 1[ \cup ]2; +\infty[$

## حل التمرين رقم (5) الموجود في الصفحة 10 :

1. تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى  $(C_2)$  مع حامل محور الفواصل.

لدينا :  $f_2(x) = x^2 - 2x + 1$  فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_2)$  مع حامل محور الفواصل هي حلول المعادلة  $f_2(x) = 0$  ومنه :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ يكافئ } (x-1)^2 = 0 \text{ أي } x = 1 \text{ وبالتالي : } (C_2) \cap (xx') = \{(1, 0)\}$$

2. تعيين قيم  $m$  بحيث المنحنى  $(C_m)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين متميزتين.

معناه أن المعادلة  $f_m(x) = 0$  تقبل حلين متميزين في  $\mathbb{R}$ .

نحل المعادلة :  $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$

$$\Delta_m = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$$

# كثيرات الحدود للسنت الثانية شعب علمية

| $m$        | $-\infty$ | $-2$         | $2$          | $+\infty$    |     |
|------------|-----------|--------------|--------------|--------------|-----|
| $m-2$      | $-$       | $-$          | $\mathbf{0}$ | $+$          |     |
| $m+2$      | $-$       | $\mathbf{0}$ | $+$          | $+$          |     |
| $\Delta_m$ | $+$       | $\mathbf{0}$ | $-$          | $\mathbf{0}$ | $+$ |

المعادلة:  $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$  تقبل حلين متميزين لما  $\Delta_m > 0$  أي:  $m \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$ .

3. تعيين قيم  $m$  بحيث المنحنى  $(C_m)$  لا يقطع حامل محور الفواصل.

معناه أن المعادلة:  $f_m(x) = x^2 - mx + 1 = 0$  لا تقبل حلولاً في  $\mathbb{R}$  يكافئ  $\Delta_m < 0$  أي  $m \in ]-2, 2[$ .

4. تعيين قيم  $m$  بحيث المنحنى  $(C_m)$  يشمل النقطة  $A(2, -3)$ .

$A(2, -3) \in (C_m)$  يكافئ  $f_m(2) = -3$  ومنه  $4 - 2m + 1 = -3$  أي  $m = 4$ .

## حل التمرين رقم (6) الموجود في الصفحة 10:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0 \dots (1)$$

1. حل المعادلات:

إذا  $\Delta > 0$  للمعادلة حلان مختلفان هما

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-3 - \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{25}}{2}$$

$$x_2 = 1$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

حساب  $\Delta$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(1)(2)$$

$$\Delta = -7$$

إذا  $\Delta < 0$  للمعادلة ليس لها حل

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

حساب  $\Delta$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (3)^2 - 4(1)(-4)$$

$$\Delta = 25$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

حساب  $\Delta$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(1)(-3)$$

$$\Delta = 13$$

إذا  $\Delta > 0$  للمعادلة حلان مختلفان هما

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

2. إثبات أن المعادلة (2) تكافئ المعادلة (1):

$$(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0 \dots (2)$$

$$(x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$$

$$((x^2 + x) - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4 = 0$$

$$((x^2 + x)^2 + (2)^2 - 2(x^2 + x)(2) + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3 + 4 - 4x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + x^2 + 2x^3 + 4 - 4x^2 - 4x + 3x^2 + 3x - 6 - 4 = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0$$

3. إستنتاج حلول المعادلة (2):

بوضع  $X = x^2 + x - 2$  المعادلة (2) تكافئ المعادلة:  $x^2 + 3x - 4 = 0$  وعليه :

لما  $X = -4$  نجد  $x^2 + x - 2 = -4$  أي  $x^2 + x + 2 = 0$  ومن السؤال 1 نجد أن المعادلة لا تقبل حل.

لما  $X = 1$  نجد  $x^2 + x - 2 = 1$  أي  $x^2 + x - 3 = 0$  ومن السؤال 1 نجد حلول المعادلة هما :

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right\} \text{ ومنه :}$$

4. حل المتراجحة :

بما أن  $x^4 + 2x^3 - x - 6 = (x^2 + x - 2)^2 + 3(x^2 + x - 2) - 4$  نجد أن

$$x^4 + 2x^3 - x - 6 = (x^2 + x - 2 + 4)(x^2 + x - 2 - 1)$$

$$= (x^2 + x + 2)(x^2 + x - 3)$$

| $x$                            | $-\infty$ | $\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ | $0$ | $\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ | $+\infty$ |
|--------------------------------|-----------|----------------------------|-----|----------------------------|-----------|
| $x^2 + x + 2$                  | +         | 0                          | +   | +                          | +         |
| $x^2 + x - 3$                  | +         | +                          | 0   | 0                          | +         |
| $x^4 + 2x^3 - x - 6$           | +         | 0                          | -   | 0                          | +         |
| $x$                            | -         | 0                          | -   | +                          | +         |
| $\frac{x^4 + 2x^3 - x - 6}{x}$ | -         | 0                          | +   | -                          | +         |

وبالتالي حلول المتراجحة هي :  $x \in \left] -\infty; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right[ \cup \left] 0; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right[$