الذكاء بلا طموح، كالطيور بلا أجنحة.

* :تمثل درجة الصعوبة

تعريف: الجداء السلمي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز إليه بالرمز $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف بـ:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

مبرهنة1: إذا كانت، في معلم متعامد و متجانس، إحداثيات $\vec{u}$ هي (x,y) و كانت إحداثيات $\vec{v}$ هي (x',y') فإن:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

مبرهنة2: القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان يعني أن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

التمرين رقم 01 *

ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $AB=AC=BC=3$ و لتكن النقط A'، B' و C' منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$،$[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.

أحسب الجداءات السلمية الآتية بطريقتين مختلفتين:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{AB}$.

التمرين رقم 02 *

$ABCD$ مربع طول ضلعه a. I و J هما النقطتان المعرفتان بـ: $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

1. أحسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{CJ}$، $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CJ}$

بكتابة $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}$ أثبت أن $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=0$. ماذا تستنتج ؟

مبرهنة: إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}\neq\vec{0}$ و كان $\vec{v'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{v'}$$

التمرين رقم 03**

أصحيح أم خاطئ .

1 الجداء السلمي لشعاعين هو عدد حقيقي موجب .

2 إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شاعين مرتبطين خطيا فإن : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

3 من أجل كل شعاع $\vec{u}$ ، $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$ إذن $\vec{u}=\|\vec{u}\|$

4 إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$ فإن $\vec{u}=0$ أو $\vec{v}=0$.

5 إذا كان $\|\vec{u}\|=1$ ، $\|\vec{u}\|=2$ و $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{2\pi}{3}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=-1$

6 إذا كان $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$ ، $\|\vec{u}\|=1$ و $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\frac{\pi}{4}$ فإن $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=4$

7 من أجل كل الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$، $\left(2\vec{u}-\vec{v}\right).\vec{w}=2\left(\vec{u}.\vec{w}\right)-\vec{v}.\vec{w}$

8 من أجل كل شعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ ، $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

9 إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$ فإن $\vec{v}=\vec{w}$.

10 إذا علمنا أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2$ فإن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A .

11 A نقطة و $\vec{u}$ شعاع غير معدوم. مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ هي مستقيم .

12 في معلم متعامد ومتجانس ، معادلة الدائرة ذات المركز $A(1;2)$ ونصف القطر 2 هي $x^2+y^2-2x-4y+1=0$

13 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}\right)$.

14 من أجل كل عدد حقيقي x ، $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$.

15 إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ فإن $\|\vec{u}\|=3$.

16 إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=-5$.

17 إذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ فإن $\vec{u}\perp\vec{v}$

يتكلم العاقل عن أفكاره و الذكي عن أعماله و السوقي عن طعامه

الأستاذ: مزروح يوسف.........رقم الهاتف:0771-546-871..................... البريد الإلكتروني:mezrouh.youcef7@gmail.com

التمرين رقم 04 *

A و B نقطتان من المســـتوي . مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق العلاقة : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي :

أ) محور القطعة $[AB]$.

ب) الدائرة ذات القطر $[AB]$.

ج) المستقيم (AB) .

التمرين رقم 05 *

$ABCD$ مربع حيث $AB=6$ و I نقطة تقاطع قطريه.

احسب الجداءات السلمية التالية:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ ، $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ ، $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BI}$

التمرين رقم 06 **

ABC مثلث حيث $AB=2$ و $AC=3$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4$.

هل هذا المثلث قائم في A ؟ علل.

التمرين رقم 07 **

ABC مثلث متساوي الساقين و قائم في B و ACD مثلث متقايس الأضلاع. علما أن $AC=6$

1) احسب الجداءات السلمية التالية $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$ ، $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$

2) احسب DH حيث H هو المسقط العمودي لـ B على المستقيم (DC) .

3) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$ و استنتج قيمة $\cos DCB$

تعريف: القول أن الشعاع غير المعدوم $\vec{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني أن $\vec{n}$ عمودي على شعاع توجيه لِـ(D)

-

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس يكون لكل مستقيم حيث الشعاع غير المعدوم $\vec{n}(a,b)$ شعاع ناظمي له معادلة من الشكل: $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي.

التمرين رقم 08 **

عين معادلة ديكارتية للمستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية:

أ) (D) يشمل $A(2;-1)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له.

ب) (D) يشمل $A(-\sqrt{2};1)$ و عمودي على المستقيم (BC) حيث $B(-2;1)$ و $C(5;2)$

جـ) (D) يشمل O و عمودي على المستقيم الذي معادلته $2x+3y-6=0$

التمرين رقم 09 **

D_1 و D_2 مستقيمان معادلتاهما على الترتيب:

$y=2x+1$ و $y=-\dfrac{1x+3}{2}$

1)عين شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ لـ D_1 و شعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ لـ D_2

2) احسب $\vec{n_2}$. $\vec{n_1}$.

3) ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين D_1 و D_2 ؟

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و نصف قطرها r $(r>0)$ هي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

التمرين رقم 10 **

$(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس.

1. عين معادلة (C) الدائرة التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$.

2. عين معادلة (C') الدائرة التي قطرها $[AB]$ علما أن $A(-2,-1)$ و $B(-3,2)$.

3. بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2-2x-3=0$ دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

هل (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث $x^2+y^2+2x-4y+8=0$ دائرة ؟

الحوار يثري الذكاء ولكن الوحدة هي مدرسة العبقرية.

نحن معشر الرياضيين دائما ما نجد لدينا مسحة من الجنون

أ) **التمرين رقم 11 ****

A و B نقطتان احداثييهما على الترتيب $(-3;2)$ و $(2;0)$.

1) عين معادلة الدائرة التي قطرها $[AB]$.

2) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في النقطة B

التمرين رقم 12 **

لتكن النقط $A(1;3)$ ، $B(3;0)$ و $C(-5;-1)$.

1) بين أن المثلث ABC قائم.

2) عين معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC.

3) عين معادلة لمماس هذه الدائرة في الذي A.

التمرين رقم 13 ***

لتكن $A\left(0;\dfrac{9}{2}\right)$ و (D) المستقيم الذي معادلته $4x+3y-1=0$.

1) عين معادلة المستقيم Δ العمودي على (D) و الذي يشمل A.

2) عين احداثيي نقطة تقاطع Δ و (D).

3) استنتج المسافة بين A و (D).

مبرهنة: A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

قاعدة المساحة

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ و S مساحة المثلث ABC. لدينا العلاقات التالية:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad (1)$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \quad (2)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad (3)$$

التمرين رقم 14 ***

ABC مثلث حيث: $BC=8$ ، $B=50°$ و $C=70°$.

1. أحسب A.

أحسب AB و AC ثم عين مدور كل منهما إلى 10^{-2}

التمرين رقم 15 **

عين في كل حالة من الحالات التالية معادلة للدائرة (C)

أ) (C) مركزها $A(-1;2)$ و نصف قطرها $R=3$.

ب) (C) تشمل النقطة $A(4;1)$ ومركزها $B(2;3)$.

جـ) (C) قطرها $[AB]$ حيث $A(2;1)$ و $B(4;-1)$

التمرين رقم 16 **

(E) مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث

$$x^2+y^2-10x+4y+23=0$$

ما هي طبيعة المجموعة (E)؟ أعط عناصرها المميزة

التمرين رقم 17 **

$ABCD$ مستطيل و M نقطة كيفية من المستوى.

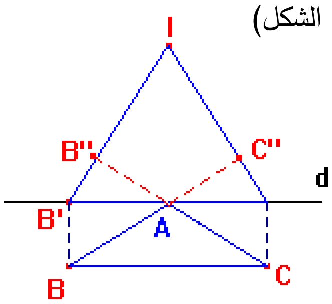
بين أن: $MD^2MC^2=MA^2+MB^2$

التمرين رقم 18 ***

ABC مثلث و d مستقيم يشمل A. B' المسقط العمودي لـ B على d. C' المسقط العمودي لـ C على d. B'' المسقط العمودي لـB' على (AC)

C'' المسقط العمودي لـC' على (AB)

نفرض أن المستقيمين $(B'B'')$ و $(C'C'')$ يتقاطعان في I. (انظر الشكل)



1) بين أن :

أ) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC'}$

ب) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB'}$

2) استنتج أن المستقيمين (AI) و (BC) متعامدان

العبقرية هي واحد في المئة إلهام و 99 في المئة عرق.

لنكن من لا يرتكب كل الأخطاء بنفسه، بل يترك الفرصة لغيره.

التمرين رقم 19 **

في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ (C) هي الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

T نقطة احداثييها $(3;4)$

1) أ) عين احداثيي النقطة Ω مركز الدائرة (C) و نصف قطرها .

ب) ارسم الدائرة (C) . مثل T .

2) نرسم من T المماسين للدائرة (C) و نسمي A_1 و A_2 نقطتي التماس.

أ) بين أن A_1 و A_2 تنتميان إلى الدائرة (C') ذات القطر $[\Omega T]$.

ب) أعط معادلا للدائرة (C').

ج) عين احداثيي A_1 و A_2.

د) عين معادلة لكل مماس.

المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي: $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

التمرين رقم 20 ***

❖ أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (D) ذو المعدلة: $y=2x+1$

❖ عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2,1)$ و تمس المستقيم (D) ذو المعادلة:

$x+y-2=0$

❖ لتكن (C') مجموعة النقط $M(x,y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-6y-3=0$

- بين أن (C') دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
- هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') ؟

التمرين رقم 21 *

(D) المستقيم الذي معادلته $y=x-1$

و A النقطة التي احداثييها $(2;3)$.

نرمز بـ H إلى المسقط العمودي للنقطة A على (D).

1) ماذا يمكن القول عن الشعاع $\overrightarrow{AH}$ ؟

2) عين احداثيي النقطة H.

3) احسب المسافة AH.

التمرين رقم 22 *

لتكن النقط $A\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$ ، $B(-1;3)$ و $C(5;-1)$

H هي المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

1) عين شعاع $\vec{n}$ ناظميا على (BC).

2) احسب $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ بطريقتين.

استنتج المسافة AH

المحل الهندسي

التمرين رقم 23 *

ABC مثلث .ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ؟

التمرين رقم 24 ***

ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث:

أ) $\left(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB}=0$ ؟

ب) $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ ؟

التمرين رقم 25 ***

A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$

1) بين أن من أجل كل نقطة M من المستوي يكون:

$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}$

2) نفرض أن $AB=1$

- عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

$MA^2-MB^2=2$

التمرين رقم 26 ***

A و B نقطتان من المستوي حيث $AB=4$.

ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث $MA^2+MB^2=16$ ؟

ادرس بذكاء وليس بجهد

ليست الفكرة في أني فائق الذكاء، بل كل ما في الأمر أني أقضي وقتا أطول في حل المشاكل!

الذكاء كالنهر، كلما ازداد عمقا قلت ضوضاؤه

دساتير التحويل في حساب المثلثات

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\sin 2a=2\sin a\cos a \qquad \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$$
$$\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$$

التمرين رقم 27 **

بملاحظة $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}$ أحسب القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

أحسب $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

التمرين رقم 28 ***

أكتب بدلالة $\sin 2x$ كل من العبارتين التاليتين :

$(\cos x+\sin x)^2$ ؛ $(\cos x-\sin x)^2$.

التمرين رقم 29 ***

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

أ) $\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x=0$.

ب) $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$.

ج) $\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x.\cos^2 x=1$

مسائل

المسألة رقم 01

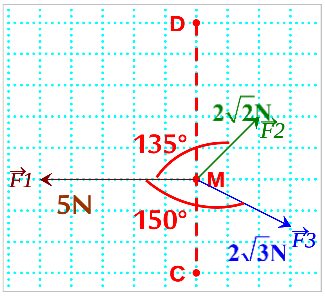
ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A .

O منتصف القطعة $[BC]$ ، و H المسقط العمودي للنقطة O على $[AC]$. I منتصف $[OH]$.

برهن أن المستقيمين (AI) و (BH) متعامدان

المسألة رقم 02

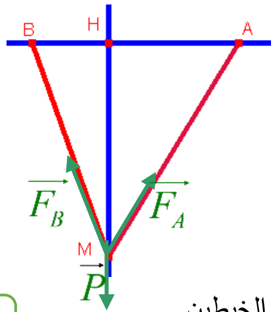
نقول عن جسم أنه في توازن إذا كان مجموع القوى معدوما .



1) جسم M متعرض إلى ثلاث قوى كما هو مبين في الشكل .

أ) هل الجسم في توازن ؟

ب) عين العمل لمحصلة القوى $\vec{R}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}$ إذا كان الجسم يتحرك من D إلى C ، حيث $DC=4cm$.



2) جسم M كتلته m مثبت بخيطين معلقين في عريضة أفقية في A و B . الجملة في توازن أي : $\vec{P}+\vec{F_A}+\vec{F_B}=\vec{0}$ ، حيث $\vec{P}$ هو ثقل الجسم ، $\vec{F_A}$ $\vec{F_B}$ توترا الخيطين .

يعطى $\|\vec{P}\|=50$ ، $\|\vec{F_A}\|=35$ و $\|\vec{F_B}\|=40$.

عين زوايا المثلث ABM .

المسألة رقم 03

في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعرف النقطة $A(-2\,;5)$ والمستقيم (d) ذي المعادلة $y=-3x+1$

الهدف هو حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (d) باستعمال طريقتين .

الطرقة الأولى :

نعين النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (d) .

أ) عين معادلتين تربط بين إحداثيي النقطة H . ثم أحسب إحداثيي النقطة H .

ب) عين المسافة AH .

الطريقة الثانية :

أ) أثبت أن النقطة $B(1\,;-2)$ تنتمي إلى المستقيم (d)

ب) نضع $\vec{u}(1\,;-3)$ ، تحقق أن $\vec{u}$ هو شعاع التوجيه للمستقيم (d) .

اشرح لماذا القول أن M تنتمي إلى (d) راجع إلى إيجاد عدد حقيقي k حيث : $\vec{BM}=k.\vec{u}$.

ج) جد القيمة الحدية الصغرى للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(k)=10k^2+48k+58$. أحسب AM^2 .

د) استنتج .

بعد المسافة لا يهم... الخطوة الأولى فقط هي الأكثر صعوبة.