المسألة رقم 02 :

لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x-1}-2$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقق أن الدالة f هي مركب دالتين u و v يطلب تحديد عبارتيهما .

2) إعتمادا على إتجاه تغير كل من الدالتين u و v إستنتج إتجاه تغير الدالة f .

3) حل في المجال $[1,+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

4) إشرح كيف يمكن إنشاء (C_f) إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة " الجذر التربيعي " .

5) لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=|f(x)|$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني .

- أكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة .
- إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) إنطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة f ثم أنشئ (C_g) .

6) h الدالة المعرفة بـ : $h(x)=\sqrt{|x|-1}-2$

- عين D_h مجموعة تعريف الدالة h .
- إشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إنطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة f ثم أنشئ (C_h) .

حل مقترح :

1) التحقق أن الدالة f هي مركب دالتين u و v يطلب تحديد عبارتيهما :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & x-1 \arrow[r, "v"] & \sqrt{x-1}-2 \end{tikzcd}$$

$f = v \circ u$ بحيث : $u : x \mapsto x-1$ و $v : x \mapsto \sqrt{x}-2$

2) إعتمادا على إتجاه تغير كل من الدالتين u و v إستنتاج إتجاه تغير الدالة f :

u دالة تآلفية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن $1 \succ 0$ و بصفة خاصة فهي **<u>متزايدة تماما</u>** على المجال $[1,+\infty[$.

من أجل كل $x \in [1,+\infty[$ فإن $x \geq 1$ و منه يكون $x-1 \geq 0$ أي من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1,+\infty[$ فإن : $u(x) \geq 0$ أي $u(x) \in [0,+\infty[$.

الدالة v إتجاه تغيرها على المجال $[0,+\infty[$ من إتجاه تغير الدالة المرجعية : $x \mapsto \sqrt{x}$ بحيث الدالة الجذر التربيعي متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$ و منه تكون الدالة v أيضا **<u>متزايدة تماما</u>** على المجال $[0,+\infty[$.

<u>نتيجة</u> : للدالتين u و v نفس إتجاه التغير و منه نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$.

3) نحل في المجال $[1,+\infty[$ المعادلة : $f(x)=0$ ثم نفسر النتيجة هندسيا :

$f(x)=0$ تكافئ : $\sqrt{x-1}-2=0$ معناه $\sqrt{x-1}=2$ أي $x-1=2^2$ و منه نجد : $x=5$

<u>التفسير الهندسي</u> : (C_f) التمثيل البياني للدالة f يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $x_0=5$

4) شرح كيفية إنشاء (C_f) إنطلاقا من التمثيل البياني للدالة " الجذر التربيعي " :

$f(x)=\sqrt{x-1}-2$ من الشكل $f(x)=k(x+a)+b$ بحيث $k(x)=\sqrt{x}$ و $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$

<u>نتيجة</u> : (C_f) التمثيل البياني للدالة f هو صورة (C_k) التمثيل البياني للدالة " الجذر التربيعي " بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ - في الحالة العامة $\vec{v}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ -

5) لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=|f(x)|$ و ليكن (C_g) تمثيلها البياني .

○ كتابة عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة :

نعلم أن : $\begin{cases} |f(x)| = f(x) & si \quad f(x) \geq 0 \\ |f(x)| = -f(x) & si \quad f(x) \leq 0 \end{cases}$ ؛ إذن ندرس إشارة المقدار $\sqrt{x-1}-2$:

من السؤال 3/ نعلم أن $\sqrt{x-1}-2=0$ من أجل $x=5$.

الآن نبحث عن قيم x بحيث $\sqrt{x-1}-2 \succ 0$: $\sqrt{x-1}-2 \succ 0$ معناه $\sqrt{x-1} \succ 2$ أي

$\sqrt{x-1}^2 \succ 2^2$ و منه $x-1 \succ 4$ أي $x \succ 5$ و بالتالي يكون جدول إشارة العبارة $f(x)$ كما يلي :

x	1		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

• إذا كان $x \in [5,+\infty[$ فإن $f(x) \geq 0$ و منه $|f(x)| = f(x)$ و منه يكون :

$g(x) = f(x) = \sqrt{x-1}-2$

• إذا كان $x \in [1,5]$ فإن $f(x) \leq 0$ و منه $|f(x)| = -f(x)$ و منه يكون :

$g(x) = -f(x) = 2-\sqrt{x-1}$

○ شرح كيفية إنشاء (C_g) إنطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة f :

• **إذا كان** $x \in [5,+\infty[$ **فإنه** $g(x) = f(x)$ **و منه التمثيل البياني** (C_g) **للدالة** g **ينطبق على التمثيل البياني** (C_f) **للدالة** f .

• **إذا كان** $x \in [1,5]$ **فإنه** $g(x) = -f(x)$ **و منه التمثيل البياني** (C_g) **للدالة** g **هو نظير** (C_f) **التمثيل**

البياني للدالة f بالنسبة لمحور الفواصل .

6) h الدالة المعرفة بـ : $h(x)=\sqrt{|x|-1}-2$

تذكير :

- من أجل $a \geq 0$ فإن : $|x| \geq a$ يكافئ : $x \in]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$

- من أجل $a \geq 0$ فإن : $|x| \leq a$ يكافئ : $x \in [-a,a]$

○ تعيين D_h مجموعة تعريف الدالة h :

من الواضح أن : $h(x)=f(|x|)$.

تكون الدالة h معرفة إذا و فقط إذا كان $|x|-1 \geq 0$ أي $|x| \geq 1$ و منه نجد $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

إذن : $D_h =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

○ شرح كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقا من التمثيل البياني (C_f) للدالة f :

يمكن بسهولة أن نبين أن h دالة زوجية (و هي الطريقة المتبعة في أغلب الوضعيات المماثلة) :

من أجل كل $x \in D_h$ أي $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ فإن $x \in]-\infty,-1]$ أو $x \in [1,+\infty[$:

- إذا كان $x \in]-\infty,-1]$ فإن $x \leq -1$ و منه $-x \geq 1$ أي $-x \in [1,+\infty[$ و منه يكون $-x \in D_h$

- إذا كان $x \in [1,+\infty[$ فإن $x \geq 1$ و منه $-x \leq -1$ أي $-x \in]-\infty,-1]$ و منه يكون $-x \in D_h$

(بالمختصر المفيد D_h متناظرة)

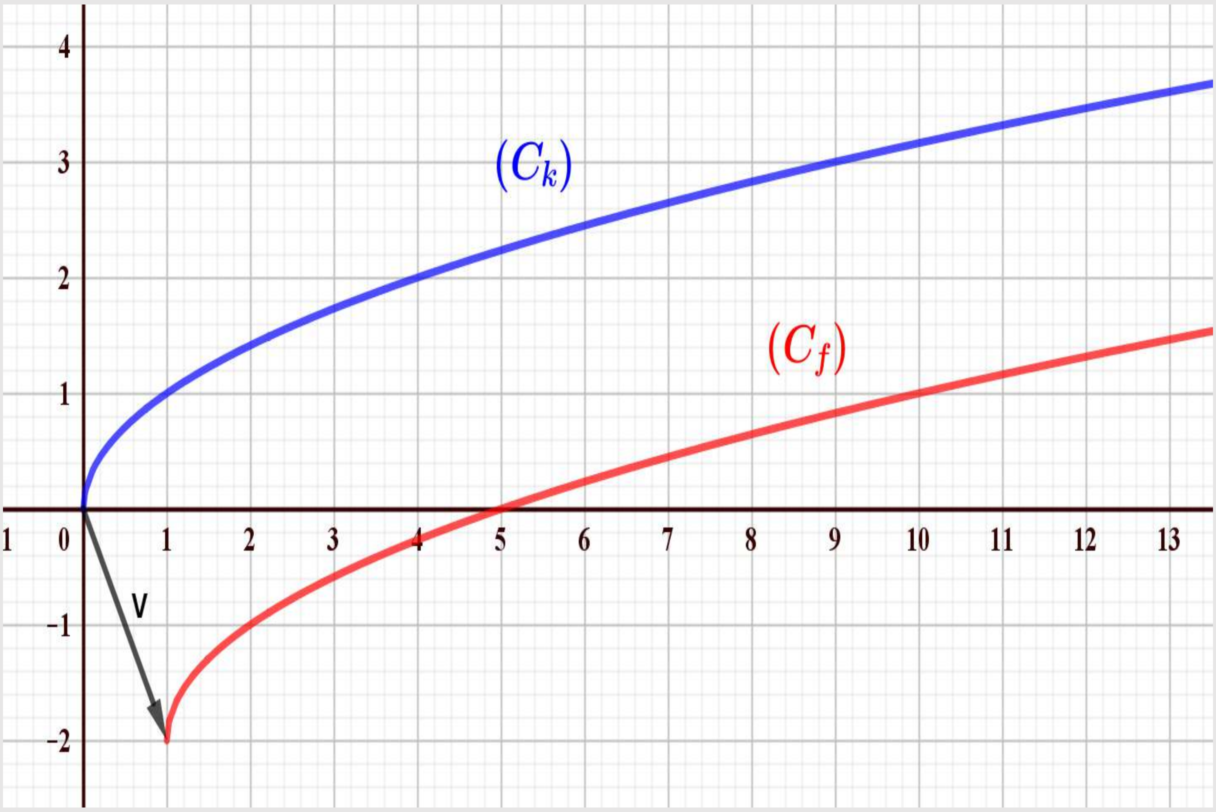
و من جهة أخرى : من أجل $x \in D_h$: $h(-x)=\sqrt{|-x|-1}=\sqrt{|x|-1}-2=h(x)$ لأن $|-x|=|x|$

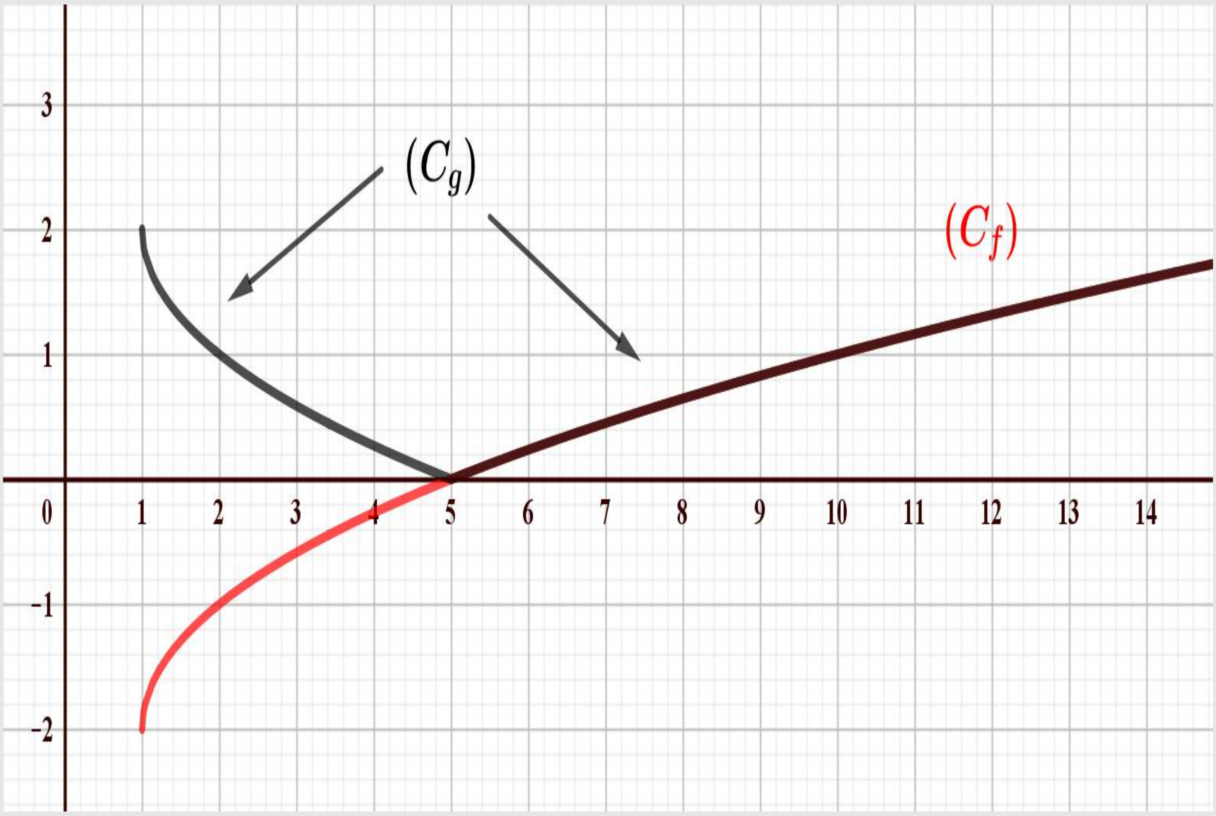
<u>نتيجة</u> : الدالة h زوجية و منه يكون تمثيلها البياني <u>متناظرا بالنسبة لمحور التراتيب</u> .

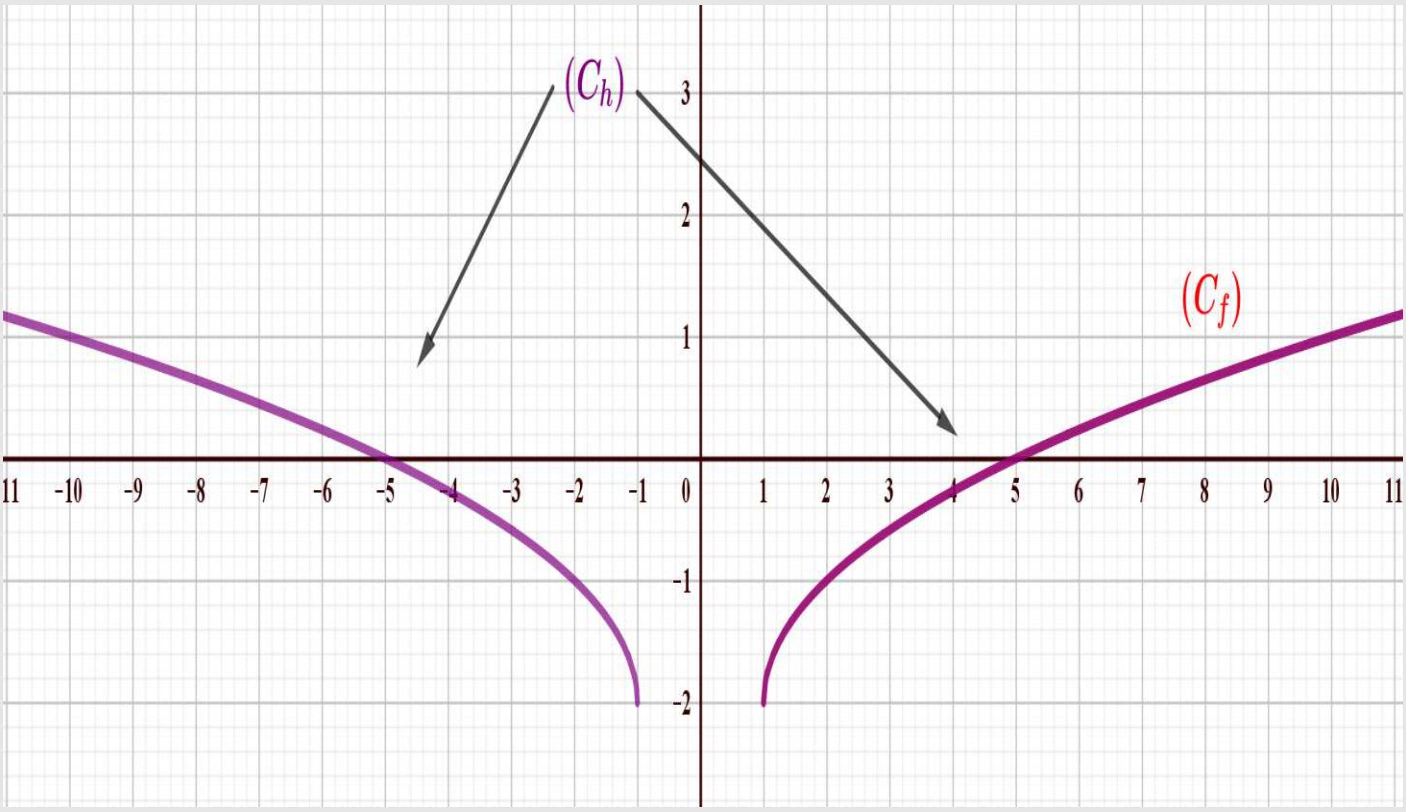
- إذا كان $x \in [1,+\infty[$ فإن : $|x|=x$ و منه يكون $h(x)=f(x)$ ؛ إذن (C_h) <u>ينطبق</u> على (C_f) .

• إذا كان $x \in]-\infty,-1]$ فإن : $|x|=-x$ و منه يكون $h(x)=f(-x)$ ؛ إذن (C_h) **هو نظير** (C_f) **بالنسبة لمحور التراتيب .**

التمثيلات البيانية : من أجل مصلحة التلميذ ننشئ كل منحنى في على حدى







مع تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح ...

<u>الأستاذ</u> : حناش نبيل