# الاشتقاقية وتطبيقاتها

## I. الاشتقاقية

### 1. العدد المشتق، دالة قابلة للاشتقاق عند عدد.

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$. $x_0$ و $x_0+h$ عددان حقيقيان من $I$ مع $h \neq 0$.

نقول أن $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0$ إذا قبلت النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول $h$ إلى $0$، أي $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

تسمى هذه النهاية **العدد المشتق للدالة $f$ عند $x_0$** ونرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

☑ **ملاحظة:**

بوضع $x=x_0+h$ تصبح النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ كما يلي $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

**طريقة:** لدراسة قابلية اشتقاق دالة $f$ عند $x_0$ ندرس نهاية النسبة $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ لما يؤول $h$ إلى $0$، أو ندرس نهاية النسبة $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لما يؤول $x$ إلى $x_0$.

☑ **نتيجة:**

إذا قبلت الدالة $f$ الاشتقاق عند كل عدد حقيقي $x$ من $I$ نقول أنها تقبل الاشتقاق على $I$ وتسمى الدالة $f':x\mapsto f'(x)$ **الدالة المشتقة للدالة $f$**.

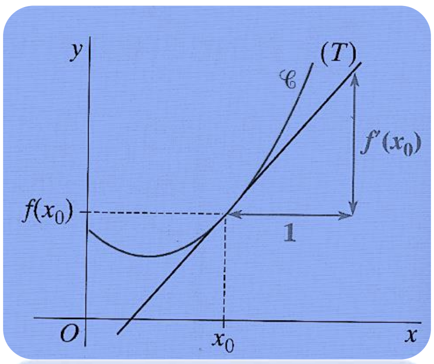
### 2. التفسير الهندسي للعدد المشتق (مماس لمنحنى دالة عند نقطة)

**تعريف وخاصية:** $f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$

وليكن $(C)$ تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

إذا قبلت $f$ الاشتقاق عند $x_0$ من $I$ فإن $(C)$ يقبل عند النقطة $A(x_0\,;\,f(x_0))$ مماسا $(T)$ معامل توجيهه $f'(x_0)$ ومعادلته:

$$(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$



## 3. مشتقات الدوال المألوفة

| $f(x)$ | $f'(x)$ | مجالات قابلية الاشتقاق |
|---|---|---|
| $a$ (حيث $a$ ثابت حقيقي) | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $ax$ (حيث $a$ ثابت حقيقي) | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ ( $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ ) | $n\,x^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |
| $cos(x)$ | $-sin(x)$ | $\mathbb{R}$ |
| $sin(x)$ | $cos(x)$ | $\mathbb{R}$ |

## 4. عمليات على الدوال المشتقة

$f$ و $g$ دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $a$ عدد حقيقي.

| الدالة | $f\pm g$ | $a\times f$ | $f\times g$ | $\frac{1}{g}$ | $\frac{f}{g}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الدالة المشتقة | $f'\pm g'$ | $a\times f'$ | $f'\times g+f\times g'$ | $\frac{-g'}{g^2}$ | $\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$ |
| | | | | الدالة $g$ لا تنعدم على $I$ | |

## 5. مشتقة مركب دالتين

إذا قبلت الدالة $f$ الاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ وقبلت الدالة $g$ الاشتقاق على $f(I)$

فإن الدالة $g\circ f$ تقبل الاشتقاق على $I$ ولدينا من أجل كل $x$ من $I$:

$$(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'\left[f(x)\right]$$

# ii. تطبيقات الاشتقاقية

## 1. المشتقة واتجاه تغير دالة

**مبرهنة (دون برهان):** $f$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

☑ إذا كان من أجل كل $x$ من $I$، $f'(x)>0$ (يمكن أن تكون $f'$ معدومة من أجل قيم منعزلة من $I$)، فإن الدالة $f$ متزايدة تماما على $I$.

☑ إذا كان من أجل كل $x$ من $I$، $f'(x)<0$ (يمكن أن تكون $f'$ معدومة من أجل قيم منعزلة من $I$)، فإن الدالة $f$ متناقصة تماما على $I$.

☑ إذا كان من أجل كل $x$ من $I$، $f'(x)=0$ فإن الدالة $f$ ثابتة على $I$.

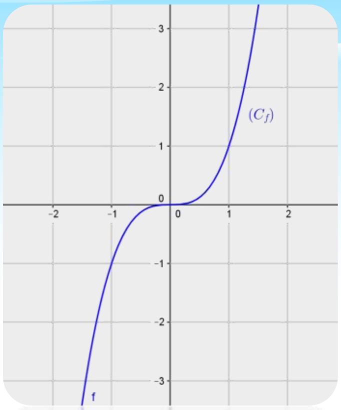
على سبيل المثال:

لتكن $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x)=3x^2$

ومنه: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)>0$ و $f'(0)=0$

إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$




## 2. القيم الحدية المحلية

$f$ دالة معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$ و $x_0$ عدد حقيقي من $I$.

☑ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة $f$ يعني أنه يوجد مجال مفتوح $J$ محتوى في $I$ ويشمل $x_0$ بحيث من أجل كل $x$ من $J$، $f(x)\le f(x_0)$.

☑ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة $f$ يعني أنه يوجد مجال مفتوح $J$ محتوى في $I$ و يشمل $x_0$ بحيث من أجل كل $x$ من $J$، $f(x)\ge f(x_0)$.

☑ نقول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ $f$ يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

**مبرهنة:** لتكن دالة $f$ معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال $I$ و $f'$ دالتها المشتقة.

☑ إذا انعدمت الدالة المشتقة الأولى $f'$ عند قيمة $x_0$ من $I$ مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح $J$ محتوى في $I$ يشمل $x_0$ تقبل فيه $f$ قيمة حدية $f(x_0)$.

تسمى $f(x_0)$ قيمة حدية محلية.

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $f(x_0)$ | ↘ |

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $f(x_0)$ | ↗ |

**:N.B**

☑ يمكن وجود عدة قيم حدية محلية على $I$.

☑ إذا انعدمت الدالة المشتقة $f'$ عند قيمة $x_0$ من $I$ فإن الرسم البياني للدالة $f$ يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها $x_0$.

## 3. حصر دالة:

لتكن دالة $f$ معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $[a,b]$ و $f'$ دالتها المشتقة.

☑ إذا كانت الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[a,b]$ $f(a)\le f(x)\le f(b)$

☑ إذا كانت الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $[a,b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[a,b]$ $f(b)\le f(x)\le f(a)$

**تمرين تطبيقي:** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $[-4,1]$ كما يلي: $f(x)=x^2+2x-1$ .

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $[-4,1]$ و دالتها المشتقة $f'$ هي: $f'(x)=2x+2$ .  بما أن $f'(-1)=0$

الدالة $f'$ سالبة تماما على $[-4,-1]$ وإذن الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $[-4,-1]$.

الدالة $f'$ موجبة تماما على $[-1,1]$ إذن الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[-1,1]$.

**جدول التغيرات:**

| $x$ | $-4$ | | $-1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $7$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ |

من أجل كل $x$ من المجال $[-4,-1]$ ، $f(-1)\le f(x)\le f(-4)$ أي $-2\le f(x)\le 7$

من أجل كل $x$ من المجال $[-1,1]$ ، $f(-1)\le f(x)\le f(2)$ أي $-2\le f(x)\le 0$

**طريقة:** لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ على مجال $[a,b]$.

1. نبين أن الدالة $f$ متزايدة تماما (أو متناقصة تماما) على المجال $[a,b]$
2. وبعد حساب $f(a)$ و $f(b)$ نبين أنهما من إشارتين مختلفتين.

$f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين تقر وجود $x_0$ و $f$ متزايدة تماما (أو متناقصة تماما) تقر واحدية الحل $x_0$.

**تمرين تطبيقي:** لتكن الدالة $f$ المعرفة على $[0,1]$ بـ: $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$ .

☑ أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $[0,1]$ .

☑ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ على المجال $[0,1]$.

**حـل:**

☑ دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $[0,1]$

- مشتقة الدالة $f$ :

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $[0,1]$ ودالتها المشتقة $f'$ حيث $f'(x)=3x^2-6x+4$ .

- إشارة المشتقة $f'$ : نضع $f'(x)=0$ هذا يكافئ $3x^2-6x+4=0$

حساب المميز $\Delta$ : $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(3)4=-12<0$

وبالتالي الدالة $f'$ موجبة تماما على $[0,1]$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0,1]$.

☑ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ على المجال $[0,1]$.

لدينا $f(0)=-1$ و $f(1)=1$ إذن $f(0)$ و $f(1)$ من إشارتين مختلفتين و $f$ متزايدة تماما على $[0,1]$.

نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ على المجال $[0,1]$.

## 4. عنصر حاد من الأعلى – عنصر حاد من الأسفل:

لتكن دالة $f$ معرفة على مجال $D_f$ .

☑ يسمى عدد حقيقي $k$ عنصرا حادا من الأعلى $(Majorant)$ للدالة $f$ على المجال $D_f$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $D_f$ ، $f(x)\le k$ .

☑ يسمى عدد حقيقي $k$ عنصرا حادا من الأسفل $(Minorant)$ للدالة $f$ على المجال $D_f$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $D_f$ ، $f(x)\ge k$ .