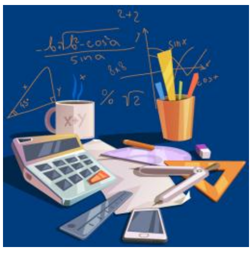
Maths

2AS

رياضيات

ملخصات الأستاذ مصطفى

للسنة الثانية ثانوي



I ♥ MATH

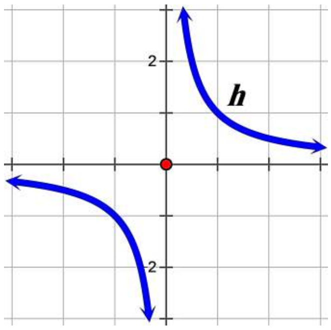
Prof Mustapha KHALDI

الفهرس

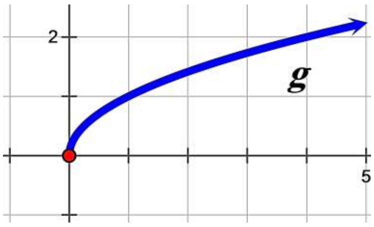
Prof Mustapha
KHALDI

مجموعة التعريف D

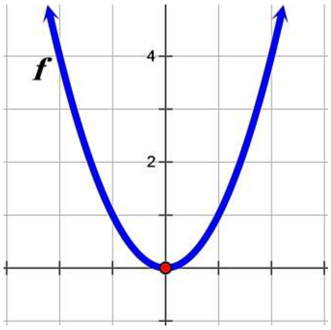
❖ بيانيا:



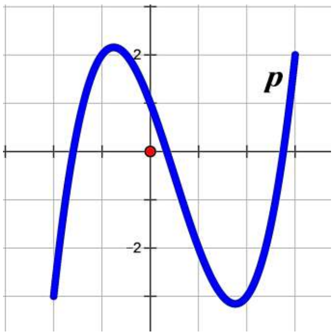
$D_h =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$



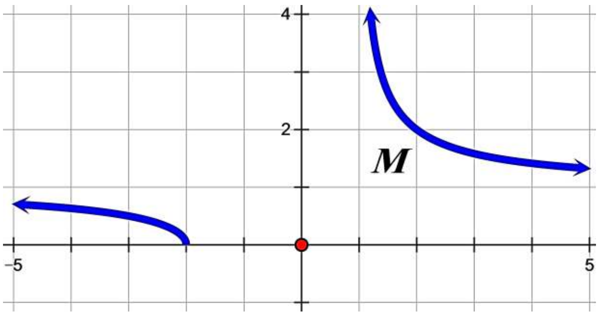
$D_g = [0; +\infty[$



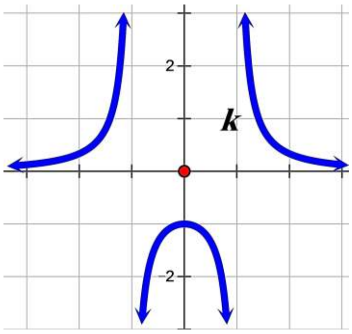
$D_f =]-\infty; +\infty[$



$D_p = [-2; 3]$



$D_M =]-\infty; -2] \cup]1; +\infty[$



$D_k =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

❖ حسابيا:

لا جذر ولا كسر مثل: $f(x) = 6x^2 - 15x + 8$

نكتب: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

1) كسر مثل $f(x) = \frac{x^2+7}{x-2}$ نكتب: $x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ أي $D_f =]-\infty; 2[\cup]2;\ +\infty[$

2) جذر مثل $f(x) = \sqrt{x-3}$ نكتب: $x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$D_f = [3;\ +\infty[$

3) كسر و جذر

مثال1: $f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x+5}}$ نكتب: $x + 5 > 0$

$x > -5$

$D_f =]-5; +\infty[$

مثال2: $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{9}{x-6}$ نكتب: $x + 4 \geq 0$ و $x - 6 \neq 0$

$x \geq -4$ و $x \neq 6$

$D_f =]-4; 6[\cup]6; +\infty[$

إذن القاعدة:

❶ لا كسر و لا جذر: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

❷ في الكسر نكتب: $0 \neq$ المقام

❸ في الجذر نكتب: $0 \geq$ ما داخل الجذر

❹ في مجموع، طرح، جداء أو قسمة دالتين فأكثر: D_f هي <u>تقاطع</u> مجالات تعريف كل هذه الدوال

❖ **الملخص:**

مجموعة التعريف	الدالة
$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$	$f(x) =$ كثير الحدود
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) \neq 0\}$	$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / h(x) > 0\}$	$f(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ g(x) \geq 0 \ \wedge \ k(x) \neq 0\}$	$f(x) = \sqrt{g(x)} + \dfrac{h(x)}{k(x)}$
$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ g(x) \geq 0 \ \wedge \ h(x) > 0\}$	$f(x) = \dfrac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$
$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{g(x)}{h(x)} \geq 0 \ \wedge h(x) \neq 0\right\}$	$f(x) = \sqrt{\dfrac{g(x)}{h(x)}}$

حيث $g(x)$، $h(x)$ و $k(x)$ كلها دوال كثيرات حدود

❖ **العمليات على الدوال ومجموعة التعريف:**

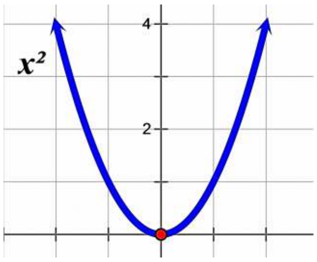
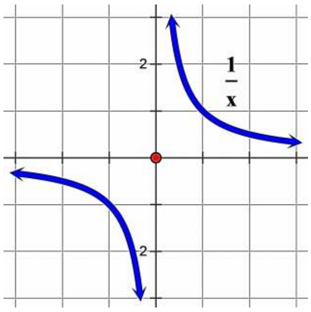
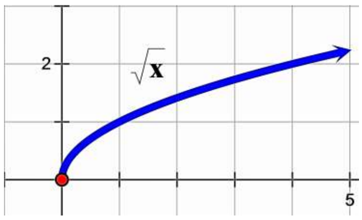
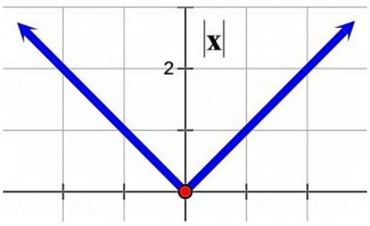
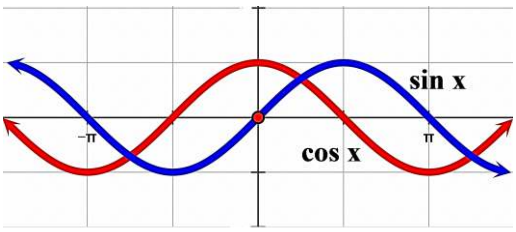
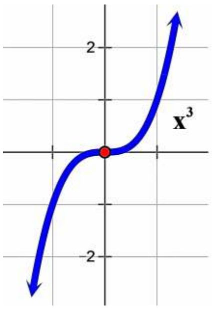
f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. λ و k عددان حقيقيان.

مجموعة التعريف	العملية
D_f	$f + k$
D_f	λf
$D_f \cap D_g$	$f + g$
$D_f \cap D_g$	$f \times g$
$\{x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0\}$	$\dfrac{f}{g}$
$D_{fog} = \{x / \ x \in D_g \wedge \ g(x) \in D_f\}$	$f\circ g$ أي $f[g(x)]$

Prof Mustapha
KHALDI

Prof. Mustapha KHALDI

الدوال المرجعية

الدالة المرجعية	الشكل المرجعي	التمثيل البياني للدالة المرجعية
مربع $f(x) = x^2$ (زوجية)	$f(x) = \lambda(x+b)^2 + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda x^2$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
مقلوب $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (فردية)	$f(x) = \dfrac{\lambda}{x+b} + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \dfrac{\lambda}{x}$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
جذر تربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ (لا زوجية لا فردية)	$f(x) = \lambda\sqrt{x+b} + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda\sqrt{x}$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
قيمة مطلقة $f(x) = \|x\|$ (زوجية)	$f(x) = \lambda\|x+b\| + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda\|x\|$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
الدالتان $\sin x$ (فردية) و $\cos x$ (زوجية)	$f(x) = \lambda\sin(x+b) + k$ $g(x) = \lambda\cos(x+b) + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda\sin x$ أو $y = \lambda\cos x$ 2) نرسم المنحنى الجديد C إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	
مكعب $f(x) = x^3$ (فردية)	$f(x) = \lambda(x+b)^3 + k$ لرسم الدالة المرجعية: 1) نرسم المنحنى $y = \lambda x^3$ 2) نرسم المنحنى الجديد C_f إما: • بشعاع الانسحاب: $\vec{v}(-b;k)$ • أو بمعلم جديد مبدؤه: $w(-b;k)$	

الدوال العددية

Prof Mustapha
KHALDI

I]. العمليات على الدوال

1) تساوي دالتين: f و g متساويتين $\Leftarrow \left.\begin{array}{l} D_f=D_g \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\}$

2) العمليات الجبرية: f و g دوال عددية و k و λ أعداد حقيقية

العملية	التعريف
$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$
$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$
$f\times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

3) تركيب الدوال: $(fog)(x)=f[g(x)]$

II]. اتجاه التغير

1) مراجعة

	إذا كان	فإن
❶	$x_1<x_2$ و $f(x_1)<f(x_2)$	f متزايدة
❷	$x_1<x_2$ و $f(x_1)>f(x_2)$	f متناقصة
❸	$f(x_1)=f(x_2)$	f ثابتة

✱ملاحظة❶: f رتيبة على مجال معناه f متناقصة أو متزايدة على هذا المجال

✱ملاحظة❷: (الفرق بين متزايدة ومتزايدة تماما، متناقصة ومتناقصة تماما)

f متزايدة تماما	f متزايدة
معناه f متزايدة دون أن تكون ثابتة	معناه f متزايدة ثم ثابتة أو ثابتة ثم متزايدة أو متزايدة ثم ثابتة ثم متزايدة...الخ

- نفس الأمر بالنسبة لمتناقصة و متناقصة تماما

✱ملاحظة مهمة❸: (الخطأ الشائع)

f متزايدة ليس معناه f موجبة و f متناقصة ليس معناه f سالبة و لا علاقة أبدا بين تغيرات الدالة و إشارتها

2) العمليات على الدوال واتجاه التغير

الدالة	اتجاه التغير
$f+k$	f و $f+k$ لهما نفس اتجاه التغير
λf	إذا كان $\lambda>0$ فإن f و λf لهما نفس اتجاه التغير إذا كان $\lambda<0$ فإن f و λf متعاكسين في اتجاه التغير
fog	إذا كان f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن fog متزايدة تماما على I إذا كان f و g متعاكسين في اتجاه التغير فإن fog متناقصة تماما على I
$f+g$	لا توجد قاعدة عامة إلا إذا أضيفت شروط على الدالتين
$f\times g$	لا توجد قاعدة عامة إلا إذا أضيفت شروط على الدالتين

✱ملاحظة: لتسهيل دراسة اتجاه تغير أي دالة f من الأفضل كتابتها على الشكل: $u+k$ ، λu أو vou
حيث u و v دالتان مرجعيتان

III]. التمثيل البياني

إذا كان	فإن
$g(x)=f(x)+k$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{0}{k}$
$g(x)=f(x+b)$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{0}$
$g(x)=f(x+b)+k$	C_g هو صورة C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{k}$
$g(x)=\lambda f(x)$	نرسم C_g بالاحتفاظ بفواصل C_f و ضرب ترتيب C_f في λ
$g(x)=\lambda f(x+b)+k$	C_g هو صورة $C_{\lambda f}$ بانسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-b}{k}$
$g(x)=-f(x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل
$g(x)=f(-x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب
$g(x)=-f(-x)$	C_g هو نظير C_f بالنسبة للمبدأ
$g(x)=\lvert f(x)\rvert$	C_g منطبق على C_f لما $f(x)\geq 0$ و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل لما $f(x)\leq 0$ ✱ بتعبير اخر: C_g منطبق على C_f لما C_f فوق محور الفواصل و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل لما C_f تحت محور الفواصل
$g(x)=f(\lvert x\rvert)$	C_g منطبق على C_f لما $x\geq 0$ و C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب لما $x\leq 0$

IV]. دساتير تغيير معلم

العلاقة بين إحداثيات نقطة $M(x,y)$ في معلم قديم $(O;\vec{i},\vec{j})$ و احداثياها $M(X,Y)$ في معلم جديد $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$

حيث (x_0,y_0) هي احداثيات Ω في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ هي:

$$\begin{cases} x=X+x_0 \\ y=Y+y_0 \end{cases}$$

Prof Mustapha
KHALDI

مركز التناظر

✓ طريقة 1:

مركز تناظر $W(a\,;\,b)$ $\Leftarrow$ $f(2a-x)+f(x)=2b$

✓ طريقة 2:

مركز تناظر $W(a\,;\,b)$ $\Leftarrow$ $f(a+x)+f(a-x)=2b$

✓ طريقة 3: دستور تغيير معلم

مركز تناظر $W(a\,;\,b)$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$

1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y=f(a+X)-b$$

2) إثبات أن Y دالة فردية.

محور التناظر

✓ طريقة 1:

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow$ $f(2a-x)=f(x)$

✓ طريقة 2:

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow$ $f(a-x)=f(a+x)$

✓ طريقة 3: دستور تغيير معلم

$x=a$ محور تناظر $\Leftarrow$ $\begin{cases} x=a+X \\ y=Y \end{cases}$

1) إيجاد معادلة الدالة في المعلم الجديد:

$$Y=f(a+X)$$

2) إثبات أن Y دالة زوجية.

✱ملاحظة: المنحنى الممثل للدالة: ax^3+bx^2+cx+d حيث $a\neq 0$ يقبل دائما مركز تناظر

الدوال كثيرات الحدود

I]. تعريف كثير الحدود: عبارة الدالة كثير الحدود تكتب على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث:
n درجة كثير الحدود
a_0 ،a_1 ،...،a_n معاملاته
$a_p x^p$ الحد الذي درجته p

أمثلة:

الدالة الثابتة $f(x) = a$ هي دالة كثير حدود درجته 0

الدالة الخطية $f(x) = ax$ و التآلفية $g(x) = ax + b$ هي دوال كثيرات حدود من الدرجة 1

✱**ملاحظة:** كل الدوال كثيرات الحدود معرفة على $\mathbb{R}$

II]. عمليات على كثير الحدود

1) قواعد الحساب الجبري:

- مجموع، فرق وجداء كثيرات الحدود هي كثيرات حدود
- مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- جداء كثيري حدود درجتهما n و p هو كثير حدود درجته $n + p$

2) جذر كثير حدود: (جذر مرادف كلمة حل)

α جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه $f(\alpha) = 0$

3) تحليل كثير حدود:

إذا كان α جذر لكثير الحدود $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ بحيث $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

4) طرق تحليل كثير حدود: هناك ثلاث طرق لتحليل كثير حدود من الدرجة n

✱ مثال: تحليل كثير حدود $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ جذره 2

✓ **طريقة 1: (المطابقة)**

$f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

بالنشر:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$f(x) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

بالمطابقة مع $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-6 \\ c-2b=-13 \\ -2c=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-2=-6 \\ c-2b=-13 \\ c=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -21 \end{cases}$$

ومنه $f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21)$

✪ **طريقة 2: (القسمة الإقليدية)**

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 - 6x^2 - 13x + 42 & x - 2 \\ \cline{3-3} - & x^3 - 2x^2 & x^2 - 4x - 21 \\ \hline & -4x^2 - 13x + 42 & \\ - & -4x^2 + 8x & \\ \hline & -21x + 42 & \\ - & -21x + 42 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21)$

✪ **طريقة 3: (هورنر Horner)**

معاملات كثير الحدود

الجذر	1	-6	-13	42
		+	+	+
x 2		2	-8	-42
		=	=	=
	1	-4	-21	0

معاملات كثير الحدود الناتج

$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21)$

III]. المعادلات من الدرجة الثانية (مراجعة)

1) الشكل النموذجي: $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

حيث $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

Prof Mustapha
KHA-LDI

2) ملخص حل واشارة وتحليل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $E = ax^2 + bx + c$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$			
إذا كان	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
فإن المعادلة	لا تقبل حلول	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$	تقبل حلين متمايزين $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
إشارتها	x: $-\infty$ ، $+\infty$ — E: إشارة a	x: $-\infty$ ، $\frac{-b}{2a}$ ، $+\infty$ — E: إشارة a ، 0 ، إشارة a	x: $-\infty$ ، $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $+\infty$ — E: إشارة a ، 0 ، عكس إشارة a ، 0 ، إشارة a
تحليلها	لا تقبل تحليلا	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

IV]. مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

Prof Mustapha
KHALDI

إذا كان مميز معادلة من الدرجة الثانية $\Delta \geq 0$ فإن:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

نرمز للمجموع بالرمز S و للجداء بالرمز P

$$S = \frac{-b}{a} \quad ؛ \quad P = \frac{c}{a}$$

✱ نتائج:

❶ حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين فيمكن حساب الحل الآخر باستعمال المجموع: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ أو الجداء: $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

❷ حساب عددين علم مجموعهما وجداؤهما

يمكن حساب عددين علم مجموعهما وجداؤهما باستعمال العلاقة: $x^2 - Sx + P = 0$

❸ تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية $(ax^2 + bx + c = 0)$

إذا كان		فإن
$\frac{c}{a} < 0$		المعادلة تقبل حلين من إشارتين مختلفتين
$\frac{c}{a} > 0$	و $-\frac{b}{a} > 0$	المعادلة تقبل حلين موجبين
$\frac{c}{a} > 0$	و $-\frac{b}{a} < 0$	المعادلة تقبل حلين سالبين

V]. المعادلات مضاعفة التربيع $(ax^4 + bx^2 + c = 0)$:

يؤول حل المعادلة مضاعفة التربيع $ax^4 + bx^2 + c = 0$ إلى حل الجملة: $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

✱ملاحظة: عند إيجاد قيمة X_1 و X_2 يجب تعويضهما في المعادلة $X = x^2$ لإيجاد قيم x

Prof Mustapha
KHALDI

الاشتقاقية

I. تعاريف

1) تعريف نهاية دالة عند الصفر

بمفهوم مبسط نقول نهاية الدالة f عند 0 هي l (حيث $l \in \mathbb{R}$) معناه $f(0)=l$ و نكتب $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$

2) قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l}$ أو $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l}$ حيث $(h = x - x_0)$

f غير قابلة للاشتقاق عند العدد x_0 معناه: $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty}$

✳ العدد المشتق: يسمى l العدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز له $\boxed{f'(x_0)}$ أي $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

✳ نسبة التزايد: يسمى العدد $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نسبة التزايد للدالة f بين x_0 و x_0+h و نرمز له ب $g(h)$

✳قاعدة: الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

3) الدالة المشتقة لدالة f

- f قابلة للاشتقاق على D_f معناه f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من D_f
- مشتقة الدالة f هي الدالة التي ترفق بكل x من D_f العدد المشتق $f'(x)$ و نرمز لها f' حيث $\boxed{f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

II. التفسير الهندسي للعدد المشتق

1) معادلة المماس عند نقطة: مماس المنحنى C_f عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A

و معامل توجيهه $f'(x_0)$ ، معادلته: $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$

2) التقريب التآلفي للعدد المشتق

يمكن حساب أي قيمة تقريبية للأعداد من الشكل a, n باستخدام التقريب التآلفي دون التعويض في الدالة و ذلك بكتابتها على الشكل $a+h$ حيث a الجزء الصحيح و h الجزء العشري (h قيمة قريبة من 0) $\boxed{f(a+h) = f'(a)h + f(a)}$

✳ملاحظة: إذا كانت لدينا معادلة المماس عند a فيمكن عندها تعويض $a+h$ مباشرة في معادلة المماس

III. مشتقات الدوال المألوفة

$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
b	0
ax	a
x^2	$2x$
ax^n	$n \times ax^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

VI. عمليات على الدوال المشتقة

$f(x)$	$f'(x)$
$(u+v)$	$u'+v'$
$(u \times v)$	$u'.v+v'.u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n	$nu' \times u^{n-1}$
λu	$\lambda u'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$(uov)'$	$[u'ov] \times v'$
$u(ax+b)$	$au'(ax+b)$

تطبيقات الاشتقاقية

Prof Mustapha
KHALDI

❶ تحديد اتجاه تغير دالة

تغيرات f	المشتقة f'
f متزايدة تماما على I	f' موجبة تماما على I
f متناقصة تماما على I	f' سالبة تماما على I
f ثابتة على I	f' معدومة على I

❷ معرفة القيم الحدية للدالة

- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا كانت f' موجبة ثم انعدمت ثم سالبة فإن f تقبل قيمة حدية كبرى و إذا العكس فهي تقبل قيمة حدية صغرى
- إذا انعدمت المشتقة f' عند قيمة c من I فإن f تقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $(c, f(c))$

❸ نقطة الانعطاف

- إذا انعدمت المشتقة الأولى f' عند قيمة c من I و لا تغير إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند قيمة c من I مغيرة إشارتها فإن f تقبل نقطة انعطاف عند النقطة $(c, f(c))$
- بيانيا نقطة الانعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحني

❹ حصر دالة

- f متزايدة تماما على $[a, b] \Leftarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$
- f متناقصة تماما على $[a, b] \Leftarrow f(b) \leq f(x) \leq f(a)$

❺ الدالة المحدودة من الأسفل أو من الأعلى

- $f(x) \leq k \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و يسمى k عنصرا حادا من الأعلى (Majorant)
- $f(x) \geq k \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و يسمى k عنصرا حادا من الأسفل (Minorant)

✱ملاحظة:

f تقبل قيمة حدية كبرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأعلى و $f(c)$ هو Majorant

f تقبل قيمة حدية صغرى عند $(c, f(c)) \Leftarrow f$ محدودة من الأسفل و $f(c)$ هو Minorant

❻ نظرية القيم المتوسطة

$f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 على المجال $[a, b] \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ مستمرة و رتيبة على المجال } [a,b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{array} \right.$

❼ المقارنة والوضع النسبي بين دالتين أو دالة ومستقيم

- بيانيا
  - C_f فوق $C_g \Leftarrow f(x) > g(x)$
  - C_f تحت $C_g \Leftarrow f(x) < g(x)$
  - C_f تقطع $C_g \Leftarrow f(x) = g(x)$
- حسابيا

ندرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$

x	a b	x_0 0	
إشارة $f(x) - g(x)$	$-$		$+$
الوضع النسبي بين C_f و C_g	C_f تحت C_g	C_f يقطع C_g	C_f فوق C_g

Prof Mustapha
KHALDI

النهايات ①
(السلوك التقاربي لمنحن)

مفاهيم

❶ بصفة عامة يتم حساب نهاية دالة عند كل حد من حدود مجموعة تعريفها

❷ إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a حيث $a \in D_f$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

❸ إذا قبلت دالة f نهاية عند عدد a تكون هذه النهاية وحيدة

❹ يمكن لدالة أن لا تقبل نهاية عند حد من حدود مجموعة تعريفها مثل $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$

I. نهاية منتهية عند عدد حقيقي

نقول أن ل f نهاية منتهية l عند a معناه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = l$

II. نهاية غير منتهية عند عدد حقيقي

إذا كانت f دالة من الشكل $\boxed{f(x) = \dfrac{d}{g(x)}}$ حيث $g(x)$ كثير حدود، d و a عددان حقيقيان حيث $g(a) = 0$ فإن:

إذا كانت إشارة $g(x)$	وإشارة d	فإن
$\begin{array}{ccccc} -\infty & < & a & > & +\infty \\ \hline & - & 0 & + & \end{array}$	$d > 0$	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$
		$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = +\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = +\infty$
		$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$
$\begin{array}{ccccc} -\infty & < & a & > & +\infty \\ \hline & + & 0 & - & \end{array}$	$d > 0$	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = +\infty$
		$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$
		$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = +\infty$

***ملاحظة:**

إذا كانت	وإشارة d	فإن
$f(x) = \dfrac{d}{\lvert g(x)\rvert}$ أو $f(x) = \dfrac{d}{[g(x)]^2}$	$d > 0$	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = +\infty$
		$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = +\infty$
	$d < 0$	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = -\infty$
		$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$

III. نهاية منتهية عند ما لا نهاية

إذا كانت f دالة من الشكل $f(x) = \dfrac{d}{x}$ حيث d عدد حقيقي فإن: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{d}{x} = 0}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{d}{x} = 0}$

و منه نستنتج أن: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{d}{x} + b = b}$ و $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{d}{x} + b = b}$

IV. نهاية غير منتهية عند ما لا نهاية

نقول أن ل f نهاية غير منتهية ∞ عند ∞ معناه $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$

V]. المبرهنات الأولية على النهايات

① نهاية مجموع دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim[f(x)+g(x)] =$
l	l'	$l+l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

② نهاية جداء دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim[f(x)\times g(x)] =$
l	l'	$l\times l'$
$l>0$	$+\infty$	$+\infty$
$l<0$	$+\infty$	$-\infty$
$l>0$	$-\infty$	$-\infty$
$l<0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	ح ع ت
0	$-\infty$	ح ع ت
$l<0$	0^+	0^-
$l<0$	0^-	0^+

③ نهاية حاصل قسمة دالتين

إذا كانت $\lim f(x) =$	و $\lim g(x) =$	فإن: $\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] =$
l	l'	$\frac{l}{l'}$
l	$+\infty$	0
l	$-\infty$	0
$+\infty$	$l>0$	$+\infty$
$+\infty$	$l<0$	$-\infty$
$-\infty$	$l>0$	$-\infty$
$-\infty$	$l<0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$-\infty$	ح ع ت
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0
0	0	ح ع ت
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
$-\infty$	0^+	$-\infty$
$-\infty$	0^-	$+\infty$
$l>0$	0^+	$+\infty$
$l<0$	0^+	$-\infty$
$l>0$	0^-	$-\infty$
$l<0$	0^-	$+\infty$

④ حالات خاصة

إذا كانت $\lim f(x) =$	فإن: $\lim[f(x)]^2 =$	$\lim \lvert f(x)\rvert =$	$\lim\sqrt{f(x)} =$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
0^-	0^+	0^+	

⑤ حالات عدم التعيين

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$+\infty-\infty$ $-\infty+\infty$

Prof Mustapha
KHALDI

Prof Mustapha
KHALDI

النهايات ②
(التفسير الهندسي)

❶ المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب (عمودي)

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftarrow x = a$ مستقيم مقارب عمودي يوازي محور التراتيب

❷ المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل (أفقي)

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b \Leftarrow y = b$ مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل

❸ المستقيم المقارب المائل

أ] البحث عن المستقيم المقارب المائل

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftarrow$ احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

إذا كان $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \text{و} \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b \end{array} \right. \Leftarrow y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f

ب] إثبات أن مستقيم هو مقارب مائل ل C_f

لإثبات أن $\boxed{y = ax + b}$ مقارب مائل ل C_f يكفي برهان أن: $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0}$

ج] دراسة وضعية C_f بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ نقوم بدراسة

إشارة الفرق: $\boxed{f(x) - (ax + b)}$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
إشارة $f(x) - y$		$-$		$+$	
الوضع النسبي بين C_f و (Δ)		C_f تحت (Δ)	C_f يقطع (Δ)	C_f فوق (Δ)	

✱ملاحظة: يسمى المنحنى الممثل لدالة تناظرية من الشكل: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad - cb \neq 0$ قطعا زائدا معادلتا مستقيميه المقاربين هما: $x = -\frac{d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$

مخطط دراسة دالة

1 مجموعة التعريف

- تحديد مجموعة تعريف الدالة إن لم تكن قد أعطيت في النص

2 دراسة شفعية الدالة أو دوريتها (في الحالات الممكنة)

- قصد تقليص مجموعة الدراسة وتحديد مركز أو محور تناظر المنحنى

3 حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف

4 تحديد المستقيمات المقاربة

5 دراسة اتجاه تغير الدالة

1. حساب المشتقة
2. دراسة إشارة المشتقة
3. استنتاج اتجاه تغير الدالة
4. تحديد القيم الحدية في حالة وجودها

6 حساب نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات

7 تشكيل جدول التغيرات

8 التمثيل البياني للدالة

1. رسم المستقيمات المقاربة
2. تمثيل النقط الحدية (الكبرى و الصغرى إن وجدت) مع رسم المماسات الأفقية عندها
3. تمثيل نقط تقاطع المنحني مع محوري الاحداثيات
4. تمثيل بعض النقط المساعدة من خلال حساب احداثياها
5. رسم المماسات المائلة (إن وجدت)
6. رسم محور التناظر أو تمثيل مركز التناظر (إن وجدو) لاستغلال التناظر و تسهيل الرسم
7. استغلال و استعمال جدول التغيرات لرسم الدالة

Prof Mustapha
KHALDI

المرجح في المستوي ①

❖ مرجح نقطتين

* G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$

○ α و β عددان حقيقيان

○ تسمى الثنائية (A,α) نقطة مثقلة و تسمى الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ جملة نقطتين مثقلتين

* إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل: $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ $\Leftarrow$ G منتصف $[AB]$; (نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=1$)

<u>مبرهنات:</u>

■ G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

■ G منتصف $[AB]$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}$

<u>خواص:</u>

• G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$

• G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftarrow$ فإن النقط A , B و G على استقامة واحدة

<u>احداثيا مرجح نقطتين:</u>

$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $G(x_G;y_G)$ و G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \quad ; \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

Prof Mustapha
KHALDI

<u>إنشاء مرجح نقطتين:</u>

G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

2) نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha+\beta$ جزء متقايسة ثم انطلاقا من A نضع G على بعد $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ (يمكن الاستعانة بمبرهنة طالس)

❖ مرجح 3 نقط

* G مرجح النقط A , B و C المرفقة بالمعاملات α , β و γ $\Leftrightarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

○ α , β و γ أعداد حقيقية حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

* إذا كان $\alpha=\beta=\gamma$ و النقط A , B و C ليست على استقامة واحدة فإن: G مركز ثقل المثلث ABC

(نأخذ في هذه الحالة: $\alpha=\beta=\gamma=1$)

<u>مبرهنة:</u>

■ G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

<u>خواص:</u>

• G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftrightarrow$ G مرجح $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ حيث: $k\in\mathbb{R}^*$

• G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, إذا كانت D مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن: G مرجح $\{(D,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}$

<u>احداثيا مرجح 3 نقط:</u>

$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $C(x_C;y_C)$; $G(x_G;y_G)$ و G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$:

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad ; \quad y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

<u>إنشاء مرجح 3 نقط:</u>

G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ $\Leftarrow$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

<u>طريقة 1:</u>

1) نكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وفق القانون : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

2) نرسم الشعاع $\overrightarrow{AG}$ محصلة مجموع الشعاعين $\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ و $\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}$

<u>طريقة 2:</u>

1) نشئ I مرجح نقطتين بحيث مجموع المعاملين $\neq 0$ مثلا A و C بحيث $\alpha+\gamma\neq 0$

2) نكتب $\overrightarrow{GI}$ بدلالة $\overrightarrow{BI}$ و ننشئ G

المرجح في المستوي ②

❖ مجموعة النقط

	إذا كان	فإن مجموعة النقط هي	
❶	$\|\overrightarrow{MG}\| = k'$ حيث $k' > 0$	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	دائرة
	$\|\overrightarrow{MG}\| = AB$	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = AB$ (لأن AB طول موجب ثابت)	
	$(MG)\perp(MH)$	دائرة قطرها GH و مركزها منتصف $[GH]$	
❷	$\|\overrightarrow{MG}\| = k'$ حيث $k' < 0$	مجموعة خالية	ϕ
❸	$\|\overrightarrow{MG}\| = 0$	النقطة G (أو هي النقطة M منطبقة على G)	نقطة
❹	$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MH}\|$	مستقيم محور القطعة $[GH]$	مستقيم
❺	$\|\overrightarrow{MG}\| \leq k'$	كل النقط من المستوي التي تقع داخل و على محيط الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	جزء من المستوي
	$\|\overrightarrow{MG}\| > k'$	كل النقط من المستوي التي تقع خارج الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	
	$\|\overrightarrow{MG}\| < \|\overrightarrow{MH}\|$	نصف المستوي في جهة النقطة G و حده محور $[GH]$	

*ملاحظة1: لإثبات أن B تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض M ب B في العلاقة المعطاة و نتحصل على علاقة صحيحة

*ملاحظة2: لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال و خواص الأشعة للتخلص من M

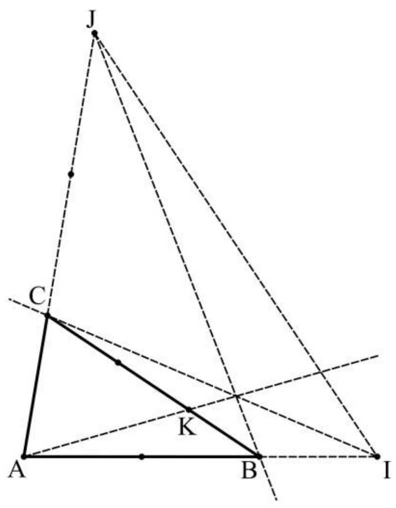
❖ اثبات تلاقي مستقيمات

مثال: ABC مثلث و النقط I , J و K معرفة كما يلي:

Prof Mustapha
KHALDI

- I نظيرة منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى B
- النقطة J تحقق: $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
- النقطة K تحقق: $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1) أرسم شكلا توضح فيه النقط I , J و K مع التبرير.
2) أثبت أن كل نقطة من النقط I , J و K هي مرجح لنقطتين من النقط A , B و C يطلب تحديد المعاملين في كل حالة.
3) أثبت أن المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة.



الحل:

1) الإنشاء مع التبرير:

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$
- $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{-3}{2-3}\overrightarrow{AC} \Leftarrow \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2) اثبات المرجح وتحديد المعاملات:

$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftarrow 2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} \Leftarrow -2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0}$

$\Leftarrow \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ومنه I مرجح الجملة: $\{A(1), B(-3)\}$

* بنفس الطريقة نجد: J مرجح : $\{A(2), C(-3)\}$ و K مرجح : $\{B(2), C(1)\}$

3) إثبات أن المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة:

ليكن G مرجح $\{(A,2); (B,-6); (C,-3)\}$, G موجود لأن: $2 - 6 - 3 = -7 \neq 0$

طريقة 1: (باستعمال خاصية التجميع)

G مرجح $\{(I,-4); (C,-3)\}$ و منه $G \in (IC)$

G مرجح $\{(J,-1); (B,-6)\}$ و منه $G \in (JB)$

G مرجح $\{(K,-9); (A,2)\}$ و منه $G \in (AK)$

و منه المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة في النقطة G

طريقة 2: (باستعمال الارتباط الخطي)

$2\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$-7\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IA} - 6\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$-7\overrightarrow{GI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}) - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GI} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{IC}$ و منه $G \in (IC)$

* بنفس الطريقة نجد: $G \in (JB)$ و $G \in (AK)$

و منه المستقيمات (CI) , (BJ) و (AK) متقاطعة في G

❖ مستقيم اولار (Euler): هو المستقيم الذي يشمل مركز ثقل مثلث ومركز الدائرة المحيطة به وملتقى الإرتفاعات فيه.

الزوايا الموجهة

➤ يوجه المستوي
- توجيها مباشرا (موجب) ← عكس عقارب الساعة
- توجيها غير مباشر (سالب) ← اتجاه عقارب الساعة

➤ نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة في الإتجاه المباشر والتي نصف قطرها 1

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث أشعة غير معدومة:

➤ نسمي الثنائية $(\vec{u},\vec{v})$ زاوية موجهة لشعاعين.

✪ إذا كان x قيس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ فإن كل الأعداد من الشكل $x+2k\pi$ هي أقياس للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ مع $\boxed{k\in\mathbb{Z}}$

✪ يوجد قيس وحيد على المجال $]-\pi,\pi]$ أو $[0,2\pi[$ يسمى القيس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$

✪ إيجاد القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})=x$:

❶ نكتب الشكل العام للزاوية أي: $(\vec{u},\vec{v})=x+2k\pi$

❷ نحصر الشكل العام للزاوية بين π و $-\pi$ أي: $-\pi<x+2k\pi<\pi$

❸ يكفي إيجاد k انطلاقا من هذا الحصر ثم تعويضه في الشكل العام لحساب القيس الرئيسي.

✪ علاقة شال:

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})$$

نتائج:

- $(\vec{u},\vec{v})=-(\vec{v},\vec{u})$
- $(\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$
- $(-\vec{u},-\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$

Prof Mustapha
KHALDI

✪ تقايس الزوايا الموجهة:

لتكن $(\vec{u},\vec{v})=\alpha$ و $(\vec{u'},\vec{v'})=\alpha'$

$(\vec{u},\vec{v})$ و $(\vec{u'},\vec{v'})$ متقايستان $\Leftrightarrow$ $\alpha'=\alpha+2k\pi$ أي $\alpha'-\alpha$ مضاعف ل 2π

✪ الارتباط الخطي في الزوايا الموجهة:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا $\Leftrightarrow$
- $(\vec{u},\vec{v})=2k\pi$ $\Leftarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ في نفس الاتجاه)

أو
- $(\vec{u},\vec{v})=\pi+2k\pi$ $\Leftarrow$ ($\vec{u}$ و $\vec{v}$ في اتجاهين متعاكسين)

✪ خاصية:

$\{k;k'\}\in\mathbb{R}^*$

- إذا كان k و k' من نفس الإشارة فإن: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})$
- إذا كان k و k' من إشارتين مختلفتين فإن: $(k\vec{u},k'\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})+\pi$

➤ الزاوية المحيطية والزاوية المركزية:

إذا كانت A، B و M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مثلثية (C) مركزها O فإن:

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$$

$$(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$$

❖ حساب المثلثات

- $\cos(x+\pi) = -\cos x$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x$

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

- $-1 \le cosx \le 1$
- $-1 \le sinx \le 1$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
- $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

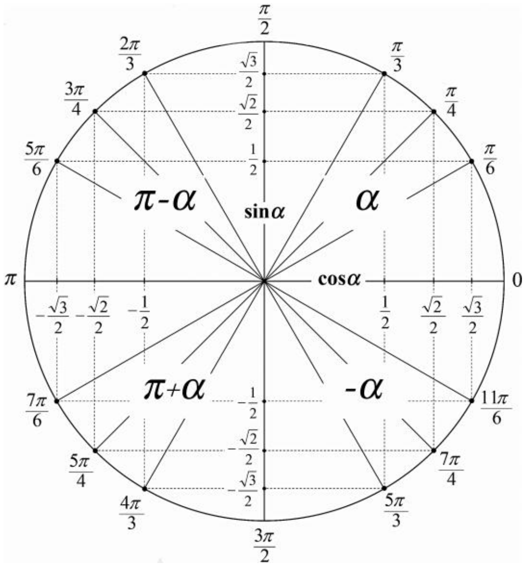
- $\cos(x+2k\pi) = \cos x$
- $\sin(x+2k\pi) = \sin x$

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$

جدول زوايا شهيرة:

x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

الدائرة المثلثية:



❖ الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

ليكن $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم مباشر متعامد ومتجانس ولتكن M نقطة من المستوي غير منطبقة على O

✱ تسمى الثنائية $M(x;y)$ الاحداثيات الديكارتية للنقطة M

✱ تسمى الثنائية $M(r;\theta)$ الاحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r = OM$ و $\theta = (\vec{i},\overrightarrow{OM})$

<u>مصطلحات:</u> النقطة O تسمى القطب، $(O;\vec{i})$ يسمى المحور القطبي، r نصف القطر القطبي و θ زاوية قطبية

❖ العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

$$y = r\sin\theta \quad ; \quad x = r\cos\theta \quad ; \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Prof Mustapha

KHALDI

❖ المعادلات المثلثية

❶ $\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$

❷ $\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$

③ المعادلات من الشكل $\cos x = a$

✳ إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

✳ إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

1) نبحث عن القيس الرئيسي c حيث $\cos c = a$

2) الحلول هي: $\begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = -c + 2k\pi \end{cases}$

④ المعادلات من الشكل $\sin x = a$

✳ إذا كان $a > 1$ أو $a < -1$ فالمعادلة لا تقبل حلول

✳ إذا كان $-1 \leq a \leq 1$:

1) نبحث عن القيس الرئيسي c حيث $\sin c = a$

2) الحلول هي: $\begin{cases} x = c + 2k\pi \\ x = \pi - c + 2k\pi \end{cases}$

⑤ المعادلات من الشكل $\cos u = \sin v$

✳ إما نحول sin إلى cos بالقانون $\sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ فتصبح المعادلة $\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ أي من الشكل ❶

✳ أو نحول cos إلى sin بطريقتين:

- بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin v$ أي من الشكل ❷
- أو بالقانون $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$ فتصبح المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = \sin v$ أي من الشكل ❷

Prof Mustapha

KHALDI

الاحتمالات

I. مصطلحات

1) **تجربة عشوائية:** هي كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة

2) **مجموعة الإمكانيات Ω:** هي مجموعة النتائج الممكنة في تجربة عشوائية ولها تسميات أخرى مثل:
(الحادثة الأكيدة، المجموعة الشاملة أو مجموعة المخارج)

3) **الحادثة A:** هي مجموعة جزئية من Ω

1.3) **الحادثة الأولية:** هي حادثة تحتوي على عنصر وحيد

2.3) **الحادثة المستحيلة ϕ:** هي الحادثة الخالية

3.3) **الحادثة العكسية $\overline{A}$:** هي الحادثة التي تحوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A

* لتكن B حادثة أخرى من Ω:

4) $A \cap B$: هي العناصر المشتركة بين A و B

5) $A \cup B$: هي العناصر المشتركة و الغير مشتركة بين A و B بدون تكرار

6) A و B غير متلائمتين $\Leftarrow$ $A \cap B = \phi$

7) A و B حادثتان مستقلتان: احتمال الحادثة A لا يؤثر في احتمال الحادثة B و العكس.

II. قانون الاحتمال

لتكن $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots \dots \dots, e_n\}$ حيث e_i هو المخرج رقم i مع $i \in \mathbb{N}^*$

1) **قانون الاحتمال P_i:** هو احتمال تحقق المخرج e_i

2) **احتمال الحادثة A:** يرمز له ب $P(A)$ ويساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A

3) خواص:

- $0 \le P_i \le 1$ و $0 \le P(A) \le 1$
- $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ أي $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$
- $P(\Omega) = 1$ و $P(\phi) = 0$

Prof Mustapha
KHALDI

III. تساوي الاحتمال

1) **تجربة متساوية الاحتمال:** هي تجربة عشوائية حيث كل الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال

2) **مصطلحات تساوي الاحتمال:**

"زهر نرد غير مزيفة" ، "قطعة نقود متوازنة" ، "كريات لا نفرق بينها عند اللمس" ...

✳ملاحظة مهمة جدا: لا تكفي هذه المصطلحات لاعتبار تساوي الاحتمال بل يتعلق بالسؤال المطروح أيضا (و يمكن للمجموعة الشاملة Ω أن تتغير من سؤال لآخر في نفس التمرين)

3) **نتائج:**

في حالة تساوي الاحتمال يكون قانون الاحتمال متساوي التوزيع حيث:

- كل مخرج e_i له احتمال $P_i = \frac{1}{n}$
- $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$

IV. خواص الاحتمالات:

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- إذا كانت $B \subset A$ فإن: $P(A) \leq P(B)$
- اذا كانت A و B حادثتان مستقلتان فإن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

V. تعاريف لقانون الاحتمال:

❶ الأمل E: $E = \sum_{i=1}^{n} e_i p_i$

❷ التباين V: $V = \sum_{i=1}^{n} (e_i - E)^2 p_i$ أو $V = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 p_i - E^2$

❸ الانحراف المعياري σ: $\sigma = \sqrt{V}$

✻ملاحظة: الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية إذا اعتبرنا عناصر Ω هي قيم الطبع و قيم P_i هي التواترات

VI. المتغير العشوائي X

1. المتغير العشوائي X هو دالة عددية معرفة على Ω
2. عموما نرمز ب "I" لمجموعة قيم X أي $I = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

VII. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو احتمال تحقق المخرج X_i من I و نرمز له ب P_i أو $P(X = x_i)$

VIII. تعاريف للمتغير العشوائي X:

❶ الأمل الرياضياتي E: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

❷ التباين V: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P_i$ أو $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - (E(X))^2$

❸ الانحراف المعياري σ: $\sigma = \sqrt{V(X)}$

Prof Mustapha
KHALDI

التحاكي

1. تعريف: التحاكي هو تحويل نقطي معرف بالعلاقة

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$ (مثل علاقة الارتباط الخطي)

حيث O هو مركز التحاكي و $k \in \mathbb{R}^*$ هي نسبته و M' هي صورة M بهذا التحاكي

* نرمز للتحاكي h بالرمز: $h(O,k)$

نتيجة: A, B, C على استقامة واحدة $\Leftarrow$ يوجد h وحيد و k وحيد يحقق: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

2. الخاصية المميزة:

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$$

Prof Mustapha
KHALDI

نتائج:

❶ بما أن $k \neq 0$ و A تختلف عن B فإن: $(A'B') \mathbin{/\!/} (AB)$ و منه:

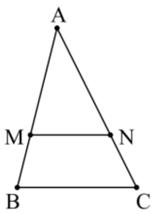
- صورة مستقيم (d) بتحاك هي مستقيم (d') يوازي (d)
- صورة قطعة مستقيمة $[AB]$ بتحاك هي قطعة مستقيمة $[A'B']$ حيث $\overrightarrow{A'B'} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB}$

❷ $A'B' = |k|AB$

❸ إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإن صورته بالتحاكي هي G' مرجح $\{(A',\alpha);(B',\beta)\}$

تذكير: مستقيم (AB) هو مجموعة النقط M مرجحات $\{(A,\alpha);(B,1-\alpha)\}$ مع $\alpha \epsilon \mathbb{R}$

3. المثلثات المتحاكية:



ABC و AMN مثلثان. $M \in (AB)$ و $N \in (AC)$ حيث: $(MN) \mathbin{/\!/} (BC)$

التحاكي h الذي مركزه A و يحول B إلى M يحول كذلك C إلى N (نظرية طالس)

4. صورة دائرة:

صورة دائرة (C) مركزها I و نصف قطرها r بواسطة تحاكي h نسبته k هي دائرة (C') مركزها $I' = h(I)$ و نصف قطرها $r' = |k|r$

5. خواص التحاكي:

① الحفاظ على استقامية النقط

② الحفاظ على التوازي

③ الحفاظ على الزوايا الموجهة

④ لا يحافظ على الأطوال و المساحات و الحجوم (التحاكي يضاعف الأطوال $|k|$ مرة و يضاعف المساحات k^2 مرة و يضاعف الحجوم $|k^3|$ مرة)

✱ ملاحظة: عندما يكون $|k| > 1$ يقوم التحاكي بتكبير الأشكال و عندما يكون $0 < k < 1$ فإن الشكل يصغر k مرة

الجداء السلمي

1. الجداء السلمي لشعاعين

$\vec{u}(x;y)$ ، $\vec{v}(x';y')$ بحيث $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

حالات خاصة:

- ✳ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا و في اتجاه واحد فإن: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- ✳ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن: $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- ✳ $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ و $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$
- ✳ إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

2. تعامد شعاعين

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \vec{0}}$$

3. قواعد الحساب

أ) خواص الجداء السلمي:

❶ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$; ❷ $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$; ❸ $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$

ب) المتطابقات الشهيرة:

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

4. الجداء السلمي والاسقاط العمودي

✳ إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين غير معدومين و كان $\vec{v}'$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على $\vec{u}$ فإن: $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'}$

✳ إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ و $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ و C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على (AB) فإن:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}}$$

حالات خاصة:

- ✳ إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا و في اتجاه واحد فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB.CD$
- ✳ إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطيا و متعاكسين في الاتجاه فإن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB.CD$

5. تطبيقات الجداء السلمي

أ) في المستقيم:

ليكن (D) مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$

شعاع التوجيه: $\boxed{\vec{v}(-b;a)}$; $\boxed{\vec{v}\binom{-b}{a}}$

الشعاع الناظمي: $\boxed{\vec{n}(a;b)}$; $\boxed{\vec{n}\binom{a}{b}}$

✳ ملاحظة: يكون الشعاع الناظمي دائما عمودي على شعاع التوجيه $\boxed{\vec{n} \perp \vec{v}}$ أي $\boxed{\vec{n}.\vec{v} = \vec{0}}$

Prof Mustapha
KHALDI

ب) في الدائرة:

❶ معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega(x_0;y_0)$ و نصف قطرها r هي $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$

❷ الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\vec{0}}$

✳ **ملاحظة:** لكل دائرة معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و العكس غير صحيح.

6. حساب أطوال، مساحات وأقياس زوايا (العلاقات المترية في مثلث)

ABC مثلث مساحته S و نصف محيطه p أي $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ حيث $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$

أ) مبرهنة المتوسط

A و B نقطتان و I منتصف $[AB]$ من أجل كل نقطة M لدينا: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

ب) مبرهنة الكاشي

❶ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

❷ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$

❸ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$

ج) مبرهنة المساحة

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Prof Mustapha
KHALDI

د) قاعدة هيرون

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ه) مبرهنة الجيوب

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

7. المسافة بين نقطة ومستقيم

المسافة بين نقطة $A(x_0;y_0)$ وبين مستقيم معادلته $ax+by+c=0$ هي:

$$\boxed{d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

8. دساتير الجمع

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b}$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$$\boxed{\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b}$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

$$\cos 2a=\boxed{\cos^2 a-\sin^2 a}=\boxed{2\cos^2 a-1}=\boxed{1-2\sin^2 a}$$

$$\boxed{\sin 2a=2\sin a\cos a}$$

$$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

إضافة: $\cos\widehat{A}=1+\frac{2p(p-a)}{bc}$; $\cos\widehat{A}=1-\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$

المتتاليات العددية

I]. تعاريف و رموز

المتتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n العدد $u(n)$ حيث:

نرمز للمتتالية بالرمز u_n بدلا من $u(n)$ حيث u_n هي صورة n بالمتتالية u

يسمى u_n أيضا الحد العام للمتتالية u او الحد الذي دليله n

إذا كان $n \geq p$ نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n\geq p}$

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$

Prof Mustapha
KHALDI

u_1 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}^*$

u_p هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل $n \geq p$

يسمى n دليل المتتالية u أو دليل الحد u_n

p هو دليل الحد الأول للمتتالية u

$(n-p+1)$ هي رتبة الحد u_n

حساب الحد الذي رتبته m أي حساب الحد $u_{(m-p+1)}$

II]. طرق توليد متتالية عددية

المتتاليات العددية
- متتالية معرفة بحدها العام
  - $u_n = f(n)$
  - متتالية حسابية: $u_n = u_p + (n-p)r$
  - متتالية هندسية: $u_n = u_p \times q^{n-p}$
- متتالية معرفة بعلاقة تراجعية: $u_{n+1} = f(u_n)$

III]. اتجاه تغير متتالية عددية

عموما:

إذا كان	فإن
$u_{n+1} > u_n$	u متزايدة
$u_{n+1} < u_n$	u متناقصة
$u_{n+1} = u_n$	u ثابتة

طريقة ❶: ندرس إشارة الفرق $\boxed{u_{n+1} - u_n}$

إذا كان	فإن
$u_{n+1} - u_n > 0$	u متزايدة
$u_{n+1} - u_n < 0$	u متناقصة
$u_{n+1} - u_n = 0$	u ثابتة

طريقة ❷: ندرس تغيرات f إذا كانت المتتالية من الشكل: $\boxed{u_n = f(n)}$

طريقة ❸: نحسب النسبة $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ و نقارنها مع 1

إذا كان	فإن
$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$	u متزايدة
$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$	u متناقصة
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$	u ثابتة

IV]. المتتالية الحسابية

① تعريف

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

r هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو u_0 فإن:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

✱ملاحظة:

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية حسابية

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$$

$$\boxed{S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)}$$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

④ البرهان أن المتتالية حسابية

طريقة ❶: نحسب الفرق $\boxed{u_{n+1} - u_n}$

إذا كان: $u_{n+1} - u_n = \boxed{r}$ حيث r عدد ثابت خالي من n فإن u_n حسابية

طريقة ❷: نكتب u_n على الشكل

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

⑤ الوسط الحسابي

a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية

$\boxed{a + b = 2c}$ أي $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$

V]. المتتالية الهندسية

① تعريف

$$\boxed{v_{n+1} = v_n \times q}$$

q هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو v_0 فإن:

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n}$$

✪ إذا كان الحد الأول هو v_1 فإن:

$$\boxed{v_n = v_1 \times q^{n-1}}$$

Prof Mustapha
KHALDI

✱ملاحظة:

إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية هندسية

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$$

$$\boxed{S_n = \text{الحد الأول}\left(\frac{1 - \text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}}}{1 - \text{الأساس}}\right)}$$

$$\boxed{S_n = v_p\left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}\right)}$$

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\frac{1 - q^n}{1-q}$$

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}}$$

④ البرهان أن المتتالية هندسية

طريقة ❶: نحسب النسبة $\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n}}$

إذا كان: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \boxed{q}$ حيث q عدد ثابت خالي من n فإن v_n هندسية

طريقة ❷: نكتب v_n على الشكل

$$\boxed{v_n = v_p \times q^{n-p}}$$

⑤ الوسط الهندسي

a، b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية

$\boxed{a \times b = c^2}$ أي $u_{n+1} \times u_{n-1} = {u_n}^2$

VI]. المتتالية الثابتة

① **تعريف:** هي المتتالية التي جميع حدودها متساوية أي $u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = u_n$

② **البرهان أن المتتالية ثابتة**

يكفي إثبات أن $u_{n+1} - u_n = 0$ أو أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ أو إثبات أن $u_{n+1} = u_n = u_0$

VII]. إثبات أن المتتالية لا حسابية ولا هندسية

- يكفي برهان أن $u_{n+1} - u_n \neq r$ و أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \neq q$
- أو برهان أن $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ و أن $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

VIII]. تقارب وتباعد متتالية

u_n متقاربة $\Leftarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ، حيث $l \in \mathbb{R}$

u_n متباعدة $\Leftarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

✳ **مبرهنة:** إذا كانت $u_n = f(n)$ فإن $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(n)}$

IX]. نهاية متتالية باستعمال الحصر

❶ $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l \\ v_n \leq u_n \leq w_n \end{cases}$

❷ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \\ u_n \geq v_n \end{cases}$

❸ $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty \\ u_n \leq v_n \end{cases}$

X]. نهاية متتالية هندسية

	إذا كان		النهاية	التقارب
❶	$q > 1$	$v_0 > 0$ و	$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	متباعدة
❷		$v_0 < 0$ و	$\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	
❸	$-1 < q < 1$		$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$	متقاربة
❹	$q \leq -1$		غير موجودة	متباعدة

XI]. إثبات أن المتتالية غير رتيبة (غير متزايدة وغير متناقصة)

① نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

② نناقش حسب قيم n الفرق $u_{n+1} - u_n$

③ نستنتج أن u_n غير رتيبة

Prof Mustapha
KHALDI

التعليم في الفضاء
(الهندسة الفضائية)

1. المعلم الديكارتي

المعلم للفضاء: هو كل رباعية نقط $(O;I,J,K)$ ليست من نفس المستوي

باعتبار المبدأ O و بوضع $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ ، $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$ نرمز للمعلم ب $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

* يسمى (OI) محور الفواصل، (OJ) محور التراتيب و (OK) محور الرواقم
* يرمز للمستوي (OIJ) ب $P(O;\vec{i};\vec{j})$

2. احداثيات نقطة واحداثيات شعاع

* نرمز لإحداثيات نقطة M من الفضاء ب $M(x;y;z)$ حيث $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ مع $(x;y;z)\epsilon\,\mathbb{R}^3$
* نرمز لإحداثيات شعاع من الفضاء ب $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ أو $\overrightarrow{OM}(x;y;z)$

3. الحساب والخواص

$A(x_A;y_A;z_A)$ ، $B(x_B;y_B;z_B)$ نقطتين من الفضاء، $\vec{u}(x;y;z)$ ، $\vec{v}(x';y';z')$ شعاعين من الفضاء و $\alpha\epsilon\mathbb{R}$

أ) حساب احداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

ب) حساب احداثيات M منتصف القطعة $[AB]$: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

ج) $\vec{u}+\vec{v}\,(x+x';y+y';z+z')$ و $\alpha\vec{u}=(\alpha x;\ \alpha y\ ;\ \alpha z)$

د) $\vec{u}=\vec{v}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\\z=z'\end{cases}$ و $\vec{u}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\end{cases}$

4. الأشعة من نفس المستوي

$\vec{u}(a;b;c)$ ، $\vec{v}(a';b';c')$ و $\vec{w}(a'';b'';c'')$ 3 أشعة من الفضاء و $(x;y)\epsilon\mathbb{R}^2$.

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ من نفس المستوي $\Leftrightarrow \vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

أي الجملة $\begin{cases}ax+a'y=a''\\bx+b'y=b''\\cx+c'y=c''\end{cases}$ تقبل حلا $(x;y)$ في $\mathbb{R}^2$

Prof Mustapha
KHALDI

5. معادلة مستقيم معرف بنقطة وشعاع توجيه

ليكن(D)المستقيم الذي يشمل $A(x_A;y_A;z_A)$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له

$$M(x;y;z)\epsilon(D)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}\Rightarrow\begin{cases}x-x_A=\alpha a\\y-y_A=\alpha b\\z-z_A=\alpha c\end{cases}\Rightarrow\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$$

و منه معادلة (D) هي: $\begin{cases}b(x-x_A)-a(y-y_A)=0\\c(x-x_A)-a(z-z_A)=0\end{cases}$

6. المسافة

❶ طويلة شعاع $\vec{u}(x;y;z)\Rightarrow\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

❷ المسافة بين نقطتين $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

7. معادلة سطح كرة مركزها مبدأ المعلم

(S) سطح كرة مركزها O مبدأ المعلم و نصف قطرها α

$$M(x;y;z)\epsilon(S) \Rightarrow OM=\alpha \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=\alpha^2}$$

8. معادلة المستويات الموازية لأحد مستويات الاحداثيات

❶ معادلات مستويات الاحداثيات

معادلة $P(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=0$ ، معادلة $P(O;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=0$ و معادلة $P(O;\vec{k};\vec{i})$ هي $y=0$

❷ معادلة لمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات

لتكن $D(a;b;c)$ نقطة من المستوي

- معادلة المستوي الذي يشمل D ويوازي $P(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $z=c$
- معادلة المستوي الذي يشمل D ويوازي $P(O;\vec{j};\vec{k})$ هي $x=a$
- معادلة المستوي الذي يشمل D ويوازي $P(O;\vec{k};\vec{i})$ هي $y=b$

9. معادلة سطح الأسطوانة الدورانية التي محورها أحد محاور الاحداثيات

ليكن R نصف قطر الأسطوانة

- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Oz) هي $x^2+y^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $z=c$ هي $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=c\end{cases}$
- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Oy) هي $x^2+z^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $y=b$ هي $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ y=b\end{cases}$
- معادلة سطح الأسطوانة التي محورها (Ox) هي $y^2+z^2=R^2$ و معادلة المقطع بمستو معادلته $x=a$ هي $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ x=a\end{cases}$

10. معادلة سطح المخروط الدوراني الذي رأسه O ومحوره أحد محاور الاحداثيات

لتكن α قيس نصف زاوية رأس هذا المخروط

- معادلة سطح المخروط الذي محوره (Oz) هي: $x^2+y^2-\tan^2\alpha\times z^2=0$
- معادلة سطح المخروط الذي محوره (Oy) هي: $x^2+z^2-\tan^2\alpha\times y^2=0$
- معادلة سطح المخروط الذي محوره (Ox) هي: $y^2+z^2-\tan^2\alpha\times x^2=0$

Prof Mustapha

KHALDI

الاحصاء

Prof Mustapha
KHALDI

I. رموز ومصطلحات

N : عدد التكرارات (المجموع الكلي)
Q_1 : الربعي الأول
Q_3 : الربعي الثالث
D_1 : العشري الأول
D_9 : العشري التاسع
Med : الوسيط

II. الربعيان Q_1 و Q_3 و العشريان D_1 و D_9

تحديد Q_1 ، Q_3 ، D_1 و D_9		
بالترتيب	طبع كمي متقطع	طبع كمي مستمر
❶ نرتب القيم ترتيبا تصاعديا مع تكراراتها ❷ Q_1 هي القيمة التي رتبتها $\geq \frac{N}{4}$ ❸ Q_3 هي القيمة التي رتبتها $\geq \frac{3N}{4}$ ❹ D_1 هي القيمة التي رتبتها $\geq \frac{N}{10}$ ❺ D_9 هي القيمة التي رتبتها $\geq \frac{9N}{10}$	❶* Q_1 هي أول قيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{N}{4}$ * أو Q_1 هي أول قيمة التي تواترها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{1}{4}$ ❷* Q_3 هي أول قيمة التي تكرارها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3N}{4}$ * أو Q_3 هي أول قيمة التي تواترها المجمع الصاعد أكبر أو يساوي $\frac{3}{4}$	❶ Q_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{4}$ ❷ Q_3 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{3}{4}$ ❸ D_1 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{1}{10}$ ❹ D_9 هي فاصلة النقطة من منحنى التواتر المجمع الصاعد التي ترتيبها $\frac{9}{10}$

III. خواص الربعيات

1) الانحراف الربعي $I = Q_3 - Q_1$

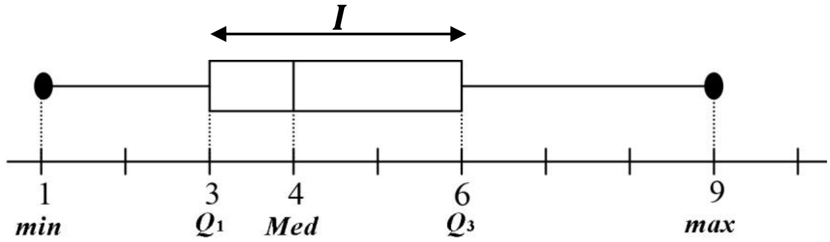
*ملاحظة1: الانحراف الربعي هو مؤشر من مؤشرات التشتت

*ملاحظة2: في مضلع سلسلة مستمرة المستقيمات التي معادلاتها $x = Q_1$ ، $x = Med$ ، $x = Q_3$ تقسم المضلع إلى أربعة مجالات متساوية المساحات

2) المخطط بالعلب

① نضع قيم الطبع على محور (أفقي أو شاقولي)
② نعين على هذا المحور القيم: min ، max ، Q_1 ، Med ، Q_3
③ نكون عندئذ مستطيلا (العلبة) بالتوازي مع المحور بحيث طول المستطيل هو الانحراف الربعي وعرضه كيفي)

مثال: $min = 1$ ، $max = 9$ ، $Q_1 = 3$ ، $Med = 4$ ، $Q_3 = 6$



*ملاحظة: هذا المخطط يمكننا من مشاهدة تشتت توزيع احصائي والمقارنة بين عدة سلاسل احصائية

3) أثر تغيير تآلفي على الربعيين

A سلسلة إحصائية (x_i, n_i) وسيطها Med و ربعيها Q_1 و Q_3
B سلسلة إحصائية (y_i, n_i) بنفس التكرارات وسيطها Med' و ربعيها Q_1' و Q_3'
من أجل كل i لدينا:

- $y_i = ax_i + b$
- $Med' = aMed + b$
- $Q_1' = aQ_1 + b$
- $Q_3' = aQ_3 + b$

حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$

IV. الوسط الحسابي $\bar{X}$

$$\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i$$ أو $$\bar{X}=\sum_{i=1}^{p}f_i x_i$$

حيث: $N=\sum_{i=1}^{p}n_i$ و $f_i=\frac{n_i}{N}$

V. التباين V

$$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-\bar{X}\right)^2$$ أو $$V=\sum_{i=1}^{p}f_i\left(x_i-\bar{X}\right)$$

أيضا $$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i^2-\bar{X}^2$$ أو $$V=\sum_{i=1}^{p}f_i x_i^2-\bar{X}^2$$

VI. الانحراف $S=\sqrt{V}$

VII. الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة e_m

$$e_m=\sum_{i=1}^{p}f_i\left|x_i-\bar{X}\right|$$

Prof Mustapha
KHALDI

VIII. خواص التباين والانحراف المعياري

1) الخاصية الأساسية

الدالة $g(a)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-a\right)^2$ تقبل قيمة حدية صغرى لما $a=\bar{X}$ و هذه القيمة هي التباين V

2) التغيير التآلفي

إذا كانت A (x_i, n_i) سلسلة إحصائية تباينها V_x و انحرافها S_x و B (y_i, n_i) سلسلة إحصائية تباينها V_y و انحرافها S_y و <u>بنفس التكرار</u> و $\boxed{y_i = ax_i = b}$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$ و من أجل $i\in\{1,2,3,\dots,p\}$ يكون لدينا:

$\boxed{V_y = a^2V_x}$ و $\boxed{S_y = |a|S_x}$

IX. تلخيص سلسلة إحصائية

- يتم تلخيص سلسلة إحصائية بمؤشرين (مؤشر موقع ومؤشر تشتت)
- <u>عموما</u> نختار الثنائية (الوسيط ، الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة) : $(Med \text{ ، } e_m)$

  أو الثنائية (الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري) : $(\bar{X} \text{ ، } S_x)$
- يمكن استعمال ثنائيات أخرى لتلخيص سلسلة كالثنائية (الوسيط ، المدى) لكن يعاب على المدى تأثره بالقيم الشاذة
- تستخدم أحيانا الثنائية (الوسيط ، الانحراف الربعي) لتلخيص السلسلة و هي ثنائية لا تتأثر بالقيم الشاذة
- تلخيص سلسلة إحصائية يمكننا من مقارنته بسلسلة أخرى ملخصة بنفس الثنائية