01 معارف أولية و قوانين أساسية:

01 - التجربة العشوائية:

نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة Ω.

مثال01: رمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6 ،

تجربة عشوائية مجموعة النتائج الممكنة هي: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

02 - الحوادث أو الأحداث :

تعريف: كل جزء A من مجموعة الإمكانيات Ω يسمى حدث أو حادثة .

أــ أنواع الحوادث:

▲ **الحدث الأولي:** إذا احتوى الجزء A عنصرا واحدا فقط يسمى حدث أولي:" حادثة أولية ".

▲ **الحدث الأكيد:** مجموعة الإمكانيات Ω يسمى أيضا الحدث الأكيد .

▲ **الحدث المستحيل:** $\varnothing$ تسمى الحدث المستحيل أي جزء خالي .

▲ **الحدث العكسي:** A حدث من Ω و $\overline{A}$ الحدث العكسي له و الذي يحوي كل عناصر Ω و التي غير موجودة في A .

أمثلة : حسب المثال 01 السابق نعتبر الأحداث التالية :

الحدث A : " الأرقام الفردية " أي $A=\{1;3;5\}$.

الحدث B : " الحصول رقم مضاعف لـ4 " أي $B=\{4\}$.حدث أولي

الحدث C :"الحصول رقم اكبر من 7 " أي $C=\varnothing$. حدث مستحيل.

الحدث $\overline{A}$: " الحصول على الأرقام الزوجية " أي $\overline{A}=\{2,4,6\}$.

أــ العمليات على الأحداث أو الحوادث: A و B حدثين من Ω

▲ **تقاطع حدثين :** هي حدث نرمز له بـ $A\cap B$ عناصرها هي العناصر المشتركة بين الحدثين A و B .

▲ **تقاطع حدثين :** هي حدث نرمز له بـ $A\cup B$ عناصرها هي عناصر A أو B .

▲ **حدثين غير متلائمين:** إذا كان $A\cap B=\varnothing$ عناصرها نقول عندئذ أن A و B غير متلائمتين .

ملاحظة : حرف و معناه التقاطع $\cap$ و يعني أيضا الجداء .

كلمة أو معناه الاتحاد $\cup$ و يعني أيضا الجمع .

مثال : نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 الى 6

مجموعة الإمكانيات $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

الحادثة A "الحصول على رقم أكبر من 3" أي : $A=\{4;5;6\}$

الحادثة B "الحصول على رقم فردي" أي $B=\{1;3;5\}$

الحادثة $A\cap B$ "الحصول على رقم أكبر من 3 أو فردي" أي $B=\{5\}$

الحادثة $A\cup B$ "الحصول على رقم فردي أو أكبر من 3" أي

$A\cup B=\{1;3;4;5;6\}$.

02 الاحتمال :

01 - احتمال حادثة:

يرمز لاحتمال تحقق الحادثة A بـ $P(A)$ حيث : $0\le P(A)\le 1$

1. إذا كان $A=\{a_1,...,a_k\}$ فإن $P(\{a_1\})=\dfrac{1}{k}$

2. إذا كان $A=\{a_1,...,a_k\}$ فإن $P(A)=P(\{a_1\})+...+P(\{a_k\})$

3. في حالة احتمال متساوي التوزيع يكون احتمال الحادثة المركبة A هو

$$\mathbf{P}(A)=\frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ملاحظة 01: نقول عن تجربة عشوائية أنها متساوية الاحتمال عندما يكون لكل الحوادث الأولية نفس الاحتمال، نقول أيضا أن الاحتمال متساوي التوزيع.

ملاحظة 02: نعبر عن تساوي الاحتمال بعبارات مثل : زهر نرد غير مزيف، قطعة نقود متوازنة، كرات لا نفرق بينها باللمس ، ...

مثال : نرمي زهر نرد غير مزيف مرقم من 1 الى 6

مجموعة الإمكانيات $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

الحادثة A "الحصول على رقم أكبر من 3" أي : $A=\{4;5;6\}$

$$P(\{1\})=P(\{2\})=...=P(\{6\})=\frac{1}{6}$$

احتمال الحادثة:

الطريقة 1 : $P(A)=P(\{4\})+P(\{5\})+P(\{6\})=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

الطريقة 1 : $\mathbf{P}(A)=\dfrac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

02 - قانون احتمال:

نعتبر تجربة عشوائية ، Ω مجموعة النتائج الممكنة $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$

قانون احتمال P لتجربة عشوائية هو إرفاق كل إمكانية e_i (مخرج) بعدد موجب P_i مع $1\le i\le n$

بحيث يتحقق ما يلي: $P_1+P_2+...+P_n=1$ ، $0\le P_i\le 1$.

مثال:

e_i	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

خواص: A و B حادثتان .

1. $0\le P(A)\le 1$ ، $P(\overline{A})=1-P(A)$ ، $P(\Omega)=1$ ، $P(\varnothing)=0$

2. إذا كانت الحادثة A جزء من الحادثة B فإن : $P(A)\le P(B)$

3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

4. إذا كانت A و B غير متلائمتين فإن: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

03 _ الأمل الرياضي ،التباين و الانحراف المعياري

لقانون احتمال:

تعاريف : Ω مجموعة إمكانيات تجربة عشوائية قيمها أعداد حقيقية $\Omega=\{e_1,e_2,...,e_n\}$

ـ P احتمالا على Ω حيث: $P_i = P(e_i)$

ـ أمل قانون الاحتمال هو العدد E حيث: $E=\sum_{i=1}^{n} e_i p_i$

ـ تباين قانون الاحتمال هو العدد V حيث :

$V=\sum_{i=1}^{n}\left(e_i-E\right)^2 p_i$ وأيضا $V=\sum_{i=1}^{n} e_i^2 p_i - E^2$.

ـ الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد : $\sigma=\sqrt{V}$

ملاحظة : الأمل يمثل الوسط الحسابي في سلسلة إحصائية .إذا اعتبرنا أن قيم الطبع هي عناصر Ω و التواترات النظرية هي قيم P_i.

تمرين 01: نرمي زهرة نرد مغشوشة بحيث: احتمال الحصول على الرقمين 4 و 5 متساو وهو ضعف احتمال الحصول على احد الرقمين 2 و3 وهو 2/3 احتمال الحصول على احد الرقمين 1 و 6 .

ما احتمال الحصول على رقم زوجي؟

تمرين 02: يحتوي وعاء على 4 كرات صفراء و 8 خضراء لا نميز بينها باللمس

نسحب بطريقة عشوائية كرتان (02)على التوالي دون إرجاع .

- استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيات السابقة ثم احسب :
- احتمال الحصول على: A " كرة صفراء ثم كرة خضراء" ،B " كرة خضراء ثم كرة صفراء" C " اللونين معا " .

* ليكن X المتغير العشوائي المعرف كما يلي:

إذا تحصلنا على كرية صفراء نربح 4 دج و إذا تحصلنا على كرية خضراء نخسر 2 دج .

1)_ ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟.

2)_ اوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X ؟.

3)_ احسب الأمل الرياضياتي E و الانحراف المعياري .

تمرين 03: عين الاقتراح الصحيح الوحيد من الاقتراحات الآتية في كل حالة مما يلي :

1 /_ A و B حدثين من Ω إذا كان :

$P(A)=0.4$ و $P(B)=0.5$ و $P(\overline{A\cap B})=0.55$ فإن:

أـ $P(\overline{A\cap B})=0.2$ ، ب ـ $P(\overline{A\cap B})=0.45$ ، جـ ـ $P(\overline{A\cap B})=0.9$.

2 / الجدول الموالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية :

x_i	-2	-1	α	3
$P(X=x_i)$	0.12	0.5	β	0.30

قيمتا α و β حتى يكون الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X يساوي 0.32 هما :

أـ $\boxed{\beta=0.08 \,;\alpha=1}$ ب ـ $\boxed{\beta=0.3 \,;\alpha=2}$ جـ ـ $\boxed{\beta=0.08 \,;\alpha=2}$.

04 _ الاحتمال الشرطي:

تعريف : A و B حادثتان من مجموع المخارج Ω حيث $p(A)\neq 0$.

نعرف على Ω احتمالا جديدا يرمز له بالرمز $p_A(B)$ أو $p(B/A)$

حيث : $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

p_A يسمى الاحتمال الشرطي لـ B علما أن A محققة.

ونقرأ :احتمال B علما أن A محققة أو احتمال علما أن B علما أن A .

تمرين 04: في قسم سنة ثالثة علوم تجريبية أجريت دراسة على 38 تلميذ منهم : 25 تلميذ يمارسون لعبة الشطرنج .

من بين 27 ذكر 19 يمارسون لعبة الشطرنج.

1ـ أنقل ثم أكمل الجدول الإحصائي الموالي :

	ذكور	إناث	المجموع
يمارس	19	...	...
لا يمارس	...	,,,	...
المجموع	...	...	38

2ـ نختار عشوائيا تلميذا واحد من القسم بإعطاء النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال

أـ احسب احتمال الأحداث التالية :

الحدث F :" التلميذ أنثى ".

الحدث A :" التلميذ يمارس لعبة الشطرنج "

الحدث $F\cap A$:"التلميذ بنت تدرس تمارس لعبة الشطرنج "

ب ـ إذا كان التلميذ أنثى ما احتمال أن تكون تمارس الشطرنج؟.

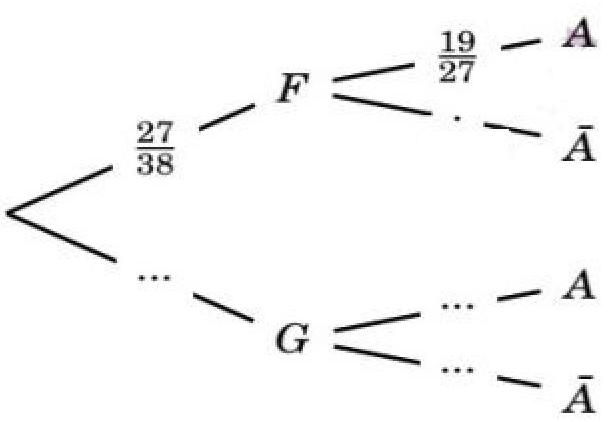
قارن بين $\dfrac{P(F\cap A)}{P(F)}$ و $P_F(A)$ ماذا تستنتج ؟ .

جـ ـ عرف الاحتمال $P_A(F)$ ثم احسبه.

د ـ إذا كان التلميذ لا يمارس اللعبة ، ما احتمال أن يكون ذكرا؟.

05 شجرة الإمكانيات:

المخطط = الجدول السابق = المقابل يسمى شجرة الإمكانيات و إذا أثقلنا او أرفقنا فروعها بالاحتمالات المواتية تسمى شجرة الاحتمالات .



1_ انقل الشجرة و أكملها . ثم استنتج خصائصها .

2_ عرف الحدث $F\cap A$ ثم احسب احتماله بالاعتماد على المخطط.

3_ ما عدد المسالك التي تؤدي إلى الحدث A ؟ احسب $P(A)$.

تمرين 05: U_1, U_2 و U_3 ثلاث صناديق يحتوي كل منها على 12 كرية بين صفراء و خضراء حيث:

U_1 به 2 صفراء و U_2 به 3صفراء و U_3 به 4صفراء.

نختار عشوائية احد الصناديق و نسحب منه عشوائيا كرية واحدة :

1. استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة التجربة السابقة.

2. ما احتمال الحصول على: A " الكرية المسحوبة صفراء " ؟.

3. ما احتمال أن تكون الكرية صفراء علما أنها من الصندوق U_1 ؟.

4. إذا كانت الكرية صفراء فما احتمال أن تكون من الصندوق U_1 ؟.

06 الأحداث المستقلة:

A و B أنهما مستقلتان معناه حدوث إحداهما لا يؤثر في حدوث الثانية .
مثال : A "نجاح عبد الله" و B "نجاح أنيس" في شهادة البكالوريا . لا حظ أن نجاح عبد الله لا يؤثر في نجاح أنيس و العكس .
نقول أن A و B مستقلتان
مثال : A "فوز فريق عبد الله" و B "فوز فريق أنيس" في مقابلة نهائيه أجريت بين الفريقين . لا حظ أن فوز فريق عبد الله يؤثر على فوز فريق أنيس والعكس. أي A و B غير مستقلتين.

تعريف : نقول عن حادثتين A و B أنهما مستقلتان إذا و فقط إذا كان :
$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

تمرين 06 U صندوق يحتوي على 12 كرية 3 حمراء و 7 خضراء لا نفرق بينها باللمس.

الجزء الأول: نسحب عشوائيا كريتين على التوالي و دون إرجاع .
نعتبر الأحداث التالية :
R_1 : "الكرية الأولى حمراء " و الحدث R_2 : "الكرية الثانية حمراء ".
V_1 : "الكرية الأولى خضراء " و الحدث V_2 : "الكرية الثانية خضراء ".

1ـ عرف ثم احسب : $P\left(R_1\cap V_2\right)$.

2ـ هل $P\left(R_1\cap V_2\right)=P\left(R_1\right)\times P\left(V_2\right)$ ماذا تستنتج؟.

الجزء الثاني: نسحب الآن عشوائيا كريتين على التوالي مع إرجاع الكرية قبل السحب الثاني :
اجب على السؤالين الواردين في الجزء الأول.
ملاحظة : يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات .

ملاحظة : ليكن P احتمال A و B حدثين احتمال كل منهما غير معدوم . المساويات الثلاثة الآتية متكافئة:
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)...(1)$ و $P_A(B)=P(B)...(2)$
و $P_B(A)=P(A)...(3)$

تمرين 07 برهن صحة المساويات الثلاثة السابقة.

تمرين 08 نرمي قطعة نقدية متوازنة أي احتمال ظهور الوجه يساوي احتمال ظهور الشعار ، n مرة متتالية :
تعتبر الحدثين M و N حيث:
M : "الحصول أوجه و شعارات " N : "الحصول على وجه على الأكثر ".

1/ إذا كان $n=2$ هل الحدثين و مستقلان ؟.

2/ إذا كان $n=3$ هل الحدثين و مستقلان ؟.

تمرين 09 A و B حدثين حيث:

الجزء الأول: $P\left(A\right)=0.4$ و $P_{\overline{A}}\left(B\right)=0.7$ و $P_A\left(B\right)=0.2$.

1/ أنشئ شجرة الإمكانيات المثقلة بالاحتمالات.

2/ احسب : $P\left(A\cap B\right)$ و $P\left(B\right)$.

الجزء الثاني: $P\left(A\right)=0.4$ و $P\left(\overline{A}\cap B\right)=0.3$ و $P\left(A\cap B\right)=0.2$.

2/ احسب : $P_A\left(B\right)$ و $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$.