ملخص الجـــداء السـلمي لشعاعين 2ع ت

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بالرمز $\vec{u}.\vec{v}$ و المعرف كما يلي:

1) اذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ او $\vec{v}=\vec{0}$ فان $\vec{u}.\vec{v}=0$

2) اذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فان $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u};\vec{v})}$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ و $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

4) اذا كان $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ فان العبارة التحليلية للجداء السلمي هي $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'}$

شرط تعامد مستقيمين $(\Delta);(D)$ مستقيمين حيث $n_D\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و $n_\Delta\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ هما على الترتيب شعاعي الناظمين لهما

$\begin{cases}(D): ax+by+c=0;\\(\Delta): \alpha x+\beta y+k=0\end{cases}$ القول ان $(\Delta)\perp(D)$ يكافئ ان :

$\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_D}=0$ او شعاعي توجيههما متعامدان او جداء ميليهما يساوي 1-

---

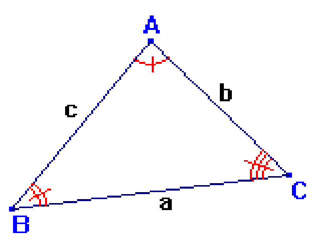
مبرهنة (المسافة بين نقطة و مستقيم):

المسافة بين نقطة و مستقيم هي أصغر مسافة بين هذه النقطة و نقطة كيفية من هذا المستقيم

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0,y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ هي: $\boxed{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

العلاقات المترية في مثلث

مبرهنة: ABC مثلث حيث $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:



$$\begin{cases}c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\\b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\\a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\end{cases};$$

مساحة المثلث $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$

قانون الجيوب $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{abc}{2S}$

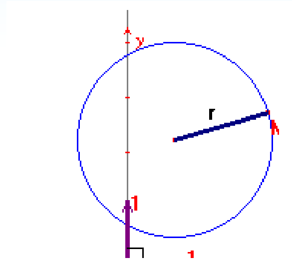
مبرهنة المتوسط : A و B نقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة M لدينا

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$$

معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها

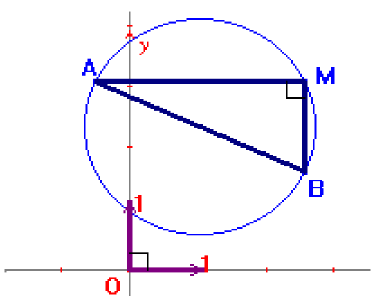
مبرهنة: في معلم متعامد و متجانس معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ و وطول نصف قطرها r

$(r>0)$ هي : $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$



معادلة دائرة علم نقطتين متناظرتين قطريا منها

الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$



دساتير الجمع

$$\begin{cases}\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a\\ \sin 2a=2\sin a\cos a\\ \cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a\\ \boxed{\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}}\;;\;\boxed{\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}}\end{cases}$$

الجداء السلمي لشعاعين :

تعريف

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و المعرف كما يلي:

- إذا كان $\vec{u}=\vec{0}$ أو $\vec{v}=\vec{0}$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- إذا كان $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$ فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$

إنـــــــتبه: $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq\vec{u}\times\vec{v}$

حالات خاصـــــة :

- اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كان لهما نفس الاتجاه فان $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$ و بالتالي:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

- اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا و كانا متعاكسان في الاتجاه فان $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$ و بالتالي:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$$

- نرمز للجداء السلمي $\vec{u}\cdot\vec{u}$ بالرمز $\vec{u}^2$ و يسمى المربع السلمي للشعاع $\vec{u}$ و بالتالي

$$\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$$

- اذا كانت A و B نقطتين فان: $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

مبــــــرهنة:

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير معدومين فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

بـــــرهان :

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين .

$$\begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2&=(\vec{u}-\vec{v})^2\\&=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\&=\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\&=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

ومنه : $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$

ومنه $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

العبارة التحليلية للجداء السلمي :

مبــــــرهنة:

في معلم متعامد و متجانس إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين حيث $\vec{u}(x;y)$ و $\vec{v}(x';y')$ فإن

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

برهان :

إذا كان $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ معلم متعامد و متجانس و كان $u\,(x;y)$ و $v\,(x';y')$ شعاعين فإن :

$\|\overrightarrow{u}\|^2=x^2+y^2$ و $\|\overrightarrow{v}\|^2=x'^2+y'^2$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2&=(x-x')^2+(y-y')^2\\&=x^2+y^2+x'^2+y'^2-2(xx'+yy')\\&=\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-2(xx'+yy')\end{aligned}$$

و بالعودة إلى عبارة $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ نجد: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'$

الأشعة المتعامدة :

تعريف

القول أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أنهما متعامدان يعني أنه إذا كان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ فإن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان

مبرهنة:

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

قواعد الحساب:

خاصية:

من أجل كل ثلاثة أشعة $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ومن أجل كل عدد حقيقي k

① $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ ② $\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$ ③ $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

④ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ ⑤ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

المتطابقات الشهيرة :

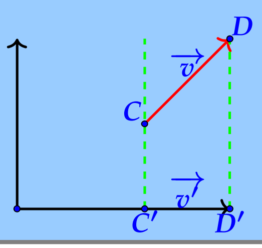
$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$	أو	$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$	أو	$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$	أو	$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

الجداء السلمي و الإسقاط العمودي :

المسقط العمودي لشعاع على محور او شعاع

تعريف

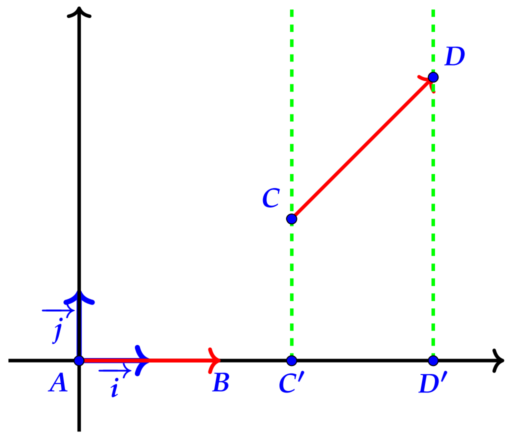
$\vec{v}$ شعاع من المستوي حيث: $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$. لتكن C' و D' المسقطان العموديان على الترتيب للنقطتين C و D على المحور $(O,\vec{u})$. يسمى الشعاع $\vec{v'}$ المعرف بـ $\vec{v'}=\overrightarrow{C'D'}$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{v}$ على المحور $(O,\vec{u})$ او على الشعاع $\vec{u}$



مبـــرهنـــــــــة:

إذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط العمودي لـ $\overrightarrow{CD}$ على (AB) فإن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

برهـــــــــان:



نختار معلما متجانس $(A;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ يكون فيه الشعاعان $\overrightarrow{i}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطيا .

عند ئذ مركبتا الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما $(x_B;0)$ و مركبتا الشعاع $\overrightarrow{CD}$ هما : $(x_D-x_C;y_D-y_C)$.

أما مركبتا الشعاع $\overrightarrow{C'D'}$ هما : $(x_D-x_C;0)$ لأن: $x_D=x'_D$ ، $x_C=x'_C$ و $y'_C=y'_D$

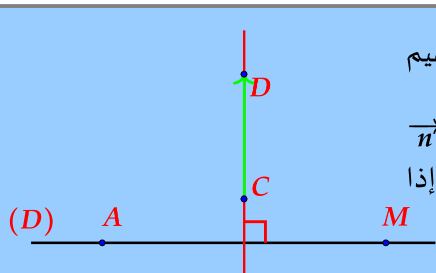
إذن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=x_B(x_D-x_C)$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}=x_B(x_D-x_C)$

الشعاع الناظمي لمستقيم :

تعريف

✍ القول ان الشعاع غير المعدوم $\overrightarrow{n}$ شعاع ناظمي لمستقيم (D) يعني ان $\overrightarrow{n}$ عمودي على شعاع توجيه لـ (D)

✍ فإذا كانت A نقطة من المستقيم (D) يقبل $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{n}$ شعاع ناظمي ، عند ئذ تنتمي النقطة M إلى المستقيم (D) إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$



معادلة مستقيم علم شعاع ناظمي له و نقطة منه :

مبـــرهنـــــــــة:

في معلم متعامد و متجانس لكل مستقيم له شعاع ناظمي غير معدوم $\overrightarrow{n}(a,b)$ معادلة ديكارتية من الشكل $ax+by+c=0$ حيث c عدد حقيقي

اذا كانت $ax+by+c=0$ هي معادلة لمستقيم (D) فإن الشعاع $\overrightarrow{u}(-b,a)$ هو شعاع توجيه لـ (D) و $\overrightarrow{n}(a,b)$ هو شعاع ناظمي له لأن $\overrightarrow{n}$ و $\overrightarrow{u}$ متعامدان : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=a\times(-b)+ba=0$

برهـــــــــان:

$A\,(x_0;y_0)$ نقطة معلومة من المستقيم (D) و $M\,(x;y)$ نقطة كيفية من (D)

$\overrightarrow{n}(a,b)$ شعاع ناظمي للمستقيم تكافئ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0$ تكافئ $(x-x_0)a+(y-y_0)b=0$ تكافئ

$ax+by-x_0a-by_0=0$ تكافئ $ax+by+c=0$ حيث : $c=-x_0a-by_0$

مثال تطبيقي : عين معادلة الدكارتية للمستقيم (D) حيث : $\vec{n}\ (3;2)$ شعاع ناظمي له و $A\ (0.2)$ نقطة منه

ملاحظة:

إذا كان (D) و (D') مستقيمان معادلتاهما: $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ على الترتيب

✍ يكون المستقيمان (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كان $aa'+bb'=0$

✍ إذا كان (D) و (D') مستقيمين مائلين ، معادلتاهما: $y=ax+b$ و $y'=a'x+b'$ على الترتيب

شرط تعامدهما $aa'=-1$

معادلة دائرة علم مركزها و نصف قطرها :

تعريف

في معلم متعامد و متجانس لكل دائرة (C) ذات المركز $\Omega(x_0;y_0)$ و نصف القطر r حيث $r \succ 0$ معادلة من الشكل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

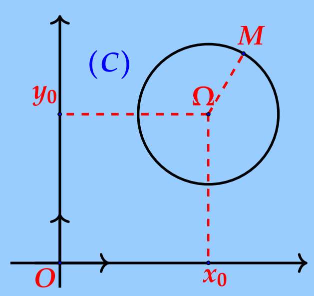
الإثـــبات

الدائرة (C) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق:

$OM=r$ أي $OM^2=r^2$

مركبتا الشعاع $\overrightarrow{OM}$ هما: $(x-x_0;y-y_0)$ ، من المبرهنة

إستنتجنا $OM^2=r^2$ تكافئ : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$



مثال تطبيقي:

✍ $(x+2)^2+(y-4)^2=6$ هي معادلة دائرة التي مركزها $A\ (-2;4)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$

✍ $(x-1)^2+(y+2)^2=-4$ هي ليست معادلة لدائرة لأن $-4<0$

معادلة دائرة علم قطرها :

مبرهنة:

الدائرة التي قطرها$[AB]$هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

الإثـــبات

لتكن نقطة I منتصف $[AB]$ ، و لنعرف $AB=2r$

من أجل أي نقطة كيفية M في المستوي :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=MO^2-AO^2=MO^2-r^2$$

إذن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ تكافئ $MO=r$.

معادلة دائرة التي قطرها $[AB]$:

لتكن $A\ (x_A;y_A)$ و $B\ (x_B;y_B)$ ، و لتكن (C) الدائرة التي قطرها $[AB]$

و مركبات الشعاعين $\overrightarrow{MA}$

و $\overrightarrow{MB}$ هي $(x-x_A;y-y_A)$ و $(x-x_B;y-y_B)$ على الترتيب .

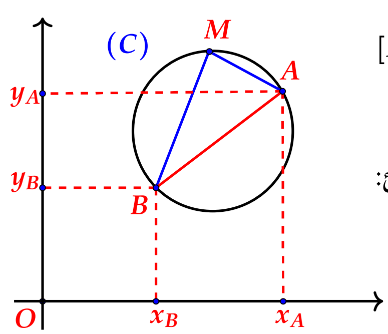
(C) هي مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ تكافئ:

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

و هي تكافئ: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ حيث :

$a=-x_A-x_B$ و $b=-y_A-y_B$

و $c=x_Ax_B+y_Ay_B$



ملاحظة :

لكل دائرة (C) معادلة من الشكل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و لكن ليس كل معادلة من هذا الشكل معادلة لدائرة

كيف نعلم أن: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلة دائرة ؟:

لتعين (C) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ، نكتب هذه المعادلة بالصيغة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k$

- إذا كان $k>0$ ،فإن (C) دائرة و النقطة $\Omega(x_0;y_0)$ مركزها ونصف قطرها $\sqrt{k}$
- إذا كان $k=0$ ،فإن (C) نقطة وحيدة $\Omega(x_0;y_0)$
- إذا كان $k<0$ ، فإن (C) خالية .

مبرهنة المتوسط

A و B نقطتان .I منتصف قطعة مستقيم $[AB]$

لدينا: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

تكافئ: $MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2$

وبما أن: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$ و $IA=IB=\frac{1}{2}AB$ أي $\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2=\frac{1}{4}AB^2$

فإن: $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

مبرهنة:

A و Bنقطتان و I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. من أجل كل نقطة Mمن المستوى لدينا:

$$\boxed{MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2}$$

العلاقات المترية في مثلث قائم :

مـــبرهـــنة الكـــاشي:

ABC مثلث حيث $AB=c$ و$AC=b$ و $BC=a$. لدينا العلاقات التالية:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\widehat{A}}$$

اثبـــــات:

حسب علاقة شال: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ تكافئ: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ تكافئ: $\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2$

تكافئ: $BC^2=AC^2+AB^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ تكافئ: $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\times AB\cos\widehat{A}$

أي : $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\widehat{A}$

- بنفس الطريقة نجد: $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\widehat{B}$ و $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\widehat{A}$

قاعدة المساحة:

مبرهنة:

ABC مثلث حيث $AB = c$ و $AC = b$ و $BC = a$. لدينا العلاقات التالية:

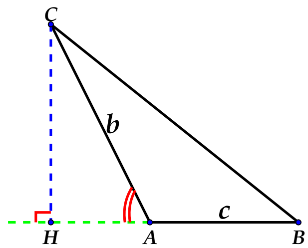
$$S = \frac{1}{2}bc.sinA = \frac{1}{2}ac.sinB = \frac{1}{2}ab.sinC$$

إثبـــــات:

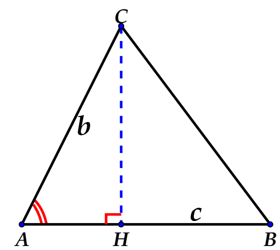
نعلم أن $S = \frac{1}{2}AB \times CH$ ، إذا كانت $\widehat{A}$ حادة فإن: $CH = CA \times \sin\widehat{A}$

وعندما تكون $\widehat{A}$ منفرجة فإن: $CH = CH \times \sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = CA\sin\widehat{A}$

ومنه في كلتا الحالتين : $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$



$\boxed{CH = CH \times \sin(\pi - \widehat{A})}$



$\boxed{CH = CA \times \sin\widehat{A}}$

نـــتيـــجة:

من المبرهنة السابقة ، نجد أن $2S = bc\sin\widehat{A} = ac\sin\widehat{B} = ab\sin\widehat{C}$ ، إذن بتقسيم $2S$ على abc

نحصل على : $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$

و إذا كانت جيوب زوايا المثلث مختلفة عن الصفر فإن: $S = \frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$

تطبيق

ABC مثلث، فيه $c = 20$ ، $b = 28$ و $a = 32$ وفق الترميز المألوف .

✍ أوجد قياسات التقريبية $\widehat{A}$ ، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$

✍ أحسب طول كل من المتوسط و الإرتفاع المرسومين من A

حساب الزوايا

لدينا حسب مبرهنة الكاشي $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{A}$، إذن نستنتج أن:

$32^2 = 28^2 + 20^2 - 2ac\cos\widehat{A}$ ومنه $\cos\widehat{A} = \frac{1}{7}$، بإستعمال الألة حاسبة نجد: $\widehat{A} = 82°$ ، بنفس الطريقة

إنطلاقا من علاقة : $b^2 = a^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{B}$ نجد $\widehat{B} = 60°$ و أخيرا نحسب $\widehat{C}$ بسهولة من :

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180$ نجد $\widehat{C} = 38°$

حساب الإرتفاع

لنضع $AH = h$، إذن $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$ ومنه : $h = c\sin\widehat{B} = 20\sin 60° = 10\sqrt{3}$

حساب المتوسط

ليكن I منتصف $[BC]$، و نضع $AI = m$. لدينا إسنادا إلى مبرهنة المتوسط ما يلي : $c^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$

إذن: $m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{28^2 + 20^2}{2} - \frac{32^2}{4} = 16 \times 21$ ومنه : $m = 4\sqrt{21}$.

مبـــــرهنة:

في معلم متعامد و متجانس المسافة بين نقطة $A(x_0;y_0)$ و مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$
هي $\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تطبيقات

❖ أحسب المسافة بين النقطة $A(2,3)$ و المستقيم (D) ذو المعدلة: $y=2x+1$

❖ عين معادلة الدائرة (C) التي مركزها Ω و تمس المستقيم (D') ذو المعادلة: $y=x+y-2$

❖ لتكن (C') مجموعة النقط $M(x,y)$ و التي تحقق المعادلة: $x^2+y^2-2x-6y-3=0$

✍ بين أن(C') دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

✍ هل المستقيم (D') ذو المعادلة $3x+2y+4=0$ مماس للدائرة (C') ؟

مناقشة تطبيقات

❖ $y=2x+1$ تكافئ $-2x+y-1=0$ ومنه المعادلة الدكارتية للمستقيم (D) هي : $-2x+y-1=0$

$$d\left(A;(D)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|-2(2)+1(3)-1\right|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

❖ $r=d\left(\Omega;(D)\right)=\dfrac{\left|1(-2)+1(1)-2\right|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ، إذن : $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=\dfrac{9}{2}$

❖ $x^2+y^2-2x-6y-3=0$ تكافئ: $(x-1)^2-1+(y-3)^2-9=0$

تكافئ: $(x-1)^2+(y-3)^2=10$ ومنه (C') دائرة مركزها $A\,(1;3)$ ونصف قطرها $r'=\sqrt{10}$

$d\left(A;(D')\right)=\dfrac{\left|3(1)+2(3)+4\right|}{\sqrt{(3)^2+(2)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$ إذن $d\left(A;(D')\right)>r'$ ومنه (D') ليس مماس لـ (C')

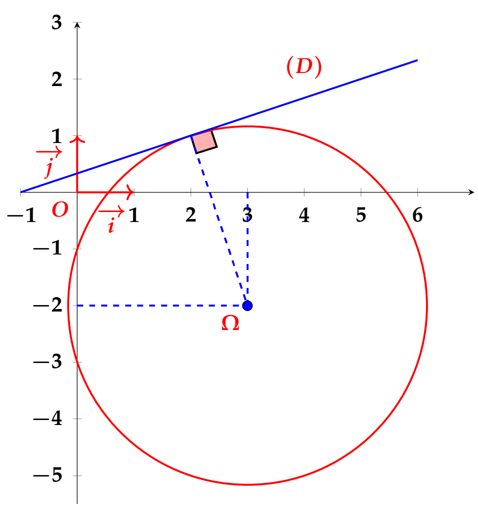
تمرين 74 صفحة 303

لتكن $\Omega\,(3;-2)$ و (D) المستقيم الذي معادلته $x-3y+1=0$

1 أحسب المسافة بين Ω و (D) .

2 إستنتج معادلة للدائرة التي مركزها Ω و التي تمس (D)

حـــــل



1

$$\begin{aligned} d\left(A;(D')\right)&=\frac{\left|1(3)-3(-2)+-1\right|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}}\\ &=\frac{10}{\sqrt{10}}\\ &=\sqrt{10}\end{aligned}$$

2 نصف قطر الدائرة التي مركزها Ω و التي تمس (D) هو : $\sqrt{10}$

معادلة لهذه الدائرة هي : $(x-3)^2+(y+2)^2=10$

ومعناه : $x^2+y^2-6x+4y+3=0$

....

مبـــرهنـــــــة:

من أجل كل عددين حقيقين a و b

❶ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

❷ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

❸ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

❹ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

تطبيق ❶

❖ تحقق أن : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ ،ثم أحسب: $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ ،و إستنتج : $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

حل

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

• إستنتاج القيم المضبوطة لـ: $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

عبارة $\cos 2a$ و $\sin 2a$

تطبيق ❷

بين، باستعمال النتائج السابقة، أن: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ و $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

بين، أن : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

حل

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

مبـــرهنـــــــة:

من أجل كل عدد حقيقي a

❶ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

❷ $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

❸ $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

❹ $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

04 تمارين بالحل المفصل في الجداء السلمي في المستوي

للأقسام: 2 ع ت، 2 ت ر، 2 ر

تمرين رقم 1:

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=3\sqrt{2}$ و $AC=2\sqrt{2}$ و $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$.

1 ـ أ ـ تحقق أن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6$.

ب ـ أحسب المسافة BC .

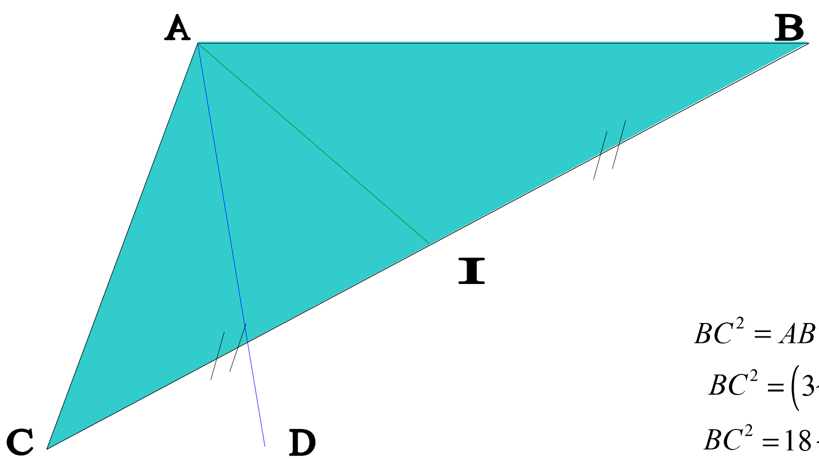
ج ـ النقطة I **هي منتصف القطعة** $[BC]$ **. أحسب المسافة** AI .

2 ـ لتكن D **نقطة بحيث** $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

بين أن المثلث ABD **قائم الزاوية في النقطة** A .

تصحيح التمرين رقم 1 :

ABC مثلثا بحيث $AB=3\sqrt{2}$ و $AC=2\sqrt{2}$ و $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$.



1 ـ أ ـ

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos B\hat{A}C$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6\times2\times\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=12\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$$

ب ـ باستعمال مبرهنة ألكاشي : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$BC^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2(-6)$$

$$BC^2=18+8+12$$

$$BC^2=38$$

$$BC=\sqrt{38}$$

ج ـ باستعمال مبرهنة المتوسط $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=2AI^2+\frac{\left(\sqrt{38}\right)^2}{2}$$

$$18+8=2AI^2+\frac{38}{2}$$

$$26=2AI^2+19$$

$$2AI^2=26-19$$

$$2AI^2=7$$

$$AI^2=\frac{7}{2}$$

$$AI=\sqrt{\frac{7}{2}}$$

2 ـ لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ **.** لنحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 6$$

$= \frac{18}{3} - 6 = 6 - 6 = 0$ وبما أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ فإن المثلث ABD قائم الزاوية في النقطة A

تمرين رقم 2:

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB = 6$ و $AC = 4$ و $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$.

1 ـــ أحسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

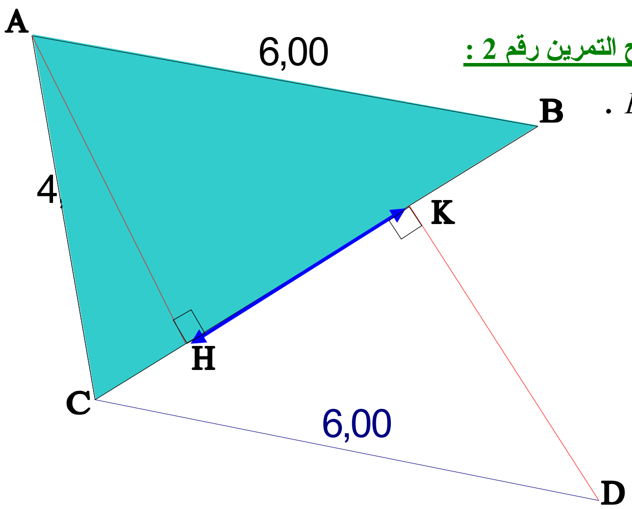
2 ـــ أحسب المسافة BC .

3 ـــ لتكن النقطة D بحيث $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ و H و K على التوالي المسقطين العموديين للنقطتين A و D على (BC) .

أ ـــ بين أن : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = AC^2 - AB^2$

ب ـــ بين أن $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -BC \times HK$.

ج ـــ استنتج قيمة المسافة HK .



تصحيح التمرين رقم 2 :

1 ـــ لدينا ABC مثلثا بحيث $AB = 6$ و $AC = 4$ و $B\hat{A}C = \frac{\pi}{3}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos B\hat{A}C$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6 \times 4 \times \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 24 \times \frac{1}{2} = 12$$

2 ـــ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$BC^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 12$$

$$BC^2 = 36 + 16 - 24 = 52 - 24 = 28$$

$$BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

3 ـــ أ ـــ لدينا : باستعمال علاقة شال

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = AC^2 - AB^2$$

ب ـــ باستعمال الاسقاط لدينا

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BC} = -HK \times BC$$

ج ـــ بما أن : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = AC^2 - AB^2$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -BC \times HK$

فإن :

$$-HK \times BC = AC^2 - AB^2$$

$$-HK \times 2\sqrt{7} = 4^2 - 6^2$$

$$-HK \times 2\sqrt{7} = -20$$

$HK = \frac{-20}{-2\sqrt{7}}$ إذن $HK = \frac{10}{\sqrt{7}}$

تمرين رقم 3:

ليكن $ABCD$ مربع طول ضلعه 4 .

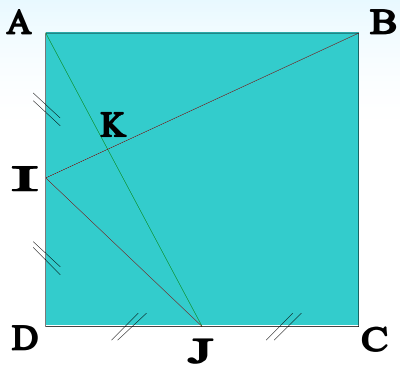
النقطتان I و J هما منتصفا القطعتين $[AD]$ و $[DC]$ على التوالي .

1 ـــ أ ـــ أحسب $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA}$.

ب ـــ أحسب $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}$ و استنتج أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدين ..

2 ــ أحسب $\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)$.

3 ــ لتكن K هي نقطة تقاطع المستقيمين (AJ) و (BI) بين أن : $BK-IK=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$



تصحيح التمرين رقم 3 :

1 ــ أ ــ لدينا : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}=AD\times AI=4\times 2=8$

ولدينا : $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA}=-DJ\times BA=-2\times 4=-8$

ب ــ لدينا حسب علاقة شال

$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\right)$$
$$=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{AI}$$
$$=0+8-8+0=0$$

بما أن $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}=0$ فإن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدين .

2 ــ لنحسب المسافات IJ و IB و BJ .

$BJ^2=BC^2+CJ^2$ $BJ^2=4^2+2^2$ $BJ^2=16+4$ $BJ^2=20$ $BJ=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	$IB^2=IA^2+AB^2$ $IB^2=2^2+4^2$ $IB^2=4+16$ $IB^2=20$ $IB=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	$IJ^2=ID^2+DJ^2$ $IJ^2=2^2+2^2$ $IJ^2=4+4$ $IJ^2=8$ $IJ=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

بتطبيق مبرهنة ألكاشي :

$$BJ^2=IB^2+IJ^2-2\times IB\times IJ\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)$$
$$\left(2\sqrt{5}\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)$$
$$20=20+8-8\sqrt{10}\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)$$
$$8\sqrt{10}\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)=28-20$$
$$\sqrt{10}\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)=1$$
$$\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

3 ــ لدينا :

$$(BK-IK)(BK+IK)=BK^2-IK^2$$

إذن : $BK-IK=\dfrac{BK^2-IK^2}{BK+IK}$

$$BK-IK=\frac{\left(AB^2-AK^2\right)-\left(AI^2-AK^2\right)}{BI}$$
$$BK-IK=\frac{AB^2-AI^2}{BI}=\frac{4^2-2^2}{2\sqrt{5}}=\frac{12}{2\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

تمرين رقم 4:

ABC مثلث بحيث $AB=4$ و $AC=3$ و $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{5}{6}$.

1 ــ أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

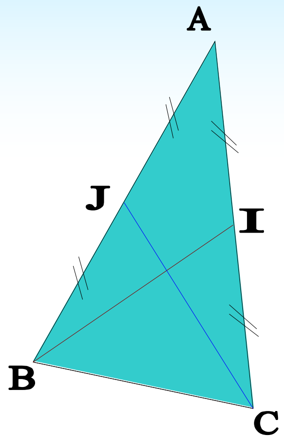
2 ــ أحسب المسافة BC .

3 ــ أ ــ لتكن I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[AB]$.

بين أن : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right)$.

ب ــ استنتج أن المستقيمين (BI) و (CJ) .

تصحيح التمرين رقم 4 :



1 ـ لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

$$= 4 \times 3 \times \frac{5}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

2 ـ باستعمال مبرهنة ألكاشي :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 6 = 16 + 9 - 12 = 13$$

$$BC = \sqrt{13}$$

3 ـ أ ـ

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}\right).\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ}\right)$$

$$= \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).\left(-\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$$

ب ـ لدينا : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$

$$= \frac{5}{4} \times 10 - \frac{1}{2}\left(4^2 + 3^2\right)$$

$$= \frac{50}{4} - \frac{1}{2} \times 25$$

$$= \frac{50}{4} - \frac{25}{2} = 0$$

إذن المستقيمان (BI) و (CJ) متعامدان .

حَصَادُ اليَومِ غِرَاسُ الأَمْسِ

وَغَرْسُ اليَومِ غَدًا يُحْصَدْ

الجداء السلمي

تمرين01

$ABCD$ مربع حيث $AB=3$ و I نقطة تقاطع قطريه

ـ احسب الجداءات السلمية التالية $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IA}$

تمرين02

في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط $A(3,2)$, $B(7,8)$, $C(8,3)$ و لتكن I منتصف $[AB]$

1) عين إحداثثي النقطة I

2) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ماذا تستنتج ؟

3) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ ثم إستنتج قيس الزاوية $(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC})$

4) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$

5) من 3 و 4 إستنتج طبيعة المثلث AIC

6) ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلث ABC ؟

تمرين 03

في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط $A(1,3)$, $B(a,1)$, $C(-1,0)$, $a\in\mathbb{R}$

1) عين قيم العدد الحقيقي a إن وجد حتى :

أ) المثلث ABC قائم في A

ب) $BC=a+3$

جـ) $\frac{2003\pi}{3}$ قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

2) نفرض أن $a=4$ عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ ثم إستنتج نوع المثلث ABC

تمرين 04

ABC مثلث حيث $AB=2$ و $BC=4$

H المسقط العمودي للنقطة A على القطعة $[BC]$ حيث $BH=1$

1) أحسب $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$ ثم إستنتج قيمة كل من $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BH}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

تمرين 05

ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه a

ولتكن D نقطة من المستوي بحيث محور $[CB]$ للقطعة $[AD]$,

أحسب , $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$,

تمرين 06

عين معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) في الحالات الاتية

1ـ (Δ) يشمل $A(-1,3)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له

2ـ (Δ) يشمل $B(-3,2)$ و عمودي على المستقيم (AC) حيث $A(4,-3)$ و $C(5,-2)$

3ـ (Δ) يشمل $A(2,-3)$ و عمودي على المستقيم (Δ') ذو المعادلة $-2x+y+7=0$

تمرين07

1.اكتب معادلة الدائرة (C) التي مركزها Ω و نصف قطرها R في الحالات التالية :

أ. $\Omega(-3,4)$, $R=5$ ب. $\Omega(2,1)$, $R=\sqrt{2}$

2.اكتب معادلة للدائرة التي مركزها و تشمل النقطة في الحالتين التاليتين:

أ. $\Omega(-3,4)$, $A(0,1)$ ب. $\Omega(2,-3)$, $A(0,0)$

3. عين معادلة للدائرة (C) التي قطرها $[AB]$ حيث:

أ. $A(-1,5)$, $B(3,1)$ ب. $A(3,-2)$, $B(-1,2)$

4. اكتب معادلة للدائرة التي تشمل النقط A, B, C في الحالتين التاليتين :

أ. $A(-1,-1)$, $B(1,2)$, $C(3,-1)$

ب. $A(1,0)$, $B(0,2)$, $C\left(-2,\frac{-3}{2}\right)$

تمرين08

عين في كل حالة مما يأتي مجموعة النقط التالية:

1. $x^2+y^2-5x+7y+\frac{5}{2}=0$
2. $2x^2+2y^2-6x+2y+5=0$
3. $x^2+y^2-x+4y+5=0$
4. $2\left(x^2+y^2\right)-4x+2y+\frac{1}{2}=0$
5. $4x^2+4y^2-12x+8y+13=0$
6. $y^3+x^2y+5y^2-4xy=0$

تمرين09

في معلم متعامد و متجانس لتكن النقط $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(-2,\mathrm{k}+1)$, $k\in\mathbb{R}$

1ـ عين قيمة k حتى يكون المثلث ABC قائما في B

2ـ عين معادلة الدائرة (C) التي قطرها $[AB]$

3ـ استنتج مركز و نصف قطر الدائرة (C)

4ـ عين معادلة (Δ) الإرتفاع المتعلق بالضلع $[AC]$

5ـ عين معادلة (Δ') محور القطعة المستقيمة $[AB]$

6ـ عين احداثيتي النقطة E نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (Δ') هل $E\in(C)$ ؟ علل.

تمرين 10

في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس نعتبر مجموعة النقط (C) حيث :

$(C): x^2+y^2-5x+5=0$

1) بين أن (C) دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

2) ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $(\Delta): 2x-3y+2=0$

أـ أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) بالنسبة للدائرة (C)

تمرين11

في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط $A(2,0)$, $B\left(0,\sqrt{3}\right)$, $M(x,y)$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$

1. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$

2. استنتج ان مجموعة النقط التي تحقق $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}=3$ هي الدائرة (C) التي مركزها $I(1,0)$ و نصف قطرها $r=2$ ثم تحقق ان النقطة B تنتمي اليها.

3. عين معادلة المستقيم (D) المار من النقطة E و العمودي على الشعاع $\overrightarrow{IA}$

4. عين معادلة للمستقيم (T) مماس (C) في النقطة B

5. عين احداثيتي النقطة E نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (T)

6. احسب المسافة بين المستقيم (D) و النقطة E ثم المسافة بين المستقيم (T) و النقطة E

7. أرسم الدائرة (C) و المستقيم (D) و المماس (T) موضحا النقطتين A و B

تمرين12

في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط $C(3,6)$, $D(1,4)$, $M(x,y)$ و المجموعة (E) التي تحقق $\vec{CM}.\vec{DM}=0$

1.عين مجموعة النقط (E)

2.عين معادلتي المماسين (Δ_C) و (Δ_D) لمجموعة النقط (E) عند النقطتين C و D على التوالي

3.ماذا يمكن القول عن النقطتين C و D

4.نعتبر النقطة $B(-1,7)$ أحسب المسافة بين النقطة B و المستقيم (Δ_C) ثم استنتج المسافة بين B و (Δ_D)

5.نعتبر النقطة $W(2,5)$ أوجد مجموعة النقط من المستوي التي تحقق $\vec{WM}.\vec{DW}=0$

تمرين 13

(π) مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس و لتكن (C_m) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى التي تحقق : $x^2+y^2-(m-4)x+(m+4)y+6=0$

$m\in\mathbb{R}$

1)بين أن (C_m) دائرة محددا مركزها و نصف قطرها

2)حدد (D) مجموعة المراكز (C_m) لما يتغير m في $\mathbb{R}$

3)بين أن جميع الدوائر (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين A و B

4)تحقق أن $(D)\perp(AB)$

5)نعتبر المستقيم $(\Delta_m): y=-2x+m$

أ)ناقش حسب قيم m تقاطع (C_{-2}) و (Δ_m)

ب)لتكن $(\Delta_m)\cap(C_{-2})=\{M_1,M_2\}$ و I_m منتصف $[M_1M_2]$

حدد مجموعة النقط لما يتغير m في $\mathbb{R}$.

تمرين 14 :

ABC مثلث, I , J , K منتصفات الأضلاع $[BC]$, $[AC]$,

أثبت أن $AI^2+BJ^2+CK^2=\frac{3}{4}(AB^2+AC^2+BC^2)$

تمرين 15 :

ليكن ABC و $ACGH$ و $ABEF$ مربعان

1)برهن أن $\vec{FC}^2=\vec{BH}^2$.ماذا يمكن القول عن القطعتين $[FC]$و$[BH]$

2)عبر عن الزاوية $(\vec{AF},\vec{AH})$ بدلالة الزاوية $(\vec{AB},\vec{AC})$ ثم أثبت أن المستقيمان (FC) و (BH) متعامدان

تمرين16 :

I)عبر بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ كل من العبارات التالية :

1) $A=\cos(x+\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4})$

2) $B=\sin(x+\frac{\pi}{3})+\sin(x-\frac{\pi}{3})$

3) $C=2\cos(x+\frac{\pi}{4})-\sin(x+\frac{\pi}{4})$

4) $D=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$

5) $E=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

II)1)عبر بدلالة $\cos 2\alpha$ عن كل من $\sin^2\alpha$ و $\cos^2\alpha$

2)عبر عن $(\cos x-\sin x)^2$ و $(\cos x+\sin x)^2$ بدلالة $\sin 2\alpha$

تمرين17 :

أنشر العبارة $\cos(x-\frac{\pi}{4})$ ثم حل في المجال $[0;\pi]$ المعادلة $\cos x+\sin x=\sqrt{2}$

تمرين18 :

1)بملاحظة أن $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ أحسب $\sin(\frac{\pi}{12})$

$\cos(\frac{\pi}{12})$

2)أحسب $\cos(\frac{\pi}{8})$, $\sin(\frac{\pi}{8})$

تمرين19:

أكتب $\tan(x+y)$ بدلالة $\tan(x)$ و $\tan(y)$

تمرين 20 :

I)بسط العبارات التالية :

1) $A=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

2) $B=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

3) $C=\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{\sin 3x}{\sin x}$

II)برهن صحة المساواة التالية :

1) $\sin^4 x-\cos^4-\sin^2 x+\cos x=0$

2) $\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$

3) $6\cos^2 x+4\sin^2 x=5+\cos 2x$

4) $\sin(x+y)\cos(x-y)+\cos(x+y)\sin(x-y)=\sin 2x$

5) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=(\cos 2x)(1+\cos 2x)$

تمرين21:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\cos x+\cos(x+\frac{\pi}{4})+\cos(x+\frac{3\pi}{4})+\cos(x+\pi)=1$

2) $\sin^4 x-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}=0$

3) $\cos^4 x-\frac{1}{8}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{8}=0$

4) $\sin(x+\frac{\pi}{6}).\sin(x+\frac{7\pi}{6})=-\frac{3}{4}$

5) $\cos(x+\frac{3\pi}{4}).\cos(x+\frac{5\pi}{4})=-\frac{\sqrt{3}}{4}$

6) $\sin x+\sin(x+\frac{\pi}{2})=1$

7) $\sin^2 x+\cos 2x=\frac{3}{4}$

8) $\cos 2x+\cos x=0$

9) $\sqrt{3}\sin 5x+\cos 5x=1$

تمرين22 :

A و B نقطتان من المستوي حيث $AB=4$

ما هي مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق

$MA^2+MB^2=16$

تمرين 23:

ما هي مجموعة النقط M من المستوي حيث :

1) $(2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB}=0$

2) $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=0$

تمرين 24:

A و B نقطتان من المستوي و I منتصف $[AB]$

1)بين أنه من أجل كل نقطة M من المستوي يكون : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB}$

2)نفرض أن $AB=1$

عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $MA^2-MB^2=2$

تمرين 25:

لتكن A و B نقطتان متمايزتان من المستوي و G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;2)\}$ حيث $AB=5$

1)أ)أكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

ب)لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي بحيث :

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=10.......(1)$

بين أن $G\in(E)$

- برهن أن العلاقة (1) تكافئ $AG.AB=0$

- إستنتج أن (E) هي المستقيم العمودي على (AB) في G .