الأستاذ فؤاد خيرالدين

2AS

المجلة الشاملة في الدوال العددية

من إعداد الأستاذ فؤاد خيرالدين

للسنة ثانية ثانوي شعب علمية

تجدون في هذه المجلة

- ملخص شامل للدرس
- تمارين مقترحة
- حل مفصل للتمارين المقترحة

fouad.mathematics@gmail.com

الأستاذ فؤاد خيرالدين

prof.khireddine

الفهـــــــرس

1 ملخص شامل و مبسط للدوال العددية

تذكير

1.1 إشارة العبارة $ax+b$

a و b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$ لدينا : $ax+b=0$ تكافئ $x=-\frac{b}{a}$

* إشارة $ax+b$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

2.1 حلول المعادلة من الدرجة الثانية و التحليل إلى جداء عاملين

a ، b و c أعداد حقيقية مع a غير معدوم $(a \neq 0)$

$ax^2+bx+c=0$ هي معادلة من الدرجة الثانية مميزها Δ حيث $\Delta = b^2-4ac$

إذا كان:

❶ $\Delta > 0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين هما: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

تحليل العبارة ax^2+bx+c

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

إشارة العبارة ax^2+bx+c

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

❷ $\Delta = 0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مضاعف x_0 حيث : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

تحليل العبارة ax^2+bx+c

$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$

إشارة العبارة ax^2+bx+c

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	نفس إشارة a	0	نفس إشارة a

❸ $\Delta < 0$

المعادلة $ax^2+bx+c=0$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$

تحليل العبارة ax^2+bx+c

العبارة ax^2+bx+c لا تقبل تحليلا في $\mathbb{R}$

إشارة العبارة ax^2+bx+c

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a

3.1 تذكير ببعض المتطابقات الشهيرة

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

4.1 قواعد الحساب على الكسور

a ، b ، c و d أعداد حقيقية مع ($b \neq 0$ و $d \neq 0$)

❖ $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

❖ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

❖ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

❖ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

5.1 قواعد الحساب على الجذور

a و b عددان حقيقيان موجبان مع ($b \neq 0$)

❖ $\sqrt{a^2} = |a|$

❖ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

❖ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

تنبيــه حذاري من هذا الخطأ الشائع $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

6.1 قواعد الحساب على القوى الصحيحة

a و b عددان حقيقيان غير معدومين و m و n عددان صحيحان نسبيان

❖ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

❖ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

❖ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

❖ $(a^m)^n = a^{mn}$

❖ $a^n \times b^n = (ab)^n$

❖ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

7.1 القيمة المطلقة و خواصها

x عدد حقيقي ، M نقطة من مستقيم مزود بمعلم $(O;I)$ فاصلتها x ، القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة OM و نرمز لها بالرمز $|x|$ و لدينا :

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

❖ $|x| \geq 0$

❖ $|-x| = |x|$

❖ $\sqrt{x^2} = |x|$

❖ $|x \times y| = |x| \times |y|$

❖ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

❖ $|x + y| \leq |x| + |y|$

❖ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

❖ $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in]-\infty; -a[\cup]a; +\infty[$

❖ $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ أو $x = -y$

8.1 مجموعة تعريف دالة

تعريف

مجموعة تعريف دالة هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي من أجلها يكون حساب $f(x)$ ممكنا و نرمز لها عادة بالرمز D_f

أمثلة:

❶ f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = \frac{1}{x-2}$

f معرفة لما : $x - 2 \neq 0$ أي $x \neq 2$ و منه مجموعة تعريف الدالة f هي كل الأعداد الحقيقية x ما عدا 2

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

❷ g دالة معرفة بالعبارة : $g(x) = \sqrt{x+3}$

g دالة معرفة لما : $x + 3 \geq 0$ أي $x \geq -3$ و منه مجموعة تعريف الدالة f هي كل الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي -3

$$D_g = [-3; +\infty[$$

❸ h دالة معرفة بالعبارة : $h(x) = \sqrt{|x| - 2}$

h معرفة لما : $|x| - 2 \geq 0$ أي $|x| \geq 2$ ومنه $D_h =]-\infty; 2] \cup [2; +\infty[$

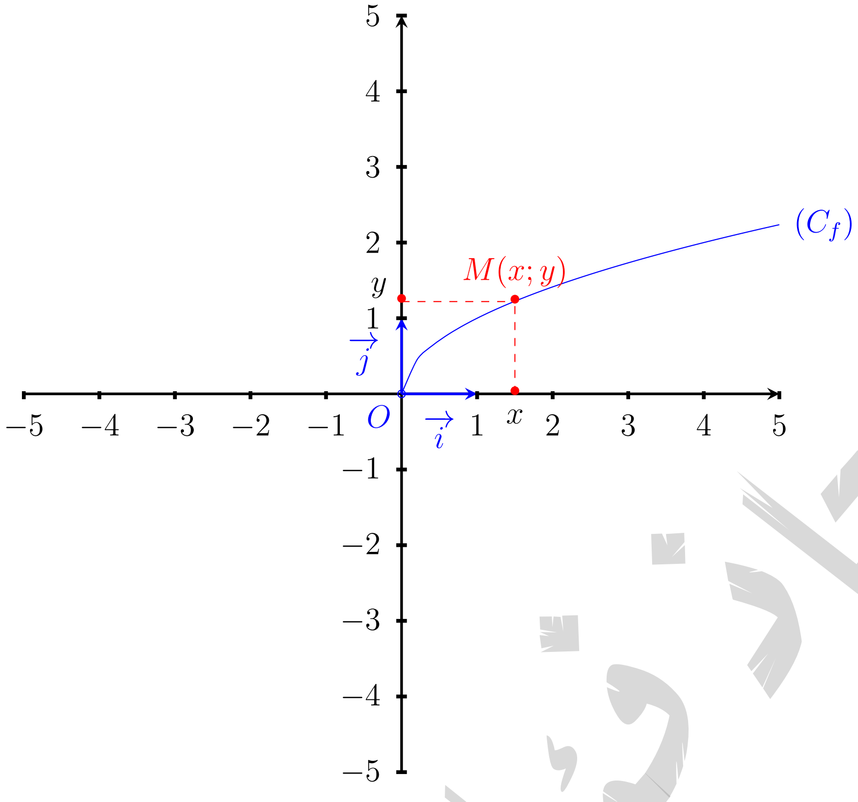
9.1 التمثيل البياني لدالة

تعريف

f دالة معرفة على مجموعة D
التمثيل البياني للدالة f في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ هو مجموعة النقط $M(x; y)$ حيث : $x \in D$ و $y = f(x)$
إذا رمزنا إلى منحنى الدالة f بـ (C_f) فإن $y = f(x)$ هي معادلة (C_f) في المعلم $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

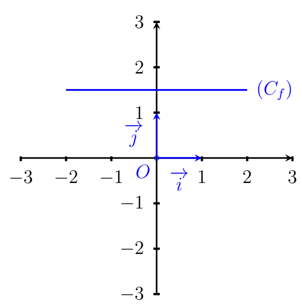
مثال

f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\sqrt{x}$



لدينا $M(x;y)\in(C_f)$ معناه $y=f(x)$ أي $y=\sqrt{x}$ و هي معادلة المنحنى (C_f)

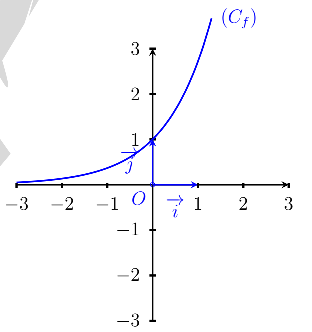
10.1 إتجاه تغير دالة



دالة ثابتة

إذا كان $x_1<x_2$

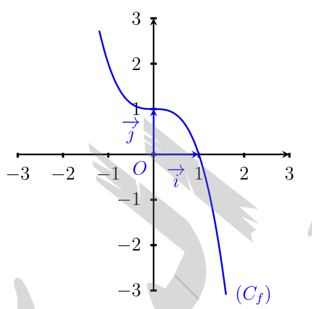
فإن : $f(x_1)=f(x_2)$



دالة متزايدة تماما

إذا كان $x_1<x_2$

فإن : $f(x_1)<f(x_2)$



دالة متناقصة تماما

إذا كان $x_1<x_2$

فإن : $f(x_1)>f(x_2)$

11.1 العمليات على الدوال

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب . λ و k عددان حقيقيان

العملية	الرمز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع f و k	$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	D_f
مجموع f و g	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
جداء f بالعدد λ	λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$	D_f
جداء f و g	$f \times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	$D_f \cap D_g$
قسمة f على g	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g$ و $g(x)\neq 0$

أمثلة

❶ f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3x+1$

$f+2$ هي مجموع الدالة f بالعدد 2 و معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$(f+2)(x)=f(x)+2=3x+1+2=3x+3$$

❷ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+1$ و g دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\sqrt{x}$

الدالة $f+g$ هي مجموع الدالة f و الدالة g و معرفة على $\mathbb{R}\cap[0;+\infty[$ حيث :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+1+\sqrt{x}$$

مجموعة تعريف الدالة $f+g$ هي D_{f+g} حيث :

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap[0;+\infty[=[0;+\infty[$$

❸ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+1$

جداء الدالة f بالعدد 3 هي الدالة $3f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $(3f)(x)=3\times f(x)=3(x+1)=3x+3$

❹ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 1$ و g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \sqrt{x}$

جداء الدالة f بالدالة g هو الدالة $f \times g$ المعرفة على $D_f \cap D_g$ بـ:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x+1) \times \sqrt{x} = x\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

مجموعة تعريف الدالة $f \times g$ هي $D_f \cap D_g$ حيث :

$$D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [0; +\infty[= [0; +\infty[$$

❺ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 1$ و g دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \sqrt{x}$

الدالة $\frac{f}{g}$ هي حاصل قسمة الدالة f على الدالة g المعرفة بـ :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

مجموعة تعريف الدالة $\frac{f}{g}$ هي $D_f \cap D_g$ مع $g(x) \neq 0$ أي :

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= \{x \in D_f \cap D_g \quad et \quad g(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \cap [0; +\infty[, \quad g(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in [0; +\infty[, \quad \sqrt{x} \neq 0\} \\ &= \{x \in [0; +\infty[, \quad x \neq 0\} \\ &=]0; +\infty[\end{aligned}$$

إذن : $D_{\frac{f}{g}} =]0; +\infty[$

12.1 تساوي دالتين

تعريف

القول عن دالتين f و g أنهما متساويتان إذا كانت لها نفس مجموعة التعريف D و من اجل كل x من D $f(x) = g(x)$

مثال

الدالتان f و g المعرفتان بـ : $g(x) = 1 + \frac{2}{x-3}$ $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ متساويتان لان :

$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{3\}$ و من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = \frac{x-1}{x-3} = \frac{x-3+2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3} = g(x)$$

13.1 تركيب الدوال

تعريف

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب

❑ مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ و المعرفة على $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \quad ; f(x) \in D_g\}$ بـ : $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$

❑ مركب الدالة g متبوعة بالدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f \circ g$ و المعرفة على $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \quad ; g(x) \in D_f\}$ بـ : $(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right]$

أمثلة

❶ نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2x + 1$

✍ الدالة $f \circ g$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left[g(x)\right] \\ &= f(2x+1) \\ &= (2x+1)^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

✍ الدالة $g \circ f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\left[f(x)\right] \\ &= g(x^2) \\ &= 2x^2 + 1\end{aligned}$$

من خلال هذا المثال نستنتج أن $f \circ g \neq g \circ f$

❷ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + 4$ و الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = \sqrt{x}$

✍ لنعين مجموعة تعريف الدالة $g \circ f$: $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \quad ; f(x) \in D_g\}$

$g\circ f$ معرفة إذا كان $x \in D_f$ و $f(x) \in D_g$ أي $x \in \mathbb{R}$ و $f(x) \in [0; +\infty[$ و منه $-x+4 \in [0; +\infty[$

إذن $-x + 4 \geq 0$ أي $x \leq 4$ نستنتج : $D_{g\circ f} =]-\infty; 4]$

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = \sqrt{-x+4}$$

14.1 تفكيك دالة بإستعمال الدوال المرجعية

أمثلة

❶ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x-2)^2$

نفكك f إلى دالتين مرجعيتين

$$x \xrightarrow{u} x-2 \xrightarrow{v} (x-2)^2$$

و منه $f = v \circ u$ حيث $u : x \to x-2$ و $v : x \to x^2$

❷ g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x-3}$

نفكك f إلى دالتين مرجعيتين

$$x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} \frac{1}{x-3}$$

و منه $g = v \circ u$ حيث $u : x \to x-3$ و $v : x \to \frac{1}{x}$

15.1 إتجاه التغير

1.15.1 إتجاه تغير الدالة $f+k$

مبرهنة

f دالة رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي
للدالتين f و $f+k$ نفس إتجاه التغير على المجال I

مثال الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x^2$ متزايدة تماما على I
إذن الدالة $f-2$ متزايدة تماما على المجال I

2.15.1 إتجاه تغير الدالة λf

مبرهنة

f دالة رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ ، λ عدد حقيقي غير معدوم
❶ إذا كان $\lambda > 0$ يكون للدالتين f و λf نفس إتجاه التغير على المجال I
❷ إذا كان $\lambda < 0$ يكون للدالتين f و λf إتجاه تغير متعاكسين على المجال I

مثال الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x^2$ متزايدة تماما على I إذن الدالة $-3f$ متناقصة تماما على المجال I

3.15.1 إتجاه تغير مجموع دالتين

مبرهنة

1. مجموع دالتين متزايدتين تماما على مجال I هو دالة متزايدة تماما على I
2. مجموع دالتين متناقصتين تماما على مجال I هو دالة متناقصة تماما على I

مثال الدالة g المعرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \sqrt{x}$ متزايدة تماما على I

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 2x + 3$ متزايدة تماما على I

إذن الدالة $f + g$ المعرفة على $I = [0; +\infty[$ بـ : $(f + g)(x) = 2x + 3 + \sqrt{x}$ متزايدة تماما على I

4.15.1 إتجاه تغير مركب دالتين

مبرهنة

f دالة رتيبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ و g دالة رتيبة تماما على مجال J من $\mathbb{R}$ حيث $f(I) \subset J$

1. إذا كان للدالتين f و g نفس إتجاه التغير فإن الدالة $g \circ f$ متزايدة تماما على I
2. إذا كان للدالتين f و g إتجاه تغير متعاكسين فإن الدالة $g \circ f$ متناقصة تماما على I

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x + 1)^2$

الدالة f هي مركب دالتين u و v حيث : $f = u \circ v$

الدالة v معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $v(x) = x + 1$

الدالة u معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x) = x^2$

✍ الدالة v متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

لدينا :

$$v(x) \subset [0; +\infty[$$
$$x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -1$$

و منه الدالة $u \circ v$ متزايدة تماما على المجال $[-1; +\infty[$

✍ الدالة v متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$
لدينا :

$$v(x) \subset]-\infty;0]$$

$$x+1 \leq 0$$

$$x \leq -1$$

و منه الدالة $u \circ v$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$

ملاحظة

لتحديد إتجاه تغير الدالة $f \circ g$ على I نتبع الخطوات التالية :

1. تحديد رتابة الدالة f على I
2. تحديد إن أمكن $f(I)$ أو على الأقل تحديد المجال J بحيث $f(I) \subset J$
3. تحديد رتابة الدالة g على J
3. تطبيق مبرهنة إتجاه تغير مركب دالتين

تطبيق

f دالة معرفة على $I=]-5;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x+5}$

1. أدرس إتجاه تغير الدالة f على I

حل مقترح

نلاحظ أن $f=v\circ u$ حيث : $u(x)=x+5$ و $v(x)=\frac{1}{x}$
لدينا $x\in I$ أي $x<-5$ و منه $x+5<0$ أي $u(x)<0$ إذن $u(x)\in]-\infty;0]$
نستنتج أن: $u(I)=]-\infty;0]$
u متزايدة على I و v متناقصة على $u(I)$ و منه الدالة vou متناقصة على I

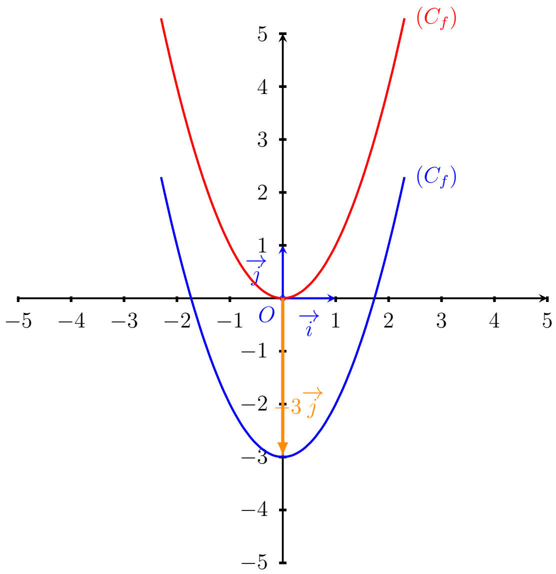
16.1 التمثيل البياني للدالة $f+k$

مبرهنة

إذا كان (C_f) و (C_{f+k}) التمثيلين البيانين في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ للدالتين f و $f+k$ على الترتيب حيث k عدد حقيقي فإن (C_{f+k}) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$

مثال في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ منحنى الدالة f حيث $f(x)=x^2-3$ هو صورة منحنى الدالة مربع بالإنسحاب الذي شعاعه $-3\vec{j}$ (أنظر إلى

الشكل)

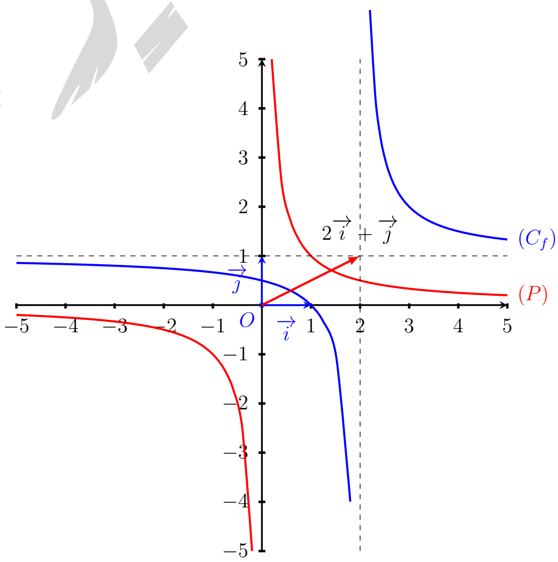


17.1 التمثيل البياني للدالة $x \mapsto f(x+a)+b$

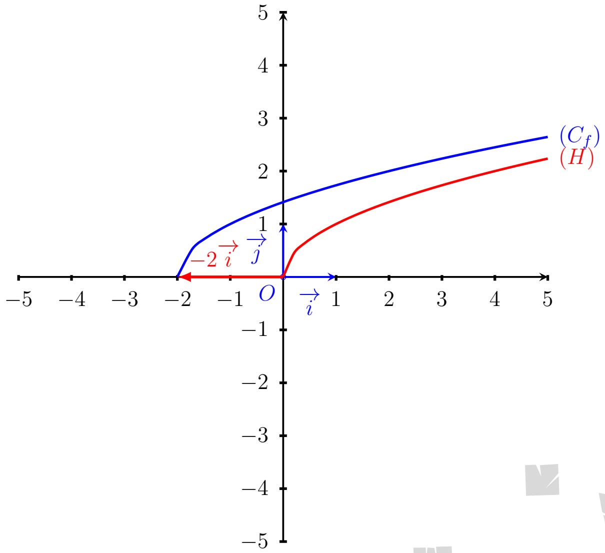
مبرهنة

لتكن f و g دالتين معرفتين على D حيث من أجل كل x من D لدينا : $g(x) = f(x+a)+b$
حيث a وb عددان حقيقيان إذا كان (C_f) و (C_g) التمثيلين البيانين في معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
للدالتين f و g على الترتيب فإن (C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}+b\vec{j}$

أمثلة ❶ f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $f(x) = 1+\frac{1}{x-2}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
(C_f) هو صورة (P) منحنى الدالة مقلوب بالإنسحاب الذي شعاعه $2\vec{i}+\vec{j}$ (انظر إلى الشكل)

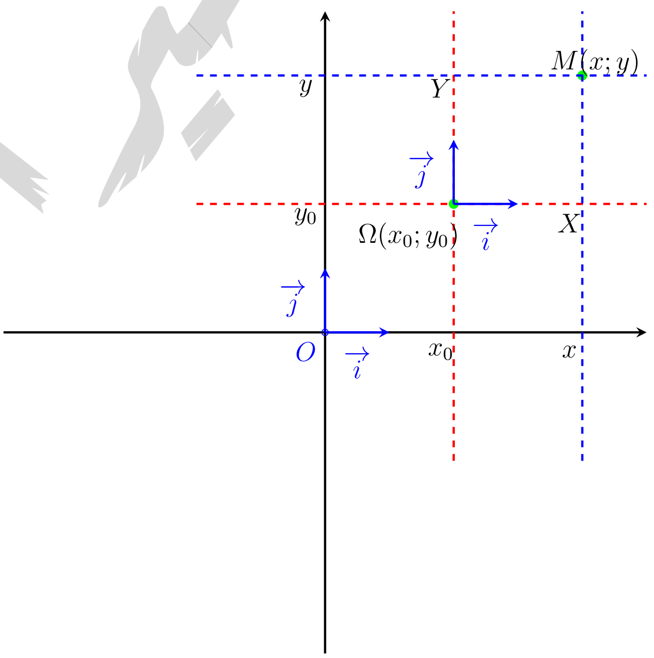


❷ g دالة معرفة على المجال $[-2;+\infty[$ بـ : $g(x)=\sqrt{x+2}$ (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
(C_g) هو صورة (H) منحنى الدالة جذر تربيعي بالإنسحاب الذي شعاعه $-2\vec{i}$



18.1 دساتير تغيير المعلم

$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم للمستوي و Ω نقطة من المستوي حيث $(x_0;y_0)$ هي إحداثياتها بالنسبة للمعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و ليكن $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$ معلم جديد للمستوي
M نقطة من المستوي حيث $(x;y)$ هي إحداثياتها بالنسبة للمعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ و $(X;Y)$ هي إحداثياتها بالنسبة للمعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$ (انظر إلى الشكل)



من خلال الشكل السابق لدينا :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$$
$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0-0 \\ y_0-0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X-0 \\ Y-0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

أي :

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

العلاقة الأخيرة تسمى دساتير تغيير المعلم

مثال في المستوي المنسوب إلى المعلم $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ إحداثيات النقطة Ω هما $(2;3)$ و إحداثيات النقطة M هما $(5;4)$

✍ ما هي إحداثيات النقطة M في المعلم الجديد $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$

إحداثيات النقطة M في المعلم الجديد $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ هما $(X;Y)$ حيث :

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$$

بالتعويض نجد :

$$\begin{cases} X = 5 - 2 = 3 \\ Y = 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

إذن إحداثيات النقطة M في المعلم الجديد $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ هي $M(3;1)$

19.1 كيفية تعيين محور تناظر منحنى

الطريقة الأولى

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f)

❶ تغيير المعلم من $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ إلى $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث فاصلة Ω هي a و ترتيبة Ω اخترها كما تشاء

❷ كتابة معادلة (C_f) في المعلم الجديد $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$

❸ إثبات أن الدالة المحصل عليها زوجية

عندئذ نقول أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f)

مثال g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x-3)^2 + 1$

✍ أثبت أن المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ هو محور تناظر للمنحنى (C_g)

الإجابة

نقوم بتغيير المعلم من $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ إلى $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\Omega(3;2)$ هنا اخترت ترتيبة Ω هي 2

لدينا دساتير تغيير المعلم :

$$\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} x = X + 3 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

معادلة (C_g) في المعلم $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ هي : $y = g(x)$ أي $y = (x-3)^2 + 1$

لإيجاد معادلة (C_g) في المعلم الجديد $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ نعوض x بـ $X + 3$ و y بـ $Y + 2$ في المعادلة السابقة :

$$y = (x-3)^2 + 1$$
$$Y + 2 = (X + 3 - 3)^2 + 1$$
$$Y = X^2 - 1$$

$Y = X^2 - 1$ هي معادلة (C_g) في المعلم الجديد

لنثبت الآن أن الدالة المحصل عليها زوجية

لدينا $G(X) = X^2 - 1$ معرفة على $\mathbb{R}$ من أجل كل X من $\mathbb{R}$ نجد $-X \in \mathbb{R}$

$$G(-X) = (-X)^2 - 1 = X^2 - 1 = G(X)$$

إذن G زوجية

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ هو محور تناظر لـ (C_g)

الطريقة الثانية

f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f)

نتحقق أن من أجل كل $x \in D_f$ ، $(2a - x) \in D_f$ و لدينا :

$$f(2a - x) = f(x)$$

لنثبت أن المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ محور تناظر لـ (C_g)

$$\begin{aligned} g(2 \times 3 - x) = g(6 - x) &= (6 - x - 3)^2 + 1 \\ &= (3 - x)^2 + 1 \\ &= [-(x - 3)]^2 + 1 \\ &= (x - 3)^2 + 1 = g(x) \end{aligned}$$

الطريقة الثالثة

f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f)

نتحقق أن من أجل كل $(a + x) \in D_f$ و $(a - x) \in D_f$ و لدينا :

$$f(a + x) - f(a - x) = 0$$

لنثبت أن المستقيم ذو المعادلة $x = 3$ محور تناظر لـ (C_g)

$$\begin{aligned} g(3 + x) - g(3 - x) &= (3 + x - 3)^2 + 1 - \left[(3 - x - 3)^2 + 1\right] \\ &= x^2 + 1 - \left[(-x)^2 + 1\right] \\ &= x^2 + 1 - x^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

20.1 كيفية تعيين مركز تناظر منحنى

الطريقة الأولى

لإثبات أن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

❶ تغيير المعلم من $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ إلى $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$

❷ كتابة معادلة (C_f) في المعلم الجديد $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$

❸ إثبات أن الدالة المحصل عليها فردية

عندئذ نقول أن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f)

مثال g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $g(x)=\frac{1}{x-1}+2$

✍ أثبت أن النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تناظر لـ (C_g)

أولا نغير المعلم من $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ إلى $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$

دساتير تغيير المعلم :

$$\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$$

ثانيا كتابة معادلة (C_g) في المعلم $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j}\right)$ من أجل ذلك نعوض x بـ $X+1$ و نعوض y بـ $Y+2$ في معادلة (C_g) في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ التي هي $y=\frac{1}{x-1}+2$

$$y=\frac{1}{x-1}+2$$
$$Y+2=\frac{1}{X+1-1}+2$$
$$Y=\frac{1}{X}$$

معادلة (C_g) في المعلم الجديد هي $Y=\frac{1}{X}$

ثالثا نثبت أن الدالة G حيث : $G(X)=\frac{1}{X}$ فردية

G معرفة على $\mathbb{R}^*$ من أجل كل $X \in \mathbb{R}^*$ ، $-X \in \mathbb{R}^*$ و لدينا

$$G(-X) = \frac{1}{-X} = -\frac{1}{X} = -G(x)$$

نستنتج أن النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تناظر لـ (C_g)

الطريقة الثانية

f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f لإثبات أن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f)

من أجل $x \in D_f$ و $2a-x \in D_f$ إذا كان : $f(2a-x)+f(x)=2b$ فإن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_g)

لنتحقق أن المنحنى (C_g) للدالة g المعرفة سابقا يقبل النقطة $\Omega(1;2)$ كمركز تناظر

$$\begin{aligned} g(2\times 1-x)+g(x) &= \frac{1}{2-x-1}+2+\frac{1}{x-1}+2 \\ &= \frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-1}+4 \\ &= -\cancel{\frac{1}{x-1}}+\cancel{\frac{1}{x-1}}+4 \\ &= 4 = 2\times 2 \end{aligned}$$

و منه النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تناظر لـ (C_g)

الطريقة الثالثة

f دالة معرفة على مجموعة تعريفها D_f لإثبات أن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f)

من أجل $(a+x) \in D_f$ و $(a-x) \in D_f$ إذا كان : $f(a+x)+f(x-a)=2b$ فإن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_g)

لنتحقق أن المنحنى (C_g) للدالة g المعرفة سابقا يقبل النقطة $\Omega(1;2)$ كمركز تناظر

$$\begin{aligned} g(1+x)+g(1-x) &= \frac{1}{1+x-1}+2+\frac{1}{1-x+1}+2 \\ &= \frac{1}{x}+\frac{1}{-x}+4 \\ &= \cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{x}}+4 \\ &= 4 = 2\times 2 \end{aligned}$$

و منه النقطة $\Omega(1;2)$ مركز تناظر لـ (C_g)

21.1 أسئلة حول عناصر تناظر منحنى و شفعية دالة و كيفية الإجابة عليها

السؤال	الجواب
بين أن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f)	نبين أن $(2a-x)\in D_f$ و $f(2a-x)+f(x)=2b$
بين أن $f(a+x)+f(a-x)=2b$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تناظر لـ (C_f)
بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (C_f)	نبين أن $(2a-x)\in D_f$ و $f(2a-x)=f(x)$
بين أن $f(a+x)=f(a-x)$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر لـ (C_f)
بين أن $f(-x)-f(x)=0$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن الدالة f زوجية و (C_f) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب
بين أن $f(-x)+f(x)=0$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن الدالة f فردية و (C_f) متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم $O(0;0)$
بين أن $f(2a-x)+f(x)=2b$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\Omega(a;b)$
بين أن $f(a-x)+f(x)=b$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\Omega(\frac{a}{2};\frac{b}{2})$
بين أن $f(2a-x)-f(x)=0$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تناظر للمنحنى (C_f)
بين أن $f(a-x)-f(x)=0$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{a}{2}$ محور تناظر للمنحنى (C_f)
بين أن $f(x+a)=f(x)$ ماذا تستنتج ؟	نستنتج أن الدالة f دورية و دورها يساوي a

22.1 إنشاء المنحنى (C_g) إنطلاقا من المنحنى (C_f)

إذا كان	فإن
$g(x)=f(x+a)+b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-a}{b}$
$g(x)=f(x+a)$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{-a}{0}$
$g(x)=f(x)+b$	(C_g) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{0}{b}$
$g(x)=-f(x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل
$g(x)=f(-x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب
$g(x)=-f(-x)$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لمبدأ المعلم $O(0;0)$
$g(x)=f(\|x\|)$	الدالة g زوجية و (C_g) ينطبق على (C_f) لما $x\geq 0$ و (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب لما $x\leq 0$
$g(x)=\|f(x)\|$	(C_g) ينطبق على (C_f) لما (C_f) يكون فوق محور الفواصل و (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل لما (C_f) يكون تحت محور الفواصل

23.1 الوضع النسبي

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$ نضع : $E(x) = f(x) - (ax + b)$

* إذا كان $E(x) > 0$ معناه المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ)
* إذا كان $E(x) < 0$ معناه المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ)
* إذا كان $E(x) = 0$ معناه المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ)

24.1 تقاطع منحنى مع حاملي محوري الإحداثيات

1. لتعيين نقط تقاطع منحنى مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ فنجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة
2. لتعيين نقطة تقاطع منحنى دالة مع حامل محور التراتيب نحسب $f(0)$ فتكون نقطة التقاطع هي $A(0; f(0))$

25.1 حل المعادلات و المتراجحات بيانيا

1. حل المعادلة $f(x) = g(x)$ بيانيا تعني تعيين فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) و (C_g)
2. حل المتراجحة $f(x) \geq g(x)$ بيانيا تعني تعيين فواصل نقط (C_f) الواقعة فوق (C_g)
3. حل المعادلة $f(x) = a$ بيانيا تعني تعيين فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الأفقي ذو المعادلة $y = a$
4. حل المتراجحة $f(x) < a$ بيانيا تعني تعيين فواصل نقط المنحنى (C_f) الواقعة تماما تحت المستقيم الأفقي ذو المعادلة $y = a$

سلسلة تمارين مقترحة

The only way to learn mathematics is to do mathematics

التمرين 1

عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية

- $f(x) = 3x - 2$
- $f(x) = \frac{1}{x-2}$
- $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$
- $f(x) = \sqrt{-x+3}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$
- $f(x) = \sqrt{|x|-4}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{-x+2}{x^2-6x+5}}$
- $f(x) = \sqrt{1-|x|}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{2}{x-5}$
- $f(x) = \frac{1}{2-|x|}$
- $f(x) = \frac{1}{3+|x|}$
- $f(x) = \sqrt{2x^2+2x-4}$

التمرين 2

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـ: $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=-x+3$

❶ عين كل من D_f و D_g

❷ عين مجموعة تعريف الدوال التالية: $f+2$ ، $3f$ ، $f+g$ ، $f\times g$ ، $\frac{f}{g}$

التمرين 3

أذكر إن كانت الدالتين f و g متساويتين في كل حالة مما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x+3 \\ g(x)=(\sqrt{x+3})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=1+\frac{2}{x+3} \\ g(x)=\frac{x+5}{x+3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=x \\ g(x)=\frac{x^2+x}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{(x+1)^2} \\ g(x)=|x+1| \end{cases}$$

التمرين 4

عين مجموعة تعريف ثم عبارة كل من $f\circ g$ و $g\circ f$ في كل حالة مما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x+1 \\ g(x)=\frac{x+3}{x+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x-1} \\ g(x)=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+1} \\ g(x)=2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x-1} \\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases}$$

التمرين 5

فكك الدالة f إلى دالتين يطلب تعيينهما في كل حالة مما يلي :

❶ $f(x)=x^2+3$

❷ $f(x)=(x+1)^2+2$

❸ $f(x)=\frac{1}{x-2}$

❹ $f(x)=2\sqrt{x}+1$

❺ $f(x)=|x-1|+2$

التمرين 6

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 2x - 3$
(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ بين انه من أجل كل x عدد حقيقي : $f(x) = (x+a)^2 + b$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

❷ عين إتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty; 1]$ و $[1; +\infty[$

❸ شكل جدول تغيرات الدالة f

❹ بين أن (C_f) هو صورة منحنى الدالة مربع بإنسحاب يطلب تعيينه

❺ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر لـ (C_f)

❻ أنشئ (C_f)

❼ أشرح كيف يمكن إنشاء التمثيل البياني للدوال التالية :

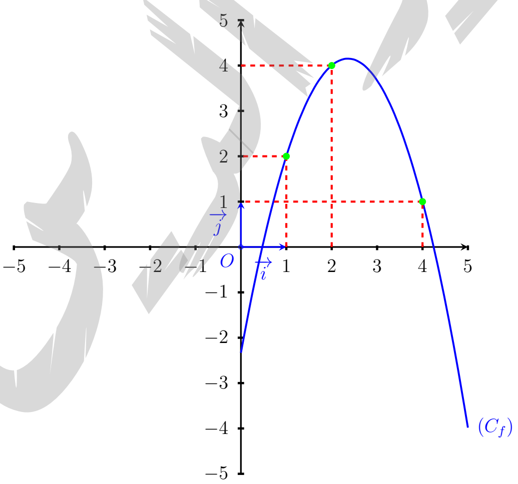
$$\begin{cases} g(x) = -f(x) \\ u(x) = |f(x)| \\ v(x) = f(-x) \\ h(x) = f(|x|) \\ k(x) = f(x-1) \end{cases}$$

التمرين 7

f دالة معرفة على المجال$[0; 5]$ بتمثيلها البياني كما في الشكل المقابل

❶ أحسب $(f \circ f \circ f)(1)$

❷ استنتج $\Bigg(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{2027}\Bigg)(1)$



التمرين 8

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\quad f(x) = x^3 - mx + 2$

الجزء الأول

❶ عين قيمة m حتى يكون 2 جذرا لـ f

الجزء الثاني نضع $m = 3$

❶ أكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = (x-1)g(x)$ حيث g كثير حدود يطلب تعيينه

❷ حلل $f(x)$ إلى جداء عوامل أولية

الجزء الثالث

نعتبر المعادلة $-(m+1)x^2 + 2mx + 1 - m = 0$ حيث m وسيط حقيقي

عين قيم m بحيث :

❶ المعادلة تقبل حلا وحيدا

❷ المعادلة تقبل حلا مضاعف

❸ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

❹ المعادلة لا تقبل حلولا

التمرين 9

g دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $\quad g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ بين انه من أجل كل x عدد حقيقي يختلف عن 1 : $\quad g(x) = a + \frac{b}{x-1}$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

❷ أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

❸ بين أن النقطة $A(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_g)

❹ أنشئ المنحنى (C_g)

التمرين 10

نعتبر الدالتين u و v المعرفتين كما يلي $u(x) = x - 2$ $\quad v(x) = \frac{1}{x}$

f دالة معرفة على $]2; +\infty[$ بـ : $f = v \circ u$

❶ أكتب عبارة $f(x)$ بدلالة x

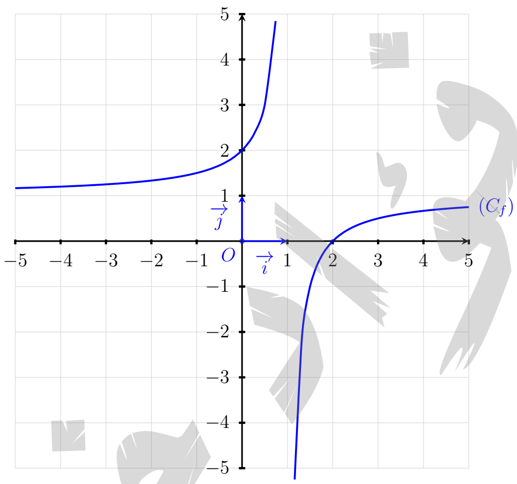
❷ عين صورة المجال $]2; +\infty[$ بالدالة u

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2; +\infty[$

التمرين 11

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = a + \frac{b}{x-1}$ حيث a و b عددان حقيقيان

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل



❶ عين شعاع الإنسحاب الذي يسمح بالإنتقال من منحنى الدالة مقلوب إلى المنحنى (C_f)

❷ بالإستعانة بالشكل استنتج عبارة $f(x)$

❸ شكل جدول تغيرات الدالة f

❹ خمن بيانيا مركز تناظر المنحنى (C_f) ثم تأكد من ذلك جبريا

❺ حل بيانيا المتراجحة $f(x) \geq 0$

❻ لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $g(x) = |f(x)|$

أ/ أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

ب/ إشرح كيفية إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه

ج/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = m$

التمرين 12

f و g دالتان معرفتان بجدول تغيراتهما كما يلي :

x	-3		0		1
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

x	-4		0		5
$g(x)$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

❶ أوجد مجموعة تعريف الدالة h المعرفة كما يلي : $h(x) = (g \circ f)(x)$

❷ أحسب $h(-3)$ ، $h(1)$

❸ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $h(x) = -5$

❹ أدرس إتجاه تغير الدالة h على المجال $[-3;0]$ ثم على المجال $[0;1]$

التمرين 13

❏ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ عين العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل من x من $\mathbb{R} - \{2\}$: $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$

❷ بين أن الدالة f هي مركب دالتين يطلب تعيينهما

❸ بإستعمال مبرهنة مركب دالتين عين إتجاه تغير الدالة f

❹ بين أن النقطة $\Omega(-2;2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

❺ اشرح طريقة رسم (C_f)

❏ لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ : $g(x) = f(-|x|)$

❶ بين أن الدالة g زوجية

❷ إشرح طريقة رسم (C_g) منحنى الدالة g إنطلاقا من (C_f) ثم ارسمه

التمرين 14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 + 2x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=(x+1)^2-1$

❷ فكك الدالة f إلى مركب دالتين مرجعيتين u و v يطلب تعيينهما

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1;+\infty[$

❹ بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=-1$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f)

❺ إنطلاقا من المنحنى (P) الممثل للدالة "مربع" حدد طريقة رسم المنحنى (C_f) ثم ارسمه

❑ g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x)=|f(x)|$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ أكتب عبارة g دون رمز القيمة المطلقة

❷ استنتج كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق

التمرين 15

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2-4x+3$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f(x)=(x-2)^2-1$

❷ فكك الدالة f إلى مركب دالتين يطلب تعيينهما

❸ استنتج اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $[2;+\infty[$ و $]-\infty;2]$

❹ بين أن $x=1$ معادلة محور تناظر منحنى الدالة f

❺ اشرح كيفية إنشاء (C_f) إنطلاقا من التمثيل البياني لدالة "مربع" ثم أنشئه

❺ أنشئ (C_h) و (C_g) التمثيلات البيانية للدوال المعرفة على الترتيب بـ :

$$\begin{cases} h(x)=|f(x)| \\ g(x)=-f(x) \end{cases}$$

التمرين 16

❑ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - 6x + 5$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

❶ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) = (x-3)^2 - 4$

❷ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty; 3]$ و $[3; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

❸ أحسب $f(3-x) - f(3+x)$ ماذا تستنتج ؟

❹ عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات

❺ أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $f(x)$

❻ أنشئ (C_f)

❑ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = f(-|x|)$$

❶ بين أن الدالة g زوجية

❷ أكتب الدالة g دون رمز القيمة المطلقة

❸ إشرح كيفية رسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g إنطلاقا من المنحنى (C_h) ثم أنشئه

التمرين 17

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ : $f(x) = \frac{x}{x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

❶ أوجد العددين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 لدينا :

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1}$$

❷ فكك الدالة f إلى مركب دالتين u و v يطلب تعيينهما

❸ استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1[$

❹ شكل جدول تغيرات الدالة f

❺ بين أن النقطة $\Omega(1;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

❻ استنتج كيفية رسم المنحنى (C_f) انطلاقا من منحنى الدالة "مقلوب" ثم ارسم (C_f)

❼ مثل في نفس المعلم السابق المنحنى البياني للدوال g و h حيث :

$$\begin{cases} g(x) = f(|x|) \\ h(x) = -|f(x)| \end{cases}$$

التمرين 18

❑ لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 + 2x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❶ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f(x) = (x+1)^2 - 1$

❷ بين أنه يمكن كتابة f على شكل مركب دالتين مرجعيتين يطلب تعيينهما

❸ استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

❹ عين نقاط تقاطع (C_f) حاملي محوري الإحداثيات

❺ بين أن $f(-2-x) = f(x)$ فسر النتيجة بيانيا

❻ مثل (C_f) مع الشرح

❑ g و h دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = f(|x|) \qquad h(x) = |f(x)|$$

❶ أدرس شفعية الدالة g

❷ أكتب كل من الدالتين f و g دون رمز القيمة المطلقة

❸ مثل كل من (C_g) و (C_h)

❑ u و v دالتان معرفتان على D_v و D_u كما يلي :

$$v(x) = \frac{2x+3}{2x+2} \qquad u(x) = -2x^2 + 4x + 4$$

❶ عين مجموعة تعريف الدالتين $v \circ \left(\sqrt{u(x)+2x^2}\right)$ و $\left(\sqrt{u(x)+2x^2}\right) \circ v$

التمرين 19

f دالة معرفة على المجال $[-10;15]$ بجدول تغيرات التالي :

x	-10	-5	-2	-1	0	6	15
$f(x)$	3	0	-4	0	3	0	-6

❑ g الدالة المعرفة على المجال $[-10;10]$ بـ : $g(x) = -2f(-|x|)$

❶ أدرس شفعية الدالة g

❷ أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

❸ شكل جدول تغيرات الدالة g

❑ h دالة معرفة بـ : $h(x) = f(x^2 - 10)$

❶ أوجد D_h مجموعة تعريف الدالة h

❷ أدرس إتجاه تغير الدالة h على المجال $[2\sqrt{2}; \sqrt{10}]$

❸ حل في D_h المعادلة $h(x) = 0$

❑ k دالة معرفة بـ : $k(x) = \frac{x^3-2x^2-5x+6}{f(x)}$

❶ أوجد D_k مجموعة تعريف الدالة k

❷ حل في D_k المتراجحة $k(x) > 0$

التمرين 20

لتكن f دالة معرفة بـ : $f(x) = \frac{ax+6}{2x+b}$ حيث a و b عددان حقيقيان و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

❶ إذا علمت أن (C_f) يمر من النقطتين $A(-2;1)$ و $B(0;3)$ بين أن $a = 4$ و $b = 2$

❷ عين مجموعة تعريف الدالة f

❸ عين العددين الحقيقيين c و d حيث : $f(x) = c + \frac{d}{x+1}$

❹ بإستعمال مركب دالتين ، أدرس اتجاه تغير الدالة f

❺ بين أن $\Omega(-1;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

التمرين 21

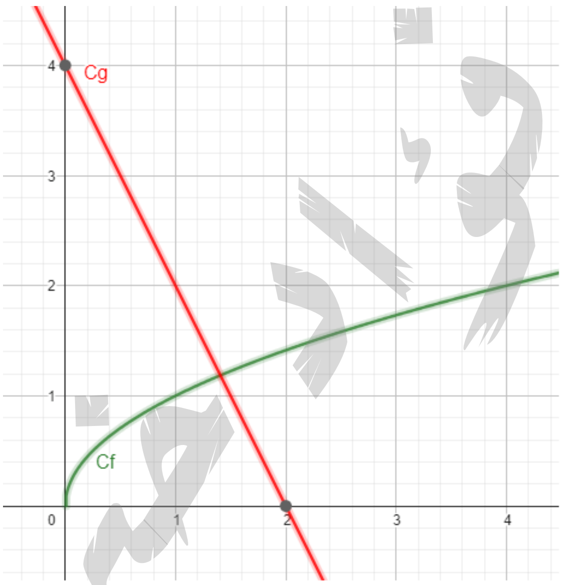
لتكن f دالة معرفة على المجال $[-3;4]$ بجدول تغيراتها التالي :

x	-3		2		4
$f(x)$	16	$\searrow$	1	$\nearrow$	9

✍ أدرس إتجاه التغير ثم شكل جدول تغيرات لكل من الدوال التالية : $\frac{1}{f}$ ، $\sqrt{f}$ و f^2

التمرين 22

f و g دالتان معرفتان على $[0;+\infty[$ و $\mathbb{R}$ على الترتيب (C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو موضح في الشكل



❶ بقراءة بيانية عين $(f\circ g)(1)$ ، $(f\circ g)(0)$ و $(g\circ f)(0)$

❷ لتكن $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=-2x+4$

■ عين $D_{f\circ g}$ و $D_{g\circ f}$ ثم استنتج إتجاه تغير الدالة $f\circ g$

■ عين عبارة $f\circ g$ و $g\circ f$

التمرين 23

❑ f دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = -2 + \sqrt{x-1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. تحقق أن الدالة f هي مركب دالتين u و v يطلب تعيينهما .
2. بالإعتماد على إتجاه تغير الدالتين u و v استنتج إتجاه تغير الدالة f .
3. حل في المجال $[1;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل .
4. اشرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) إنطلاقا من محنى الدالة (جذر تربيعي) ثم ارسمه

❑ لتكن g الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ : $g(x) = |f(x)|$
و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم

1. أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
2. اشرح كيف يمكن رسم (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه .

❑ h دالة معرفة بالعبارة : $h(x) = -2 + \sqrt{|x|-1}$

1. بين أن مجموعة تعريف الدالة h هي D_h حيث : $D_h =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
2. بين أن h دالة زوجية
3. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه .

التمرين 24

❑ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 + 4x + 3$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $\quad f(x) = (x+2)^2 - 1$
2. فكك الدالة f إلى مركب دالتين بسيطتين يطلب تعيينهما

❸ بإستعمال التفكيك السابق أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;-2]$ ثم على المجال $[-2;+\infty[$

❹ بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=-2$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f)

❺ أنشئ المنحنى (C_f) انطلاقا من منحنى الدالة مربع .

❑ نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=x^2+4\,|x|+3$$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

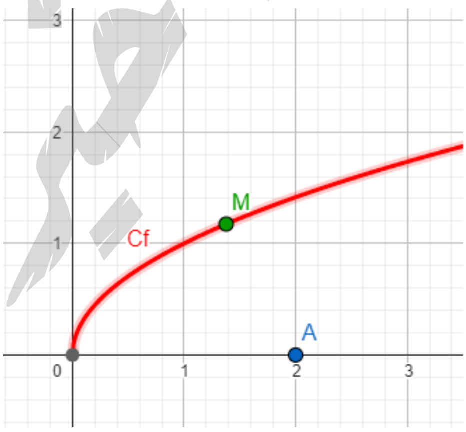
❶ بين أن الدالة g زوجية

❷ أكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة وفق مجالات مناسبة .

❸ إشرح كيف يمكن إنشاء (C_g) إنطلاقا من (C_f) ثم أنشئه .

التمرين 25

في مستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، نعتبر المنحنى (C) الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ و النقطة A التي إحداثياتها $(2;0)$



الهدف من هذه المسألة هو تعيين النقطة من (C) الأقرب من A ليكن x عدد حقيقي موجب و M نقطة من (C) فاصلتها x .

❶ عبر عن الطول AM بدلالة x

❷ لتكن f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

❸ ما هي العلاقة الموجودة بين AM و $f(x)$

❹ أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

❺ إستنتج إحداثيتي النقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن

الحلول المفصلة

قريبا في الإصدار الثاني من المجلة