مرجح نقطتين

تعريف

لتكن A و B نقطتين متمايزتين وليكن α و β عددين حقيقيين حيث $\boxed{\alpha+\beta\neq 0}$.
نسمي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب النقطة G حيث:
$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}}$.

ملاحظات:

- ⋆ إذا كانت نقطة A بالعدد الحقيقي α الثنائية $(A;\alpha)$ تسمى نقطة مثقلة .
- ⋆ الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين(يُمكن تعريف وبنفس الطريقة جملة n نقطة مثقلة).
- ⋆ النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$.
- ⋆ إذا كانت A منطبقة على B نحصل على $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{0}$ وبما أنّ $\alpha+\beta\neq 0$ فإنّ $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{0}$ أي: G ينطبق على A.
- ⋆ إذا كان $\alpha+\beta=0$ أي: $\alpha=-\beta$ العلاقة تصبح $\alpha\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$ وهذا غير ممكن إذا كان $\alpha\neq 0$ و $B\neq A$ والنقطة G غير موجودة. مثلا إذا كان $\alpha=1$ و $\beta=-1$ وإذا كان $A\neq B$ الجملة $\{(A;1);(B;-1)\}$ ليس لها مرجح.

نتيجة

إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل $\boxed{\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}}$ والنقطة G منتصف القطعة $[AB]$ تسمى عندئذ G مركز المسافتين المتساويتين للنقطتين A و B . وفي هذه الحالة نأخذ $\alpha=\beta=1$.

مبرهنة ﴿1﴾

إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإنّ النقطة G وحيدة.

برهــان. $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ معناه $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ (علاقة شال)
ومنه $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}$
بما أنّ $\alpha+\beta\neq 0$ فإنّ $\boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$ ، A و B نقطتان ثابتتان إذا G وحيد.

□

ملاحظات مهمة:

- ◁ G نقطة وحيدة من المستقيم (AB) فاصلتها $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ في المعلم $(A;B)$.
- ◁ إذا كان α و β من نفس الإشارة فإنّ G تكون من القطعة $[AB]$.
- ◁ إذا كان α و β مختلفين في الإشارة فإنّ G تكون خارج القطعة $[AB]$.
- ◁ تكون G أقرب من النقطة ذات المعامل الأكبر بالقيمة المطلقة مثل الميزان.

مـــــثـــــال «1»

أنشئ مرجح كل جملة من الجمل التالية:

1. P مرجح الجملة المثقلة $\{(A,6);(B,-2)\}$.
2. K مرجح الجملة المثقلة $\{(A,3);(B,1)\}$.
3. L مرجح الجملة المثقلة $\{(A,2);(B,5)\}$.
4. Q مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,5)\}$.

خـــــواص:

1) إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإنّ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم.

2) إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ فإنّ النقط A، B و C على استقامة واحدة.

برهـــــان.

1. $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ بضرب الطرفين في العدد الحقيقي غير المعدوم k نحصل على:
$k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ ونعلم أنّ $\alpha+\beta\neq 0$ وبما أنّ $k\neq 0$ فإنّ $k\alpha+k\beta\neq 0$ وهذا يعني صحة الخاصية الثانية.
2. من المبرهنة 01 السابقة نعلم أنّ $\overrightarrow{GA}=-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ معناه أن النقط A ، B و G على استقامة واحدة.

□

مبرهنة «2»

إذا كانت النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب فإنّ من أجل كل نقطة M

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}.$$

برهـــــان.

من أجل كل نقطة M : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}$ (علاقة شال)

وبما أنّ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ فإنّ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

□

ملاحظـــة : إذا كان المرجح G منتصف القطعة $[AB]$ فإنّ من أجل كل نقطة M $\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MG}}$.

مرجح ثلاث نقط

تعريف

A ، B و C ثلاث نقط ؛ α ، β و γ ثلاث أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

نسمي مرجح النقط A ، B و C

المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب النقطة G حيث: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

مبرهنات وخواص:

إذا كانت النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ ، فإنّ :

★ G وحيدة لأن $\left(\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}\right)$ إنشاء G.

★ أجل كل نقطة من M المستوي ، $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

★ النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ ، حيث k عدد حقيقي.

أي:(إذا ضربنا المعاملات في نفس العدد الحقيقي لا يتغير المرجح).

★ إذا كان $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ فإنّ G تسمى مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C .

ونأخذ: $\alpha=\beta=\gamma=1$

وإذا كانت النقط A ، B و C ليست في استقامية فإنّ G مركز ثقل المثلث ABC .

خاصية التجميع:

مبرهنة 3

G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب.
إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ وكانت النقطة D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.
فإن: G مرجح النقطتين D و C المرفقة بالمعاملات $\alpha+\beta$ و γ على الترتيب.

إحداثيات مرجح ثلاث نقط :

مبرهنة 4

المستوي منسوب إلى معلم
. لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب. نضع $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ إحداثيا النقطة G هي $(x_G;y_G)$ حيث:

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G &= \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

ملاحظة :

إذا كانت النقطة G مرجح النقط A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.
وكان $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $G(x_G;y_G)$ فإنّ:

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G &= \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

حالات خاصة:

1) إذا كانت النقطة G منتصف القطعة $[AB]$ فإنّ:

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_G &= \dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

2) إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC فإنّ :

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G &= \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$$

مرجح عدة نقط (مرجح n نقطة حيث $n > 3$):

تعريف :

لتكن $A_1, A_2, ..., A_n$ نقطة n $(n \succ 3)$ مرفقة بالمعاملات $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ على الترتيب حيث $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$

نسمي مرجح النقط A_1 ، A_2 ، ... ، A_n المرفقة بالمعاملات $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ النقطة G حيث

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \alpha_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$$

تطبيق

تعيين مجموعة نقط باستعمال المرجح :

ABC مثلث من المستوي. α ، β و γ ثلاثة أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

ليكن G مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب .

الهدف هو تعيين حسب قيم العدد الحقيقي k المجموعة (Γ_k) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$$\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}\| = k$$.

1. أكتب الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$ ثمّ بيّن أنّ $MG = \dfrac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|}$.
2. ناقش تبعا لقيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (Γ_k) محددا عناصرها الهندسية.

الحل :

كتابة الشعاع $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{MG}$:

نستعمل علاقة شال (ندخل النقطة G):

$$(1) \quad \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC}$$

بمأنّ G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ فإن $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

ومنه (1) تصبح : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{MG} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

إذن : $\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$

تبيين أنّ $MG = \dfrac{k}{|\alpha + \beta + \gamma|}$:

لدينا: $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

ومنه : $\left\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}\right\| = k$ تكافئ : $\left\|(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}\right\| = k$

أي : $|\alpha+\beta+\gamma|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = k$

إذن : $\boxed{MG = \dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}}$ لأن : $(\alpha+\beta+\gamma \neq 0)$.

مناقشة تبعا لقيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (Γ_k) محددا عناصرها الهندسية:

الحالة الأولى: (من أجل $k < 0$) نجد $(\Gamma_k) = \{\}$ (لأنّ الموجب لا يساوي السالب).

الحالة الثانية: (من أجل $k = 0$) نجد $MG = 0$ أي $M = G$ ومنه M تنطبق على G إذن : $(\Gamma_k) = \{G\}$.

الحالة الثالثة : (من أجل $k > 0$) نجد : $MG = \dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|} > 0$

إذن: المجموعة (Γ_k) هي دائرة مركزها G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

ونصف قطرها : $r = \dfrac{k}{|\alpha+\beta+\gamma|}$.

حل تطبيقات ص 188.

1. تبيين أن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$ دائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

لدينا: $\boxed{1-2+3\neq 0}$ لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-2);(C,3)\}$ تكافئ: $\left\|(1-2+3)\overrightarrow{MG}\right\|=6$ أي: $MG=3$.

إذن:مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=6$ هي دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=3$.

2. ABC قائم ومتساوي الساقين من المستوي حيث $CA=CB=1$

تعيين وانشاء مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}$

لدينا: $\boxed{-2+1-3\neq 0}$ لتكن I مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,1);(C,-3)\}$ تكافئ: $\left\|(-2+1-3)\overrightarrow{MI}\right\|=\sqrt{5}$ أي: $MI=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

إذن:مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}$ هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

3. ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=1$.

تعيين وانشاء مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{3}$

لدينا: $\boxed{1-1+2\neq 0}$ لتكن J مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,2)\}$

تكافئ: $\left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|=\sqrt{3}$ أي: $MJ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

إذن:مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{3}$ هي دائرة مركزها J ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. ABC مثلث

تعيين مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

لدينا: $\boxed{1+1+2\neq 0}$ لتكن P مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,2)\}$

ولدينا: $\boxed{1+1\neq 0}$ لتكن Q مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1)\}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ: $\left\|4\overrightarrow{MP}\right\|=2\left\|2\overrightarrow{MQ}\right\|$ أي: $MP=MQ$

إذن: مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ هي محور القطعة المستقيمة $[PQ]$.

5. ABC مثلث متقايس الأضلاع من المستوي حيث $AB=AC=BC=\alpha$.

لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

6. التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (Γ) :

نضع $M=B$ نجد: $\left\|\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}\right\|$ ومنه: $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$

إذن: $B\in(\Gamma)$.

7. تبيين أن الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M : (مجموع المعاملات يساوي 0)

باستعمال علاقة شال ندخل A نجد :

$$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

إذن : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

وبالتالي : الشعاع $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M.

8. ليكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-4);(C,1)\}$.

تبيين أن $GM=\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ : $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|$ ومنه :
$2GM=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$.

باستعمال نظرية فيتاغورث نجد: $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|=\alpha\sqrt{3}$

ومنه: $GM=\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$.

استنتاج طبيعة المجموعة (Γ) محددا عناصرها المميزة :

من المساواة $GM=\alpha\frac{\sqrt{3}}{2}$ نستنتج أنّ المجموعة (Γ) دائرة مركزها G ونصف قطرها $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

مستقيم اولار (Euler) ص 189 :

المستقيم الذي يشمل النقط O ، G و H يسمى مستقيم اولار (Droite d'Euler) للمثلث ABC .
حيث :

- O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .
- G مركز ثقل المثلث ABC.
- H تقاطع الارتفاعات في المثلث ABC .

حالة خاصة:

إذا كان المثلث ABC متقايس الأضلاع فإن النقط الثلاثة O ، G و H منطبقة على بعضها.