

الدوال كثيرات الحدود

[I] تعريف كثير الحدود: عبارة الدالة كثير الحدود تكتب على الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث:
 n درجة كثير الحدود
 a_n, \dots, a_1, a_0 معاملاته
 $a_p x^p$ الحد الذي درجته p

أمثلة:

الدالة الثابتة $f(x) = a$ هي دالة كثير حدود درجته 0

الدالة الخطية $f(x) = ax$ و التآلفية $f(x) = ax + b$ هي دوال كثيرات حدود من الدرجة 1

*ملاحظة: كل الدوال كثيرات الحدود معرفة على \mathbb{R}

[II] عمليات على كثير الحدود

(1) قواعد الحساب الجبري:

- مجموع، فرق وجداء كثيرات الحدود هي كثيرات حدود
- مركب كثيري حدود هو كثير حدود
- جداء كثيري حدود درجتها n و p هو كثير حدود درجته $n + p$

(2) جذر كثير حدود: (جذر مرادف كلمة حل)

α جذر لكثير الحدود $f(x)$ معناه $f(\alpha) = 0$

(3) تحليل كثير حدود:

إذا كان α جذر لكثير الحدود $f(x)$ فإنه يوجد كثير حدود $g(x)$ بحيث $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

(4) طرق تحليل كثير حدود: هناك ثلاث طرق لتحليل كثير حدود من الدرجة n

* مثال: تحليل كثير حدود $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ جذره 2

✓ طريقة 3: (هورنر Horner)

معاملات كثير الحدود			
1	-6	-13	42
	+	+	+
2	-8	-42	
	=	=	=
1	-4	-21	0
معاملات كثير الحدود الناتج			

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21)$$

✓ طريقة 2: (القسمة الإقليدية)

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 - 13x + 42 \\ - (x^3 - 2x^2) \\ \hline -4x^2 - 13x + 42 \\ - (-4x^2 + 8x) \\ \hline -21x + 42 \\ - (-21x + 42) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21)$$

✓ طريقة 1: (المطابقة)

$$f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$

بالنشر:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$$

$$f(x) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

بالمطابقة مع $f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ نجد:

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-6 \\ c-2b=-13 \\ -2c=42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-2=-6 \\ c-2b=-13 \\ c=-21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-21 \end{cases}$$

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x - 21) \text{ ومنه}$$

[III] المعادلات من الدرجة الثانية (مراجعة)

$$(1) \text{ الشكل النموذجي: } ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ حيث}$$

Prof Mustapha
KdH-A-LD9

(2) ملخص حل وإشارة وتحليل معادلة من الدرجة الثانية من الشكل $E = ax^2 + bx + c$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$																											
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	إذا كان																								
تقبل حلين متميزين $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	تقبل حل مضاعف $x_0 = \frac{-b}{2a}$	لا تقبل حلول	فإن المعادلة																								
<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$</td> <td>$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>إشارة a</td> <td>عكس إشارة a</td> <td>إشارة a</td> <td></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$	E	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\frac{-b}{2a}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>E</td> <td>إشارة a</td> <td>إشارة a</td> <td></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$	E	إشارة a	إشارة a		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>E</td> <td colspan="2">إشارة a</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	E	إشارة a		إشارتها
x	$-\infty$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$																							
E	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a																								
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$																								
E	إشارة a	إشارة a																									
x	$-\infty$	$+\infty$																									
E	إشارة a																										
$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_0)^2$	لا تقبل تحليلا	تحليلها																								

[IV] مجموع وجداء حلي معادلة من الدرجة الثانية

إذا كان مميز معادلة من الدرجة الثانية $\Delta \geq 0$ فإن:

Prof Mustapha

KHACD

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

نرمز للمجموع بالرمز S و للجداء بالرمز P

$$P = \frac{c}{a} \quad ; \quad S = -\frac{b}{a}$$

* نتائج:

① حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر

إذا علم أحد الجذرين فيمكن حساب الحل الآخر باستعمال المجموع: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ أو الجداء: $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

② حساب عددين علم مجموعهما وجدائهما

يمكن حساب عددين علم مجموعهما وجدائهما باستعمال العلاقة: $x^2 - Sx + P = 0$

③ تعيين إشارة حلي معادلة من الدرجة الثانية ($ax^2 + bx + c = 0$)

فإن	إذا كان
المعادلة تقبل حلين من إشارتين مختلفتين	$\frac{c}{a} < 0$
المعادلة تقبل حلين موجبين	$-\frac{b}{a} > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$
المعادلة تقبل حلين سالبين	$-\frac{b}{a} < 0$ و $\frac{c}{a} > 0$

[V] المعادلات مضاعفة التربيع ($ax^4 + bx^2 + c = 0$):

يؤول حل المعادلة مضاعفة التربيع $ax^4 + bx^2 + c = 0$ إلى حل الجملة: $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$

* ملاحظة: عند إيجاد قيمة X_1 و X_2 يجب تعويضهما في المعادلة $X = x^2$ لإيجاد قيم x