الخليل
للرياضيات

سنة **ثانية** ثانوي

الشعب:

رياضيات | علوم تجريبية | تقني رياضي

ملخص في

المرجح

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

[26 جانفي 2022]

مرجح نقطتين

❖ **تعريف:** A و B نقطتين متمايزتين، وα و β عددين حقيقين حيث $(\alpha+\beta\neq 0)$

نسمي G مرجح النقطتين A و B المرفقين بالمعاملين α و β على الترتيب حيث:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}}$$

❖ **مفاهيم عامة:**

- الثنائية $(A;\alpha)$ تسمى نقطة مثقلة
- الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين
- إذا كان $\alpha+\beta=0$ أي $\alpha=-\beta$ ومنه العلاقة تصبح $\alpha\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$ وهذا غير ممكن إذا كان $\alpha\neq 0$ و $A\neq B$
- إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل على $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ والنقطة G منتصف $[AB]$

❖ **نتائج هامــة:**

- النقطة G وحيدة
- G مرجح الجملة $\{(A;\lambda\alpha);(B;\lambda\beta)\}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$
- النقط A، B و G على استقامية واحدة
- من أجل كل نقطة M من المستوي: $\boxed{\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}}$

❖ **إنشاء مرجح نقطتين:** لإنشاء G نعتمد العلاقة:

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}}$$

❖ **إحداثيي مرجح نقطتين:** G مرجح النقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ المرفقين بالمعاملين α و β على الترتيب و$G(x_G;y_G)$، لدينا:

$$\boxed{y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\quad \text{و}\quad x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}}$$

❖ **مجموعات النقط:**

النقطة G مرجح الجملة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ والنقطة G' مرجح الجملة $\{(A;\alpha');(B;\beta')\}$

- كل علاقة من الشكل $\boxed{\left\|\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\alpha'\,\overrightarrow{MA}+\beta'\,\overrightarrow{MB}\right\|}$
  حيث: $|\alpha+\beta|=|\alpha'+\beta'|\neq 0$
  هي محور القطعة $[GG']$
- كل علاقة من الشكل: $\boxed{\left\|\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\lambda\,\overrightarrow{MA}-\lambda\,\overrightarrow{MB}\right\|}$
  حيث: $\lambda\neq 0$ و $\alpha+\beta\neq 0$
  هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث:
  $$r=\frac{|\lambda|}{|\alpha+\beta|}\times AB$$
- كل علاقة من الشكل: $\boxed{\left\|\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}\right\|=k}$
  حيث k عدد حقيقي موجب تماما و $\alpha+\beta\neq 0$
  هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث:
  $$r=\frac{k}{|\alpha+\beta|}$$

مرجح ثلاث نقط

❖ **تعريف:** A ، B و C ثلاث نقط متمايزة و α ، β و γ أعداد حقيقية حيث $(\alpha+\beta+\gamma \neq 0)$
نسمي G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب حيث

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

❖ **مفاهيم عامة:**
- إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإنّ المرجح غير موجود
- إذا كان $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ فإن G تسمى مركز المسافات المتساوية
- إذا كان $\alpha=\beta=\gamma=1$ والنقط A، B و C ليست على استقامية فإن G مركز ثقل المثلث ABC

❖ **نتائج هامـة:**
- النقطة G وحيدة
- G مرجح الجملة $\{(A;\lambda\alpha);(B;\lambda\beta);(C;\lambda\gamma)\}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$
- من أجل كل نقطة M من المستوي: $\boxed{\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=(\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MG}}$

❖ **إنشاء مرجح ثلاث نقط:** لإنشاء G نعتمد العلاقة:

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\alpha}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\alpha}\overrightarrow{AC}}$$

❖ **إحداثيي مرجح ثلاث نقط:** G مرجح النقط $A(x_A;y_A)$ ، $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب و $G(x_G;y_G)$ ، لدينا:

$$\boxed{y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{و} \quad x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}}$$

❖ **إنشاء مرجح ثلاث نقط:** لإنشاء G نعتمد العلاقة:

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\alpha}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\alpha}\overrightarrow{AC}}$$

❖ **خاصية التجميع:** G مرجح $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$، إذا كان $\alpha+\beta\neq 0$ وكانت G' مرجح $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$
فإنّ G مرجح الجملة $\boxed{\{(G';\alpha+\beta);(C;\gamma)\}}$

❖ **مجموعات النقط:**
- إذا كان $\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=AB}$ ، فإن مجموعة النقط M هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها AB
- إذا كان $\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=k}$ حيث: $k>0$ ، فإن مجموعة النقط M هي:
دائرة مركزها G ونصف قطرها k
- إذا كان $\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=k}$ حيث: $k<0$ ، فإن مجموعة النقط M هي: مجموعة خالية $\emptyset$
- إذا كان $\boxed{\|\overrightarrow{MG}\|=0}$ ، فإن مجموعة النقط M هي: النقطة G

❖ **ملاحظات:**
- لإثبات أن النقطة B تنتمي إلى مجموعة النقاط يكفي تعويض M بـ B في العلاقة المعطاة ونتحصل على علاقة صحيحة
- لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال وخواص الأشعة للتخلص من M

❖ **اثبات تلاقي مستقيمات:** لاثبات أن مستقيمات تتقاطع في نقطة G يكفي أن نثبت أن هذه النقطة مرجح لنقطتين من كل مستقيم بمعاملات حقيقية

❖ **اثبات استقامية نقـط:** لاثبات أن ثلاث نقط في استقامية يكفي أن نثبت أن نقطة منها هي مرجح للنقطتين الأخريين بمعاملين حقيقين