

المتتاليات العددية

I. تعاريف و رموز

المتتالية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n العدد $u(n)$ حيث:
نرمز للمتتالية بالرمز u_n بدلا من $u(n)$ حيث u_n هي صورة n بالمتتالية u
يسمى u_n أيضا الحد العام للمتتالية u او الحد الذي دليله n
إذا كان $n \geq p$ نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n \geq p}$

Prof Mustapha
KHA-LD9

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على \mathbb{N}

u_1 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على \mathbb{N}^*

u_p هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل $n \geq p$

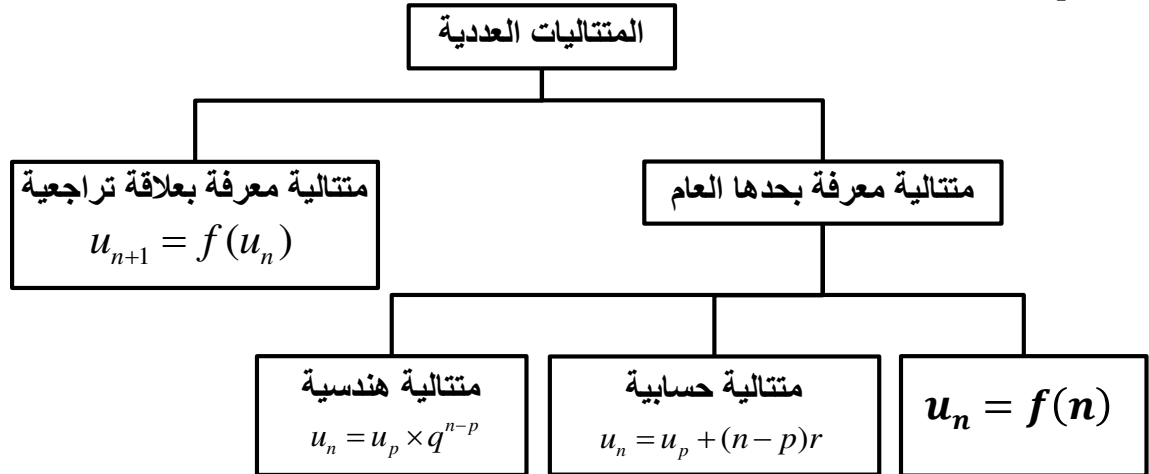
يسمى n دليل للمتتالية u أو دليل الحد u_n

p هو دليل الحد الأول للمتتالية u

$(n - p + 1)$ هي رتبة الحد u_n

حساب الحد الذي رتبته m أي حساب الحد $u_{(m-p+1)}$

II. طرق توليد متتالية عددية



III. اتجاه تغير متتالية عددية

عموما:

فإن	إذا كانت
u متزايدة	$u_{n+1} > u_n$
u متناقصة	$u_{n+1} < u_n$
u ثابتة	$u_{n+1} = u_n$

طريقة ③: نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و نقارنها مع 1

فإن	إذا كانت
u متزايدة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$
u متناقصة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
u ثابتة	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

طريقة ①: ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

فإن	إذا كانت
u متزايدة	$u_{n+1} - u_n > 0$
u متناقصة	$u_{n+1} - u_n < 0$
u ثابتة	$u_{n+1} - u_n = 0$

طريقة ②: ندرس تغيرات f إذا كانت المتتالية

من الشكل: $u_n = f(n)$

[V]. المتتالية الهندسية

① تعريف

$$v_{n+1} = v_n \times q$$

q هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

⊛ إذا كان الحد الأول هو v_0 فان:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

✓ إذا كان الحد الأول هو v_1 فان:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

Prof Mustapha

KdH-A-LD9

*ملاحظة:

إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية هندسية

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})}{2}$$

$$S_n = v_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

④ البرهان أن المتتالية هندسية

طريقة ①: نحسب النسبة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$

إذا كان: $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$ حيث q

عدد ثابت خالي من n فإن v_n هندسية

طريقة ②: نكتب v_n على الشكل

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

⑤ الوسط الهندسي

a, b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية

$$a \times b = c^2 \text{ أي } u_{n+1} \times u_{n-1} = u_n^2$$

[IV]. المتتالية حسابية

① تعريف

$$u_{n+1} = u_n + r$$

r هو عدد حقيقي ثابت يسمى الأساس

② عبارة الحد العام

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

⊛ إذا كان الحد الأول هو u_0 فان:

$$u_n = u_0 + nr$$

✓ إذا كان الحد الأول هو u_1 فان:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

*ملاحظة:

إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية ثابتة.

③ مجموع متتالية حسابية

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود} \times (\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})}{2}$$

$$S_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n + 1}{2} (u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

④ البرهان أن المتتالية حسابية

طريقة ①: نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

إذا كان: $u_{n+1} - u_n = r$ حيث r

عدد ثابت خالي من n فإن u_n حسابية

طريقة ②: نكتب u_n على الشكل

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

⑤ الوسط الحسابي

a, b و c ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية

$$a + b = 2c \text{ أي } u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n$$

[VI]. المتتالية الثابتة

① تعريف: هي المتتالية التي جميع حدودها متساوية أي $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n$

② البرهان أن المتتالية ثابتة

يكفي إثبات أن $u_{n+1} - u_n = 0$ أو أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ أو إثبات أن $u_{n+1} = u_n = u_0$

[VII]. إثبات أن المتتالية لا حسابية ولا هندسية

◀ يكفي برهان أن $u_{n+1} - u_n \neq r$ و أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} \neq q$

◀ أو برهان أن $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$ و أن $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$

[VIII]. تقارب وتباعد متتالية

u_n متقاربة $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ، حيث $l \in \mathbb{R}$

u_n متباعدة $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$

* مبرهنة: إذا كانت $u_n = f(n)$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$

[IX]. نهاية متتالية باستعمال الحصر

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \\ v_n \leq u_n \leq w_n \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \\ u_n \geq v_n \end{cases} \quad \text{②}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \\ u_n \leq v_n \end{cases} \quad \text{③}$$

[X]. نهاية متتالية هندسية

التقارب	النهاية	إذا كان		
متباعدة	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$	و $v_0 > 0$	$q > 1$	①
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$	و $v_0 < 0$		②
متقاربة	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$	$-1 < q < 1$		③
متباعدة	غير موجودة	$q \leq -1$		④

[XI]. إثبات أن المتتالية غير رتيبة (غير متزايدة و غير متناقصة)

① نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n$

② نناقش حسب قيم n الفرق $u_{n+1} - u_n$

③ نستنتج أن u_n غير رتيبة

Prof Mustapha

KdH-LD