الإشتقاقية وتطبيقات الإشتقاقية

شعبة: علوم تجريبية + تقني رياضي + رياضيات

الإشتقاقية

دالة قابلة للإشتقاق عند عدد:

تعريف:

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$، a عدد من D_f. القول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد a معناه:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$$

يسمى $f'(a)$ العدد المشتق للدالة f في العدد a.

ملاحظة:

يمكن تعريف العدد المشتق للدالة f عند a بالعلاقة:

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$$

معادلة مماس لمنحنى عند نقطة:

تعريف:

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ ، a عدد من D_f حيث f قابلة للإشتقاق عند a و $f'(a)$ العدد المشتق عند العدد a . ليكن (C_f) رسمها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$. مماس المنحنى (C_f) عند النقطة $A(a;f(a))$ هو المستقيم الذي يشمل A و معامل توجيهه $f'(a)$ معادلته هي :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

التقريب التآلفي لدالة عند قيمة :

تعريف:

f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ ، a عدد من D_f حيث f قابلة للإشتقاق عند a و $f'(a)$ العدد المشتق عند العدد a التقريب التآلفي للدالة عند يعطى

بالعلاقة: $\boxed{f(a+h) \approx f'(a)h+f(a)}$

أو بالعلاقة: $\boxed{f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)}$

مشتقات بعض الدوال المألوفة :

الدالة	الدالة المشتقة	مجالات قابلية الإشتقاق
a	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

عمليات على الدوال المشتقة :

الدالة	الدالة المشتقة	مجالات ق الإشتقاق
$(f+g)(x)$	$f'(x)+g'(x)$	\
$(f\times g)(x)$	$f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$	\
$(\lambda \times g)(x)$	$\lambda \times f'(x)$	\
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)}{(g(x))^2}$	$g(x)\neq 0$
$\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$	$f(x)\neq 0$

مشتقات بعض الدوال المركبة المألوفة :

الدالة	الدالة المشتقة	مجالات قابلية الإشتقاق
f^n	$n.f'.f^{n-1}$	\
$\frac{1}{f^n}$	$\frac{-n.f'}{f^{n+1}}$	$f(x)\neq 0$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f(x)>0$
$\cos(ax+b)$	$-a.\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$a.\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

تطبيقات الإشتقاقية :

إتجاه تغير دالة :

مبرهنة :

لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة .

1 إذا كانت $\boxed{f'(x)>0}$ موجبة تماما (يمكن أن تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f) على المجال D_f فإن الدالة f متزايدة تماما على D_f.

2 إذا كانت $\boxed{f'(x)<0}$ موجبة تماما (يمكن أن

تكون f' معدومة من أجل قيم منعزلة من D_f على المجال D_f فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال D_f.

3 إذا كانت $\boxed{f'(x)=0}$ معدومة على المجال D_f فإن الدالة f ثابتة على المجال D_f.

ملاحظة :

إذا كانت دالة f إما متزايدة تماما و إما متناقصة تماما على مجال D_f نقول أن الدالة f رتيبة تماما على المجال D_f .

القيم الحدية المحلية :

مبرهنة :

لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال D_f و f' دالتها المشتقة .

إذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند قيمة a من D_f مغيرة إشارتها فإنه يوجد مجال مفتوح I محتوى في D_f يشمل a تقبل فيه f قيمة حدية $f(a)$. تسمى $f(a)$ قيمة حدية محلية .

حصر دالة :

نتائج :

لتكن دالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال $[a;b]$.

1 إذا كانت الدالة f متزايدة تماما على المجال $[a;b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a;b]$:

$$\boxed{f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)}$$

2 إذا كانت الدالة f متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[a;b]$:

$$\boxed{f(b)\leqslant f(x)\leqslant f(a)}$$

الأستاذ : عمارة عوادي
ثانوية بوشوشة المختلطة ولاية الوادي

نقطة الإنعطاف :

تعريف :

f دالة قابلة للإشتقاق على المجال I من يشمل a وليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f و (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a . نقول أنّ النقطة $A(a;f(a))$ هي : **نقطة إنعطاف للمنحنى** (C_f) إذا كان **المماس** (T) **يخترق المنحنى** (C_f).

مبرهنة:

f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على المجال I من يشمل a

- **إذا إنعدمت المشتقة الثانية** f'' عند a **مغيرة إشارتها** فإن منحنى الدالة f يقبل نقطة إنعطاف هي: $A(a;f(a))$.

مبرهنة:

f دالة قابلة للإشتقاق على المجال I من يشمل a

- **إذا إنعدمت المشتقة الأولى** f' عند a **ولم تغيّر إشارتها** فإن منحنى الدالة f يقبل نقطة إنعطاف هي: $A(a;f(a))$.

مبرهنة القيم المتوسطة : (غير مكتملة)

مبرهنة:

لإثبات أن المعادلة $\boxed{f(x)=0}$ تقبل حلا وحيدا α على مجال $[a;b]$.

1 نبين أن الدالة f رتيبة على المجال $[a;b]$.

2 نبين أنّ: $f(a)\times f(b)<0$

تأمل، نحاول، نطمح، نحلم،
نجتهد لنيل المستحيل، نطمح بكل مافينا،
نحلم بكل ماضينا، نأمل بأن سوف نغير قوانينا،
نحاول رغم الضربات التي تأتينا، ننسى ونكرر
المحاولة مرة مرتان بكل عرق ينبض فينا،
نجتهد بكل طاقتنا لنحصل على ماتريد
خواطرنا وما نريد أن نكون
مادمنا بارين بوالدينا
♡

التمرين الأول :

أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند x_0 في كل حالة:

1) $f(x) = 3x+1$، $x_0 = 0$
2) $f(x) = x^2 - 2$،$x_0 = 2$
3) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$،$x_0 = -1$
4) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$، $x_0 = 2$
5) $f(x) = \sqrt{2x}$، $x_0 = 2$
6) $f(x) = \sqrt{-x-1}$،$x_0 = -1$

التمرين الثاني :

1) لتكن الدالة f المعرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x) = (x-1)^2$. و h عدد حقيقي غير معدوم.

أ) أحسب النسبة $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ، ثم بسطها.

ب) هل الدالة f تقبل الإشتقاق عند 1 ؟. إذا كانت كذلك حدد $f'(1)$.

2) لتكن الدالة g المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ : $g(x) = \sqrt{x+2}$.
و h عدد حقيقي غير معدوم.

أ) أحسب النسبة $\dfrac{g(-2+h)-g(-2)}{h}$ ، ثم بسطها.

ب) هل الدالة g تقبل الإشتقاق عند -2 ؟. إذا كانت كذلك حدد $g'(-2)$.

التمرين الثالث:

لتكن الدالة f المعرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و a من I.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة a في كل حالة :

أ) $a = 3$ و $f(3) = -2$ و $f'(3) = 5$.

ب) $a = -7$ و $f(-7) = 0$ و $f'(-7) = -\dfrac{2}{5}$.

2) لتكن دالة f قابلة للإشتقاق عند القيمة 4 والمعادلة المختصرة للمماس عند النقطة ذات الفاصلة 4 هي : $y = 5 - \dfrac{2}{3}x$
عيّن $f(4)$ و $f'(4)$.

التمرين الرابع:

أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة:

1) $f(x) = 3 - \frac{7}{3}x$
2) $f(x) = x^2 - 2x$
3) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$
4) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$
5) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^{+}2$
6) $f(x) = x^3 - 4x + 5$
7) $f(x) = (x^2-1)^3$
8) $f(x) = (3x+6)^3$
9) $f(x) = x^3 - \sqrt{x}$
10) $f(x) = x\sqrt{x}$
11) $f(x) = -\dfrac{2}{x}$
12) $f(x) = (x^2 - 3\sqrt{x})^3$
13) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
14) $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x-1}$
15) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$
16) $f(x) = -x + \dfrac{1}{x+1}$
17) $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{3}{x-2}$
18) $f(x) = \dfrac{7}{(2x-1)^2}$
19) $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x^2+1}$
20) $f(x) = \dfrac{4}{(2x+3)^3}$
21) $f(x) = \sqrt{-x-1} - 3$
22) $f(x) = \sqrt{2x+5} + 1$
23) $f(x) = 2\sqrt{x}\left(\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{1}{x^2}\right)$
24) $f(x) = \sqrt{2 + \cos 2x}$
25) $f(x) = (x^2+x)\sqrt{x^2+1}$
26) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$
27) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x-5}{2x+1}$
28) $f(x) = \dfrac{x^2-8x+16}{x-3}$
29) $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2}{(x+1)^2}$
30) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-1}$
31) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x-2)^2}$
32) $f(x) = \cos x - 2\sin x$
33) $f(x) = \sin^2 x$
34) $f(x) = \tan x - 2x^2$
35) $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{1 + \cos x}$
36) $f(x) = |x^2 + 4x - 5|$

التمرين الخامس:

أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة:

1) $f(x) = (2x^2+3x+1)^5$
2) $f(x) = (4x+2)(3x^62 - 5x + 2)^2$
3) $f(x) = (2x+1)^2(-3x+2)^3 + 4x^2 - 3$
4) $f(x) = x(3x^2+2x)^2$
5) $f(x) = 5(-2x^2+3x+1)^2$
6) $f(x) = \dfrac{2x-3}{(5x+2)^2}$
7) $f(x) = \dfrac{3x^2+x+1}{(x^2+1)^2}$
8) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^2}$
9) $f(x) = \sqrt{x^2+3}$
10) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$
11) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{1+x}}$
12) $f(x) = \tan^3 x$

التمرين السادس:

1) أوجد تعريف تآلفي للعبارة $(3+h)^2$ عندما يؤول h إلى 0.
2) عيّن تقريبا تآلفيا لكل من الأعداد: $(2.98)^2$ ، $(3.02)^2$ و $(3.001)^2$.
3) ليكن منحنى (C_f) الدالة f يشمل النقطة $A(2;4)$ و (Δ) مستقيم معادلته: $y=3x+5$.
   - أكتب معادلة المماس للمنحنى عند النقطة A والذي يوازي المستقيم (Δ)

التمرين السابع:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^4+2x^2-1$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1) عيّن $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.
2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x)=0$ ، ثمّ إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f.
3) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.
4) أوجد التقريب التآلفي للعدد: $f(0.099)$.

التمرين الثامن:

1) عيّن أحسن تقريب تآلفي لـ $\frac{1}{3+h}$ عندما يؤول h إلى 0.
2) بإستعمال هذا التقريب جد القيمة المقربة للأعداد: $\frac{1}{3.02}$ ، $\frac{1}{2.99}$.

التمرين التاسع:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+ax^2+x+1$
و a عدد حقيقي.

1) عيّن قيم العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة f متزايدة تماما.
2) عيّن قيم العدد الحقيقي a حتى تقبل الدالة f قيمة حدية محلية على $\mathbb{R}$

التمرين العاشر:

a عدد حقيقي، f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}$.

1) عيّن قيم العدد a لكي تقبل الدالة f قيمة حدية محلية صغرى قيمة حدية محلية عظمى.
2) عيّن قيم العدد a كي لا تقبل الدالة f أية قيمة حدية.

التمرين الحادي عشر:

a عدد حقيقي، f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ :
$f(x)=\frac{-x^2+ax+3}{x-1}$.

1) عيّن قيم العدد a كي لا تقبل الدالة f أية قيمة حدية.
2) عيّن عندئذ a من أجل أن يقبل التمثيل البياني للدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 2 مماسا موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $2x+2y-3=0$.

التمرين الثاني عشر:

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1) عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2) أحسب $f'(x)$ حيث f' الدالة المشتقة للدالة f.
3) شكّل جدول تغيرات الدالة f.
4) أكتب معادلات المماس للمنحنى(C_f) عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 ، 2 و 3.
5) أنشئ المنحنى (C_f) على المجال $[-3;1[\cup]1;5]$.

التمرين الثالث عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+2x+1$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
2) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-2).
3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 3 ، عيّن إحداثيي نقطة التماس و معادلة المماس عندها.

التمرين الرابع عشر:

f و g دالتان معرفتان على بـ $\mathbb{R}$:
$f(x) = x^4 - 3x + 1$ و $g(x) = 2x^3 - 3x + 1$.
ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) أدرس تغيرات الدالة h ، ثمّ إستنتج إشارة $h(x)$.
2) قارن بين $f(x)$ و $g(x)$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا.

التمرين الخامس عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}\{-1\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x + 1}$
حيث a و b عددان حقيقيان. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

1) أحسب $f'(x)$.
2) عيّن a و b حتى يكون المستقيم ذو المعادلة : $y = 4x + 3$ مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

التمرين السادس عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = ax + b - \dfrac{6}{x}$
حيث a و b عددان حقيقيان. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

1) عيّن a و b حتى يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(2;0)$ ويقبل مماس عند A معادلته : $y = x - 2$.
2) أدرس إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3) عيّن القيم الحدية للدالة f.
4) إستنتج حصرا للدالة f على المجال $\left]\frac{3}{2};3\right[$.

التمرين السابع عشر:

1) لتكن f دالة زوجية معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.
   - أثبت أن دالتها المشتقة f' فردية.
2) لتكن g دالة زوجية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 2}$
   - أكتب معادلة المماس لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة 1.
   - إستنتج معادلة المماس لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة (-1).

التمرين الثامن عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = ax^2 + bx + c$
حيث a ، b و c أعداد حقيقية $(a \neq 0)$. . و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

- عيّن العددين a ، b و c بحيث يشمل المنحنى (C_f) النقطة $A(0;3)$ ويقبل مماسا عند النقطة $B\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{8}\right)$ موازيا لحامل محور الفواصل.

التمرين التاسع عشر:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 2x + 1$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2 وإستنتج $f'(2)$.
2) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2.

التمرين العشرون:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x + 2}$
حيث a و b عددان حقيقيان. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

- عيّن العددين a و b بحيث يقبل المنحنى (C_f) مماسا معامل توجيهه $\frac{2}{3}$ عند النقطة $A(1;-3)$.

التمرين الحادي والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x - 3}$
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.

1) بيّن أنّ f قابلة الإشتقاق على مجموعة تعريفها.
2) بيّن أنّ المنحنى يقبل مماسين كل منهما -4 ، ثمّ عيّن النقطتين الموافقتين لذلك ولتكن A و B.
3) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند كل من النقطتين A و B.

التمرين الثاني والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+2}$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1) أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f.
2) هل توجد مماسات للمنحنى (C_f) معامل توجيهها $\dfrac{1}{4}$

التمرين الثالث والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+3x^2-3x-2$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1) أدرس تغيرات الدالة f.
2) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1;0]$.
3) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين يوازيان المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=-3x-2$.
4) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

التمرين الرابع والعشرون:

f و g دالتان معرفتان كما يلي :
$g(x)=x^3+3x-2$ و $f(x)=\dfrac{-x+1}{x+3}$.
و (C_f) و (C_g) تمثيليهما البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1) عيّن مجموعة تعريف كلا من f و g.
2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة g عند 0.
1) أدرس إتجاه تغير كل من الدالتين f و g ، ثم شكّل جدولي تغيراتهما.
2) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة (-1).
3) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي c من المجال $[-3;-1]$ بحيث: $g(c)=0$.
4) عيّن حصرا للعدد $f\left(\dfrac{3}{16}\right)$ على المجال $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$ و حصرا للعدد $g\left(\dfrac{1}{4}\right)$ على المجال $[0;1]$.

التمرين الخامس والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1) أحسب $f(1)$ ، ثمّ أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.
3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f(x)\geqslant 0$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.
4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.
5) عيّن نقط من المنحنى (C_f) التي يكون فيها المماس معامل توجيهه 3.
6) ليكن (Δ) مستقيم معادلته : $y=mx+d$ حيث m و d عددان حقيقيان.
   - ناقش حسب قيم m وجود مماسات للمنحنى (C_f) تكون فيها موازية للمستقيم (Δ).

التمرين السادس والعشرون:

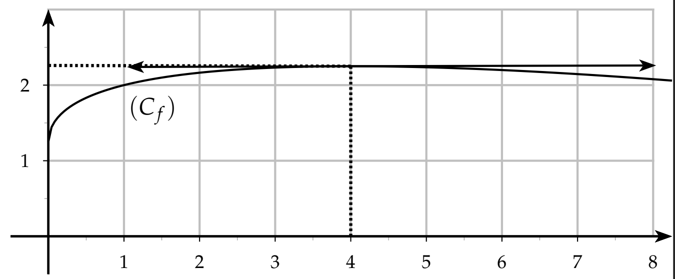
دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^4-2x^2-3$.
و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسيا.
2) بيّن أنّ الدالة f دالة زوجية.
3) أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجال $[-2;2]$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
4) علما أن: $0\leqslant x\leqslant 2$ جد حصرا للعدد $f(x)$.
5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيينهما.
6) جد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{3}$ ، ثمّ عيّن $f(\sqrt{3}+0.01)$.
7) أنشئ المنحنى (C_f).

التمرين السابع والعشرون:

لتكن الدالة f المعرفة $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=ax+b+\sqrt{x}$
و a، b عددان حقيقيان.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$. كما في الشكل:



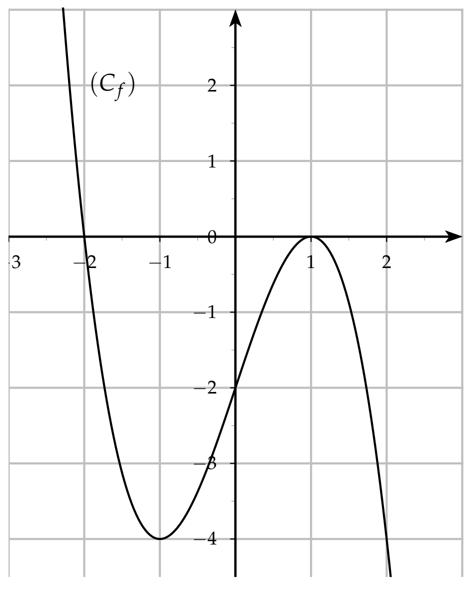
1) عيّن بيانيا قيم $f(4)$ ، $f'(4)$ ، $f(1)$ و $f'(1)$.

2) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و b ، ثمّ عيّن قمتي a و b.

3) عيّن بيانيا إشارة $f'(x)$ ، ثّم تأكد من صحة النتيجة حسابيا.

التمرين الثامن والعشرون:

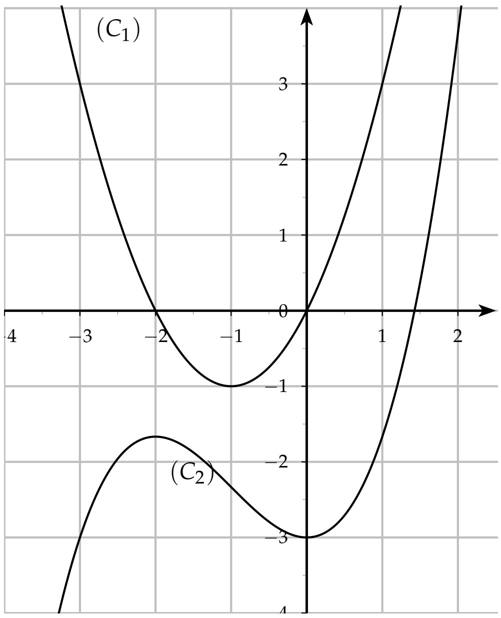
لتكن الدالة f المعرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $[-3;3]$.



- بقراءة بيانية أوجد : $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f'(1)$ و $f'(-1)$.

التمرين التاسع والعشرون:

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ مثلنا منحنى الدالة f و منحنى دالتها المشتقة f' كما هو مبين في الشكل.



1) أرفق كل منحنى بدالته المناسبة، مبررا إجابتك بتشكيل جدول إشارة $f'(x)$ وجدول تغيرات الدالة f

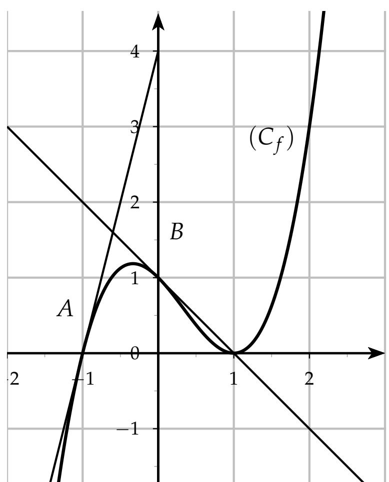
2) بقراءة بيانية : عيّن $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f(-3)$ و $f'(-3)$.

3) أكتب معادلتي المماسين (T_A) و (T_B) للمنحنى (C_f) عند النقطتين A و B ذات الفاصلتين 0 و (-3) على الترتيب .

التمرين الثلاثون:

في الشكل التالي، هو (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

وليكن المماسين (T_A) و (T_B) للمنحنى (C_f) عند النقطتين A و B ذات الفاصلتين (-1) و 0 على الترتيب .



1) بقراءة بيانية: عيّن قيم $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(-1)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$

2) أ) حل بيانيا على المجال $\left]-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right[$ المعادلتين : $f(x)=0$ ، $f'(x)=-1$.

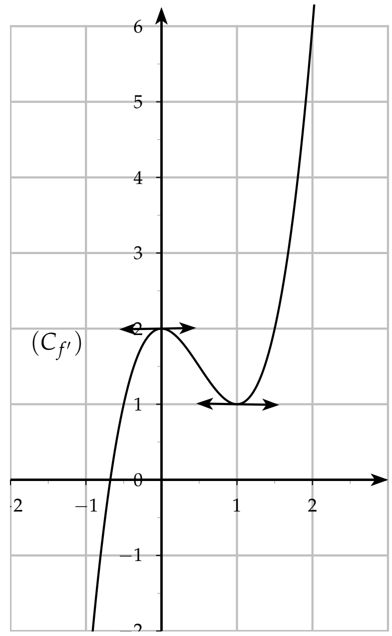
ب) حل بيانيا على المجال $\left]-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right[$ المتراجحة : $f'(x)\geqslant 0$

3) شكّل جدول تغيرات الدالة f موضحا إشارة $f'(x)$

5) أوجد عبارة $f(x)$ إذا علمت أن f كثير حدود من الدرجة الثالثة.

التمرين الحادي والثلاثون :

هو التمثيل البياني للدلة الدالة المشتقة للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.



1) حدد حسب قيم x إشارة $f'(x)$

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f.

3) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f'(x)=m$.

4) ليكن a و b عددان حقيقيان من المجال $[-2;-1]$ بحيث: $a<b$.

- قارن بين العددين $f(a)$ و $f(b)$

التمرين الثاني والثلاثون:

لتكن الدالة f المعرفة $[-4;4]$ بـ : $f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل x كل من $[-4;4]$: $f'(x)=\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$.

ب) عيّن إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات f.

2) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيد معامل توجيهه 4.

3) بيّن انّ النقطة $\Omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

4) أ) أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة Ω.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=4x+1$ ، ماذا تستنتج؟.

5) بيّن أنّ Ω النقطة هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

6) أ) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب) أنشئ (C_f) والمستقيم (T).

التمرين الثالث والثلاثون:

I. لتكن الدالة g المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3-3x^2+ax+b$

حيث a و b عددان حقيقيان.

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- عيّن العددين a و b بحيث يمر المنحنى (C_g) بالنقطتين $A(0;2)$ و $B(1;3)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) عيّن عبارة f' الدالة المشتقة للدالة f.

ب) أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثمّ إستنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $[-1;3]$.

جـ) عيّن حصرا للدالة f على المجال $[-1;3]$.

2) أثبت أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(2-x)+f(x)=6$ ماذا تستنتج؟.

3) أ) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

ب) تأكد أن : $f(x)-(3x+2)=x^2(x-3)$ ، ثمّ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T).

ج) عيّن قيمة تقريبية للعدد: $f(0.005)$.

4) هل توجد نقط من المنحنى (C_f) يكون فيها توجيه المماس يساوي 3 ؟ إذا كان جوابك بنعم عيّن تلك النقط.

III. لتكن الدالة h المعرفة على المجال $[-1;3]$ بـ :
$$h(x)=f(-2x+2)$$

1) بيّن أنّ الدالة h هي مركب دالتين يطلب تعيينهما.

2) إعتمادا على إتجاه تغير مركب دالتين بيّن أن h متناقصة تماما على المجال $[-1;3]$.

التمرين الرابع والثلاثون:

1) نعتبر كثير الحدود المعرف بـ : $P(x)=x^3+3x+4$.

أ) أحسب $P(-1)$ ، ثمّ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x)=0$

ب) أدرس حسب قيم x إشارة $P(x)$.

2) دالة معرفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

أ) بيّن أنّ من أجل كل x من $[-2;2]$:
$$f'(x)=\frac{xP(x)}{(x^2+1)^2}$$

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

ج) إستنتج حصرا للعدد $f(x)$ على المجال $[-2;2]$.

د) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

هـ) أنشئ المنحنى (C_f) والمماس (T).

3) دالة معرفة على المجال $[-2;2]$ بـ : $g(x)=|x|-\dfrac{|x|+2}{x^2+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

أ) أدرس شفعية الدالة g.

ب) بإستعمال المنحنى (C_f) أذكر كيف يمكن إنشاء المنحنى (C_g).

ج) شكل جدول تغيرات الدالة g ، ثمّ أنشيء (C_g).

4) دالة معرفة على المجال $[0;\pi]$ بـ : $h(x)=\dfrac{\cos^3 x-2}{\cos^2 x+1}$.

أ) بيّن أنّ الدالة h هي مركب دالتين يطلب تعيينهما.

ب) أحسب الدالة $h'(x)$ حيث h' المشتقة للدالة h ، إستنتج إتجاه تغير الدالة h.

التمرين الخامس والثلاثون:

I. دالة معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-2x+2}$ حيث a و b عددان حقيقيان و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

- عيّن العددين a و b حتى يشمل المنحنى (C_f) النقطتين $A(2;0)$ و $B(0;2)$.

II. نضع في كل ما يلي: $a=-4$ و $b=4$.

1) تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-2x+2}$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$f'(x)=\dfrac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$.

3) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

4) عيّن حصرا للعدد $f(x)$ على المجال $[-1;3]$.

5) بيّن أنّ النقطة $\Omega(1;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

6) أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة Ω.

7) بإستعمال التقريب التآلفي للدالة f أعط قيمة تقريبية للعددين : $f(1.0003)$ و $f(0.9993)$.

III. نعرف الدالة g على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{(x-2)^2}$.

- أحسب $f(x)\times g(x)$ ، إستنتج إتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;2[$ دون حساب $g'(x)$.

.....إذا توقفت عن المحاولة فستتوقف عن الإبداع

الأستاذ : عمارة عوادي
ثانوية بوشوشة المختلطة ولاية الوادي

التمرين السادس والثلاثون:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-2;4]$ بجدول تغيراتها كما يلي:

x	-2		-1		0		1		2		3		4
$f'(x)$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

1) حدد إشارة $f(x)$.

2) نعرّف الدالة g بالعبارة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$

أ) إستنتج D_g مجموعة تعريف الدالة g.

ب) أكتب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثمّ إستنتج إشارة $g'(x)$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة g.

التمرين السابع والثلاثون:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-3;-2[\cup]-2;1[\cup]1;5]$ بجدول تغيراتها كما يلي:

x	-3		-2		0		1		5
$f'(x)$		$-$	‖		$-$		‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	‖	$\searrow$	0	$\searrow$	‖	$\searrow$	0

1) حدد إشارة $f(x)$.

2) نعرّف الدالة g على المجال $[-3;-2[\cup]-2;1[\cup]1;5]$ بـ :
$g(x)=[f(x)]^2$

أ) أكتب $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثمّ إستنتج إشارة $g'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g.