

① المرجح في المستوي

❖ مرجح نقطتين

* مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β $\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ حيث: $\alpha + \beta \neq 0$

○ α و β عدنان حقيقيان

○ تسمى الثانية (A, α) نقطة مثقلة و تسمى الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ جملة نقطتين مثقلتين

* إذا كان $\alpha = \beta$ نحصل: $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB}$ $\Leftrightarrow G$ منتصف $[AB]$; (نأخذ في هذه الحالة: $\alpha = \beta = 1$)

ميرهنات:

▪ G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$

▪ G منتصف $[AB] \Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MG}$

خواص:

• G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow G$ مرجح $\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ حيث: $k \in \mathbb{R}^*$

• G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow$ فإن النقط A, B, G على استقامة واحدة

احداثيا مرجح نقطتين:

$G(x_G; y_G); B(x_B; y_B); A(x_A; y_A)$ مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

إنشاء مرجح نقطتين:

$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ مرجح G

(1) نكتب \overrightarrow{AG} بدلالة \overrightarrow{AB} وفق القانون: $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$

(2) نقسم القطعة $[AB]$ إلى $\alpha + \beta$ جزء متقايسة ثم انطلاقا من A نضع G على بعد $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ (يمكن الاستعانة بمبرهنة طالس)

❖ مرجح 3 نقط

* مرجح النقط B, C و المرفقة بالمعاملات α, β, γ $\Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

○ α, β, γ أعداد حقيقية حيث: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

* إذا كان $\alpha = \beta = \gamma$ و النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة فإن: G مركز ثقل المثلث ABC

(نأخذ في هذه الحالة: $\alpha = \beta = \gamma = 1$)

ميرهنات:

▪ G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow$ من أجل كل نقطة M لدينا: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$

خواص:

• G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow G$ مرجح $\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ حيث: $k \in \mathbb{R}^*$

• G مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, إذا كانت D مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ فإن: G مرجح $\{(D, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$

احداثيا مرجح 3 نقط:

$G(x_G; y_G); C(x_C; y_C); B(x_B; y_B); A(x_A; y_A)$ مرجح $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \quad ; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

إنشاء مرجح 3 نقط:

$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ مرجح G

طريقة 1:

(1) نكتب \overrightarrow{AG} بدلالة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} وفق القانون: $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$

(2) نرسم الشعاع \overrightarrow{AG} محصلة مجموع الشعاعين $\frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AB}$ و $\frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{AC}$

طريقة 2:

(1) ننشئ I مرجح نقطتين بحيث مجموع المعاملين $\neq 0$ مثلا A و C بحيث $\alpha + \gamma \neq 0$

(2) نكتب \overrightarrow{GI} بدلالة \overrightarrow{BI} و ننشئ G

Prof Mustapha
KHA-LD9

المرجح في المستوي ②

❖ مجموعة النقط

	فإن مجموعة النقط هي	إذا كان	
دائرة	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	$k' > 0$ حيث $\ \overrightarrow{MG}\ = k'$	①
	دائرة مركزها G و نصف قطرها $r = AB$ (لأن AB طول موجب ثابت)	$\ \overrightarrow{MG}\ = AB$	
	دائرة قطرها GH و مركزها منتصف $[GH]$	$(MG) \perp (MH)$	
ϕ	مجموعة خالية	$k' < 0$ حيث $\ \overrightarrow{MG}\ = k'$	②
نقطة	النقطة G (أو هي النقطة M منطبقة على G)	$\ \overrightarrow{MG}\ = 0$	③
مستقيم	مستقيم محور القطعة $[GH]$	$\ \overrightarrow{MG}\ = \ \overrightarrow{MH}\ $	④
جزء من المستوي	كل النقط من المستوي التي تقع داخل و على محيط الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	$\ \overrightarrow{MG}\ \leq k'$	⑤
	كل النقط من المستوي التي تقع خارج الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $r = k'$	$\ \overrightarrow{MG}\ > k'$	
	نصف المستوي في جهة النقطة G و حده محور $[GH]$	$\ \overrightarrow{MG}\ < \ \overrightarrow{MH}\ $	

*ملاحظة 1: لإثبات أن B تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض M ب B في العلاقة المعطاة و نحصل على علاقة صحيحة

*ملاحظة 2: لإثبات أن شعاع أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال و خواص الأشعة للتخلص من M

❖ اثبات تلاقي مستقيمتين

مثال: ABC مثلث و النقط I, J, K معرفة كما يلي:

• I نظيرة منتصف $[AB]$ بالنسبة إلى B

• النقطة J تحقق: $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

• النقطة K تحقق: $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

(1) أرسم شكلا توضح فيه النقط I, J, K و K مع التبرير.

(2) أثبت أن كل نقطة من النقط I, J, K هي مرجح لنقطتين من النقط A, B, C يطلب تحديد المعاملين في كل حالة.

(3) أثبت أن المستقيمتين (AK) و (BJ) و (CI) متقاطعة.

الحل:

(1) الإنشاء مع التبرير:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AJ} = \frac{-3}{2-3}\overrightarrow{AC} \iff 2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

(2) اثبات المرجح وتحديد المعاملات:

$$-2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{AI} = \vec{0} \iff 2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\iff \overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \iff \{A(1), B(-3)\}$$

$$* \text{ بنفس الطريقة نجد: } J \text{ مرجح : } \{A(2), C(-3)\} \text{ و } K \text{ مرجح : } \{B(2), C(1)\}$$

(3) إثبات أن المستقيمتين (AK) و (BJ) و (CI) متقاطعة:

ليكن G مرجح $\{(A, 2); (B, -6); (C, -3)\}$ موجود لأن: $2 - 6 - 3 = -7 \neq 0$

طريقة 2: (باستعمال الارتباط الخطي)

$$2\overrightarrow{GA} - 6\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$-7\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{IA} - 6\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$-7\overrightarrow{GI} + 2(\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB}) - 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$G \in (IC) \text{ و منه } \overrightarrow{GI} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{IC}$$

* بنفس الطريقة نجد: $G \in (JB)$ و $G \in (AK)$

و منه المستقيمتين (AK) و (BJ) و (CI) متقاطعة في G

طريقة 1: (باستعمال خاصية التجميع)

$G \in (IC)$ و منه $\{(I, -4); (C, -3)\}$

$G \in (JB)$ و منه $\{(J, -1); (B, -6)\}$

$G \in (AK)$ و منه $\{(K, -9); (A, 2)\}$

و منه المستقيمتين (AK) و (BJ) و (CI) متقاطعة في النقطة G

❖ مستقيم أولار (Euler): هو المستقيم الذي يشمل مركز ثقل مثلث ومركز الدائرة المحيطة به وملتقى الإرتفاعات فيه.